Introdução à Controlabilidade de EDO's

Felipe W. Chaves-Silva

DM - UFPB

Escola de Verão em Matemática da UFPB - 2021

O que é Teoria do Controle?

Área da matemática que estuda sistemas dinâmicos cujo comportamento pode ser mudado por meio da aplicação de controles (atuadores).

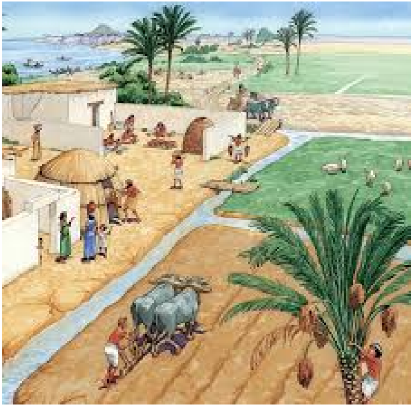
O que é Teoria do Controle?

Área da matemática que estuda sistemas dinâmicos cujo comportamento pode ser mudado por meio da aplicação de controles (atuadores).

Videogames?

Para entender o futuro, precisamos conhecer o passado...

Mesopotâmia



Grécia Antiga

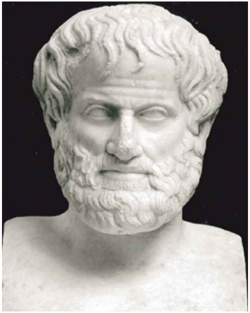
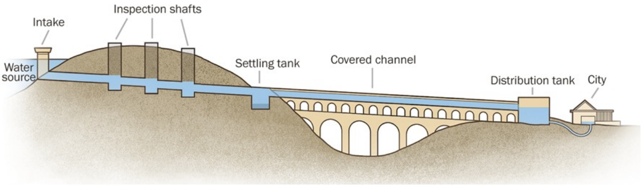


Figure: Aristoteles, IV a.C.

Se cada instrumento pudesse realizar seu próprio trabalho, obedecendo ou antecipando a vontade dos outros ... os homens não precisariam de servos nem de escravos.

Roma Antiga


Inspection shafts
Intake
Water source
Settling tank
Covered channel
Distribution tank
City

Revolução Industrial

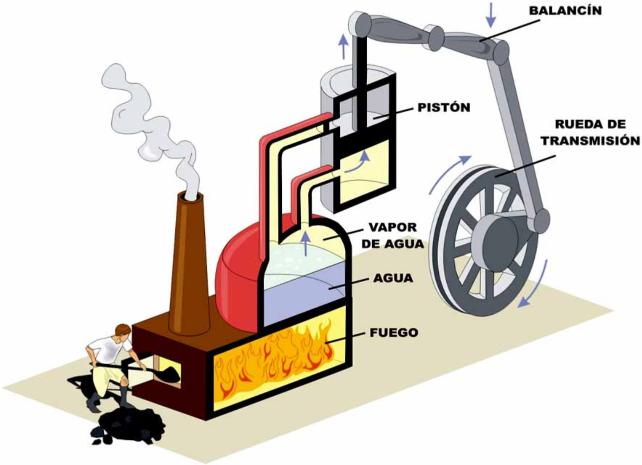


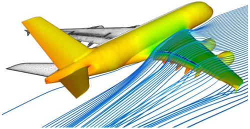
Figure: Máquina a vapor

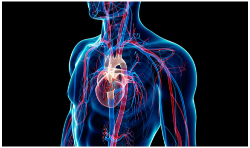
Atualmente, Teoria do Controle vai um pouco além...

Uma rica área da Matemática

Aplicações em Biologia, Medicina, Química, Engenharia, Física, etc.








Exemplos

- Um engenheiro pode controlar um sistema mecânico através de forças externas (video);
- Um economista pode agir sobre um equilíbrio financeiro por meio de taxas;
- um químico pode modificar um processo regulando a temperatura do experimento:
- um médico pode controlar ou curar doenças por meio de medicamentos:
- etc.

Vamos iniciar o minicurso?

De maneira abstrata, um sistema de controle é um sistema do tipo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = H(t, y, u),\ t > 0,\ y(t) \in Y,\ \ u \in \mathcal{U}_{ad}, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Aqui:

- y_0 é o dado inicial do sistema;
- $y = y(t)$ é o **estado** do sistema (variável que queremos controlar);
- u é o **controle** (que escolhemos para agir no sistema) ;
- Y é o **espaço de estado**;
- $\mathcal{U}_{ad}$ é o conjunto dos **controles admissíveis**.

Temos $y : [0, T] \to Y$.

Observação

A complexidade de um sistema de controle depende da complexidade dos conjuntos Y e U_{ad}, e sobretudo da natureza da equação (1).

De maneira abstrata, um sistema de controle é um sistema do tipo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = H(t, y, u), \ t > 0, \ y(t) \in Y, \ \ u \in \mathcal{U}_{ad}, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Aqui:

- y_0 é o dado inicial do sistema;
- $y = y(t)$ é o **estado** do sistema (variável que queremos controlar);
- u é o **controle** (que escolhemos para agir no sistema) ;
- Y é o **espaço de estado**;
- $\mathcal{U}_{ad}$ é o conjunto dos **controles admissíveis**.

Temos $y : [0, T] \to Y$.

Observação

A complexidade de um sistema de controle depende da complexidade dos conjuntos Y e U_{ad}, e sobretudo da natureza da equação (1).

Exemplo bobo

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $T > 0$ e consideremos a equação

$$\begin{cases} y' + \lambda y = u, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Aqui $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ e $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ são funções escalares.

Pergunta

Dados $y_T \in \mathbb{R}$, é possível construir u tal que $y(T) = y_T$?

R.: Sim. Para isso, basta tomar qualquer função suave y tal que $y(0) = y_0$ e $y(T) = y_T$.
Então basta tomar $u = y' + \lambda y$.

Exemplo bobo

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $T > 0$ e consideremos a equação

$$\begin{cases} y' + \lambda y = u, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Aqui $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ e $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ são funções escalares.

Pergunta

Dados $y_T \in \mathbb{R}$, é possível construir u tal que $y(T) = y_T$?

R.: Sim. Para isso, basta tomar qualquer função suave y tal que $y(0) = y_0$ e $y(T) = y_T$.
Então basta tomar $u = y' + \lambda y$.

Exemplo bobo

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $T > 0$ e consideremos a equação

$$\begin{cases} y' + \lambda y = u, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Aqui $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ e $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ são funções escalares.

Pergunta

Dados $y_T \in \mathbb{R}$, é possível construir u tal que $y(T) = y_T$?

R.: Sim. Para isso, basta tomar qualquer função suave y tal que $y(0) = y_0$ e $y(T) = y_T$.
Então basta tomar $u = y' + \lambda y$.

Locomotiva sobre um trilho retilíneo

Sejam $x_1(t) \in \mathbb{R}$ a posição sobre a via no instante t e $x_2(t) \in \mathbb{R}$ sua velocidade. Denotemos por $u(t) \in \mathbb{R}$ o comando caracterizado pela força desenvolvida pelas rodas motoras (geradas pelos pistões ou turbinas) sobre os trilhos. Se supormos que existe fricção dinâmica com o ar (e.g., quadrático na velocidade), podemos escrever (adimensionando):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}(t) = x_2(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt}(t) = u(t) - x_2(t)|x_2(t)|. \end{cases}$$

Se supormos que o motor está limitado, a força $u(t)$ deve estar compreendida entre $-u_{max}$ e u_{max}.

Controle de uma reação química

Seja A uma substância química que é adicionada a um tanque a uma taxa constante durante um certo tempo $T > 0$. Assuma que o valor x do pH no qual a reação ocorre determina a qualidade do produto final e que o valor do pH pode ser controlado modificando a força u de alguma componente de A.

Supondo que a reação ocorre de modo que a taxa de variação do valor x do pH é proporcional à soma do valor atual do pH e a força u do ingrediente controlado, i.e.,

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax + bu,$$

onde a e b são constantes positivas conhecidas.

Controle de uma reação química

Seja A uma substância química que é adicionada a um tanque a uma taxa constante durante um certo tempo $T > 0$. Assuma que o valor x do pH no qual a reação ocorre determina a qualidade do produto final e que o valor do pH pode ser controlado modificando a força u de alguma componente de A.

Supondo que a reação ocorre de modo que a taxa de variação do valor x do pH é proporcional à soma do valor atual do pH e a força u do ingrediente controlado, i.e.,

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax + bu,$$

onde a e b são constantes positivas conhecidas.

Suponha também que a diminuição no rendimento devido às variações no valor do pH é

$$\int_0^T x^2\, dt$$

e que o custo para manter a força u é proporcional a u^2.

Assim, o custo total associado ao controle $u(t)$ durante o tempo $0 \leq t \leq T$ é

$$C(u) = \int_0^T \left(dx^2 + u^2\right) dt,$$

onde $d > 0$ converte os dois custos à mesma unidade comum.

O problema matemático que queremos estudar é:

Especificado o valor inicial do pH, digamos $x(0)$, buscamos un controle $u^*(t)$ durante $0 \leq t \leq T$ que determina a resposta $x^*(t)$ de modo que o custo

$$C(u(t)) = \int_0^T \left(dx^2(t) + u^2(t)\right) dt$$

é mínimo.

Pêndulo

O problema da controlabilidade do pêndulo surge em muitas aplicações tecnológicas, em particular em robótica, onde o objetivo é controlar um *braço giratório* com um motor localizado em um extremo conectando o braço ao resto da estrutura.

Para modelar o sistema, assumimos que a massa total m do braço está localizado no extremo livre e que a barra tem comprimento unitário ($L = 1$).

Ignorando fricção, como consequência da lei de Newton, obtemos

$$m\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) = -mg\sin\theta(t) + v(t),$$

onde θ é o ângulo do braço com respeito ao eixo vertical medido no sentido anti-horário, g é a aceleração da gravidade e v é o *momento de torsão* externo aplicado.

O estado do sistema é $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$, enquanto v é o controle.

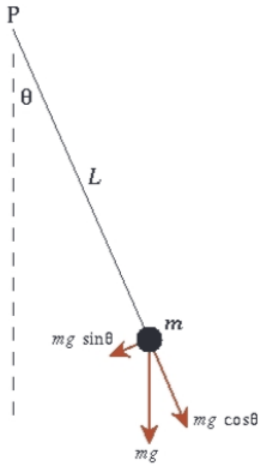
Para modelar o sistema, assumimos que a massa total m do braço está localizado no extremo livre e que a barra tem comprimento unitário ($L = 1$).

Ignorando fricção, como consequência da lei de Newton, obtemos

$$m \frac{d^2\theta}{dt^2}(t) = -mg \sin \theta(t) + v(t),$$

onde θ é o ângulo do braço com respeito ao eixo vertical medido no sentido anti-horário, g é a aceleração da gravidade e v é o *momento de torsão* externo aplicado.

O estado do sistema é $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$, enquanto v é o controle.


P
θ
L
m
mg sinθ
mg cosθ
mg

Assumindo $m = g = 1$, obtemos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + \sin\theta(t) = v(t).$$

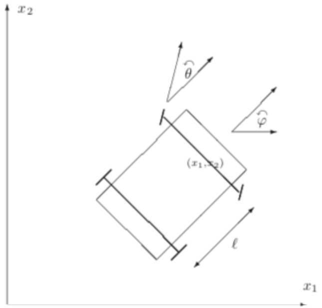
A posição vertical estacionária $(\theta = \pi, \dfrac{d\theta}{dt} = 0)$ é uma configuração de equilíbrio se não tivermos controle no sistema, i.e., $v \equiv 0$. Entretanto, essa configuraccção é claramente *instável* .

O objetivo aqui é entender como esta instabilidade pode ser compensada por meio da aplicação da força v.

Como estacionar um carro?

Consideraremos um modelo simplificado para o movimento de um automóvel.

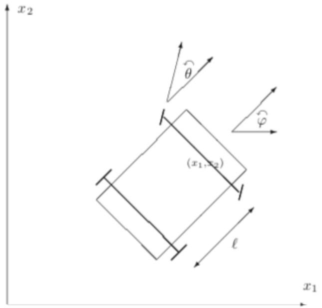
Nosso sistema será descrito por meio de quatro dados $(x_1, x_2, \varphi, \theta)$, onde (x_1, x_2) é a posição do centro do eixo dianteiro do carro, φ é o ângulo entre o eixo x_1 e o carro e θ o ângulo entre as rodas dianteiras e o carro.



Como estacionar um carro?

Consideraremos um modelo simplificado para o movimento de um automóvel.

Nosso sistema será descrito por meio de quatro dados $(x_1, x_2, \varphi, \theta)$, onde (x_1, x_2) é a posição do centro do eixo dianteiro do carro, φ é o ângulo entre o eixo x_1 e o carro e θ o ângulo entre as rodas dianteiras e o carro.



Como queremos modelar um carro e a forma de conduzi-lo, assumiremos que temos dois controles diponíveis u_1 e u_2, que são a velocidade com que se gira o volante e a velocidade do carro, respectivamente.

Como as rodas dianteiras são paralelas ao vetor $\big(\cos(\varphi+\theta), \sin(\varphi+\theta)\big)$, temos que o centro do eixo dianteiro (x_1, x_2) se move seguindo a orientação deste vetor.

A velocidade deste movimento estará dada pelo controle u_2, e podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

O deslocamento do eixo traseiro $(x_1 - l\cos\theta, x_2 - l\sin\theta)$ deve ser paralelo ao vetor $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, e assim temos a condição

$$\sin\varphi \frac{d}{dt}(x_1 - l\cos\theta) - \cos\varphi \frac{d}{dt}(x_2 - l\sin\theta) = 0. \tag{3}$$

Portanto, usando a identidade

$$\sin\theta = \sin\varphi\cos(\varphi+\theta) - \cos\varphi\sin(\varphi+\theta)$$

e, substituindo (3) em (4), obtemos

$$l\frac{d\varphi}{dt} - u_2\sin\theta = 0.$$

Também, pela definição do controle u_1, temos

$$\frac{d\theta}{dt} = u_1.$$

Sem perda de generalidade, assumimos $l = 1$.

Assim, nosso sistema de controle simplificado para a condução de um carro é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \theta) \\ \sin(\varphi + \theta) \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Suponha que no instante $t = 0$ o carro está estacionado na posição $(0, 0, 0, 0)$.

Vejamos o efeito da escolha de alguns controles.

• $u_1 = 1$ e $u_2 = 0$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(x_1, x_2, \varphi, \theta) = (0, 0, 0, 1) \Longrightarrow x_1(t) = x_2(t) = \varphi(t) = 0,\ \theta(t) = t.$$

Logo, podemos nos mover na direção $(0, 0, 0, 1)$, que pode ser interpretado simplesmente como girar o volante.

- $u_1 = 0$ e $u_2 = 1$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(x_1, x_2, \varphi, \theta) = (1, 0, 0, 0) \Longrightarrow x_1(t) = t,\ x_2(t) = \varphi(t) = \theta(t) = 0.$$

Logo, podemos nos mover na direção $(1, 0, 0, 0)$, que significa que podemos nos mover na direção definida por x_1.

Combinando os controles u_1 e u_2 obtemos outros movimentos para nosso carro.

• $u_1 = 0$ e $u_2 = 1$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(x_1, x_2, \varphi, \theta) = (1, 0, 0, 0) \Longrightarrow x_1(t) = t,\ x_2(t) = \varphi(t) = \theta(t) = 0.$$

Logo, podemos nos mover na direção $(1, 0, 0, 0)$, que significa que podemos nos mover na direção definida por x_1.

Combinando os controles u_1 e u_2 obtemos outros movimentos para nosso carro.

Pousando um foguete

Consideremos um foguete tentando pousar no solo e assuma o foguete como uma partícula.

Seja $x(t)$ a altitude e $y(t)$ a velocidade vertical. A altura inicial é assumida positiva, i.e., $x_0 > 0$ e a velocidade inicial negativa, i.e., $y_0 \leq 0$.
O controle v é a força gerada pelos motores e a equação do movimento é dada por:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = v(t) - g, \\ x(0) = x_0; \; y(0) = y_0. \end{cases}$$

Objetivo: Dado $T > 0$, encontrar v tal que $x(T) = y(T) = 0$.

Pousando um foguete

Consideremos um foguete tentando pousar no solo e assuma o foguete como uma partícula.

Seja $x(t)$ a altitude e $y(t)$ a velocidade vertical. A altura inicial é assumida positiva, i.e., $x_0 > 0$ e a velocidade inicial negativa, i.e., $y_0 \leq 0$.
O controle v é a força gerada pelos motores e a equação do movimento é dada por:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = v(t) - g, \\ x(0) = x_0; \; y(0) = y_0. \end{cases}$$

Objetivo: Dado $T > 0$, encontrar v tal que $x(T) = y(T) = 0$.

Pousando um foguete

Consideremos um foguete tentando pousar no solo e assuma o foguete como uma partícula.

Seja $x(t)$ a altitude e $y(t)$ a velocidade vertical. A altura inicial é assumida positiva, i.e., $x_0 > 0$ e a velocidade inicial negativa, i.e., $y_0 \leq 0$.
O controle v é a força gerada pelos motores e a equação do movimento é dada por:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = v(t) - g, \\ x(0) = x_0; \; y(0) = y_0. \end{cases}$$

Objetivo: Dado $T > 0$, encontrar v tal que $x(T) = y(T) = 0$.

Como fazer?

Podemos calcular explicitamente a solução do sistema:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t y(s)ds,$$

$$y(t) = y_0 - gt + \int_0^t v(s)ds.$$

Assim, temos

$$x(t) = x_0 + y_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \int_0^t v(s)(t-s)ds.$$

Portanto, dado $T > 0$, um controle será construído se e somente se:

$$\begin{cases} \int_0^T v(s)ds = gT + |y_0|, \\ \int_0^T v(s)s\,ds = \frac{1}{2}gT^2 + x_0. \end{cases} \tag{5}$$

Observação

Existe uma infinidade de soluções para o problema (5)*. Este é um problema do tipo momento!*

Como fazer?

Podemos calcular explicitamente a solução do sistema:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t y(s)ds,$$

$$y(t) = y_0 - gt + \int_0^t v(s)ds.$$

Assim, temos

$$x(t) = x_0 + y_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \int_0^t v(s)(t-s)ds.$$

Portanto, dado $T > 0$, um controle será construído se e somente se:

$$\begin{cases} \int_0^T v(s)ds = gT + |y_0|, \\ \int_0^T v(s)s\,ds = \frac{1}{2}gT^2 + x_0. \end{cases} \tag{5}$$

Observação

Existe uma infinidade de soluções para o problema (5)*. Este é um problema do tipo momento!*

Como fazer?

Podemos calcular explicitamente a solução do sistema:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t y(s)ds,$$
$$y(t) = y_0 - gt + \int_0^t v(s)ds.$$

Assim, temos

$$x(t) = x_0 + y_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \int_0^t v(s)(t-s)ds.$$

Portanto, dado $T > 0$, um controle será construído se e somente se:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T v(s)ds = gT + |y_0|, \\ \displaystyle\int_0^T v(s)sds = \frac{1}{2}gT^2 + x_0. \end{cases} \tag{5}$$

Observação

Existe uma infinidade de soluções para o problema (5)*. Este é um problema do tipo momento!*

Modo 1

Por exemplo, seja $T_0 \in (0, T)$ e $M > 0$. Busquemos

$$u(t) = \begin{cases} M, & \text{se } t < T_0 \\ 0, & \text{se } t \geq T_0 \end{cases}$$

Assim, de (5) temos

$$\begin{cases} MT_0 = gT + |y_0| \\ M\dfrac{T^2}{2} = \dfrac{1}{2}gT^2 + x_0 \end{cases}$$

donde

$$T_0 = \frac{gT^2 + 2x_0}{gT + |y_0|}; \quad M = \frac{(gT + |y_0|)^2}{gT^2 2 + 2x_0}.$$

Como $T_0 < T$ temos que $2x_0 \leq |y_0|T$. O que nos diz que se quisermos um controle como acima só é possível se o tempo T for suficientemente grande.

Modo 1

Por exemplo, seja $T_0 \in (0, T)$ e $M > 0$. Busquemos

$$u(t) = \begin{cases} M, & \text{se } t < T_0 \\ 0, & \text{se } t \geq T_0 \end{cases}$$

Assim, de (5) temos

$$\begin{cases} MT_0 = gT + |y_0| \\ M\dfrac{T^2}{2} = \dfrac{1}{2}gT^2 + x_0 \end{cases}$$

donde

$$T_0 = \frac{gT^2 + 2x_0}{gT + |y_0|}; \quad M = \frac{(gT + |y_0|)^2}{gT^2 2 + 2x_0}.$$

Como $T_0 < T$ temos que $2x_0 \leq |y_0|T$. O que nos diz que se quisermos um controle como acima só é possível se o tempo T for suficientemente grande.

Modo 2

Se quisermos um controle afim $u(t) = \alpha + \beta t$, para todo $t \in (0, T)$, obtemos

$$\begin{cases} \alpha T + \dfrac{\beta T^2}{2} = gT + |y_0| \\ \dfrac{\alpha T^2}{2} + \dfrac{\beta T^3}{3} = \dfrac{1}{2} g T^2 + x_0. \end{cases}$$

Assim,

$$\frac{\beta T^3}{12} = x_0 - \frac{T|y_0|}{2};$$

$$\frac{\alpha T^2}{8} = \frac{x_0}{4} + \frac{1}{8} g T^2 - y_0 + \frac{T|y_0|}{2}$$

e, portanto,

$$u(t) = \left(g + \frac{|y_0|}{T}\right) + \left(t - \frac{T}{2}\right)\left(\frac{12 x_0}{T^3} - \frac{6|y_0|}{T^2}\right).$$

Observação

Note que aqui não temos condição sobre T para obter uma solução matemática. Entretanto, note que

$$\max_{t \in [0,T]} |u(t)| \sim_{T \to 0} \frac{6 x_0}{T^2},$$

Obrigado!!!