Introdução à Controlabilidade de EDO's

Felipe W. Chaves-Silva

DM - UFPB

Escola de Verão em Matemática da UFPB - 2021

Equações Diferenciais Ordinárias

Estudaremos a controlabilidade de sistemas finito-dimensionais lineares do tipo

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \ t \in [0,T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

onde A é uma matriz real $n \times n$, B é uma matriz $n \times m$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ é a configuração inicial e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o controle.

Observação

Aqui, o estado (solução) $y : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tem n componentes e o controle $u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tem m componentes. Obviamentente, na prática, $m \leq n$.

Equações Diferenciais Ordinárias

Estudaremos a controlabilidade de sistemas finito-dimensionais lineares do tipo

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \ t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

onde A é uma matriz real $n \times n$, B é uma matriz $n \times m$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ é a configuração inicial e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o controle.

Observação

Aqui, o estado (solução) $y : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tem n componentes e o controle* $u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *tem m componentes. Obviamentente, na prática,* $m \leq n$.

Exemplos

Exemplo 1: $\begin{cases} y_1' = y_1 + u, \\ y_2' = y_2 \end{cases}$

Ou seja

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2: $x'' + x = u$

Temos

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x - u \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplos

Exemplo 1: $\begin{cases} y_1' = y_1 + u, \\ y_2' = y_2 \end{cases}$

Ou seja

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2: $x'' + x = u$

Temos

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x - u \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Antes de estudar o problema de controle, primeiramente precisamos relembrar como encontrar soluções de Equações Diferenciais Ordinárias.

Sistemas Lineares de EDO's

Considere o sistema linear de EDO's a coeficientes constantes:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n \\ y_1(0) = y_0^1, y_2(0) = y_0^2, \ldots, y_n(0) = y_0^n. \end{cases} \tag{2}$$

Ou seja, os coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$, os dados iniciais $y_0^j \in \mathbb{R}$ e

$$y_j : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$Caso\ n = 1$

Neste caso, temos a equação

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t), \ t \in [0, T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3}$$

com $a \in \mathbb{R}$.

Neste caso, é fácil ver que a solução da equação é dada por

$$y(t) = e^{at} y_0.$$

Caso $n = 1$

Neste caso, temos a equação

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t), \ t \in [0, T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3}$$

com $a \in \mathbb{R}$.

Neste caso, é fácil ver que a solução da equação é dada por

$$y(t) = e^{at} y_0.$$

No caso geral, podemos escrever o sistema na forma matricial

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \ t \in [0,T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

A solução da equação será dada por

$$y(t) = e^{tA} y_0,$$

contanto que possamos definir de maneira apropriada a (matriz) exponencial e^{tA} da matriz tA.

No caso geral, podemos escrever o sistema na forma matricial

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \; t \in [0,T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

A solução da equação será dada por

$$y(t) = e^{tA} y_0,$$

contanto que possamos definir de maneira apropriada a (matriz) exponencial e^{tA} da matriz tA.

Definição

Dada uma matriz real A $n \times n$, definimos a matriz e^A como sendo a matriz real $n \times n$ dada por

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^n}{k!}$$

Observação

Para mostrar que a série definindo e^A converge, precisamos introduzir normas adequadas no espaço das matrizes. Entretanto, computaremos a matriz exponencial ignorando essas questões sobre convergência.

Observação

No caso da matriz exponencial e^{tA}, temos

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

onde a série é localmente uniformemente convergente no tempo.

Definição

Dada uma matriz real A $n \times n$, definimos a matriz e^A como sendo a matriz real $n \times n$ dada por

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^n}{k!}$$

Observação

Para mostrar que a série definindo e^A converge, precisamos introduzir normas adequadas no espaço das matrizes. Entretanto, computaremos a matriz exponencial ignorando essas questões sobre convergência.

Observação

No caso da matriz exponencial e^{tA}, temos

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

onde a série é localmente uniformemente convergente no tempo.

Definição

Dada uma matriz real A $n \times n$, definimos a matriz e^A como sendo a matriz real $n \times n$ dada por

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^n}{k!}$$

Observação

Para mostrar que a série definindo e^A converge, precisamos introduzir normas adequadas no espaço das matrizes. Entretanto, computaremos a matriz exponencial ignorando essas questões sobre convergência.

Observação

No caso da matriz exponencial e^{tA}, temos

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

onde a série é localmente uniformemente convergente no tempo.

Propriedades da Matriz exponencial

- Se 0 é a matriz nula $n \times n$ e I a matriz identidade $n \times n$, temos $e^0 = I$.

- $\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{At}$.

- Se $AB = BA$ então $e^{A+B} = e^A e^B$. Também $e^A B = Be^A$.

- Se T é uma matriz invertível, temos $Te^A T^{-1} = e^{TAT^{-1}}$.

- O caso de matrizes diagonais é particularmente fácil:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Longrightarrow e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

- Se A é diagonalizável, i.e., existe uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que $A = PDP^{-1}$, então

$$e^A = Pe^D P^{-1}$$

Propriedades da Matriz exponencial

- Se 0 é a matriz nula $n \times n$ e I a matriz identidade $n \times n$, temos $e^0 = I$.

- $\dfrac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{At}$.

- Se $AB = BA$ então $e^{A+B} = e^A e^B$. Também $e^A B = Be^A$.

- Se T é uma matriz invertível, temos $Te^A T^{-1} = e^{TAT^{-1}}$.

- O caso de matrizes diagonais é particularmente fácil:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Longrightarrow e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

- Se A é diagonalizável, i.e., existe uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que $A = PDP^{-1}$, então

$$e^A = Pe^D P^{-1}$$

Propriedades da Matriz exponencial

- Se 0 é a matriz nula $n \times n$ e I a matriz identidade $n \times n$, temos $e^0 = I$.
- $\dfrac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{At}$.
- Se $AB = BA$ então $e^{A+B} = e^A e^B$. Também $e^A B = Be^A$.
- Se T é uma matriz invertível, temos $Te^A T^{-1} = e^{TAT^{-1}}$.
- O caso de matrizes diagonais é particularmente fácil:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Longrightarrow e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

- Se A é diagonalizável, i.e., existe uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que $A = PDP^{-1}$, então

$$e^A = Pe^D P^{-1}$$

Propriedades da Matriz exponencial

- Se 0 é a matriz nula $n \times n$ e I a matriz identidade $n \times n$, temos $e^0 = I$.
- $\dfrac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{At}$.
- Se $AB = BA$ então $e^{A+B} = e^A e^B$. Também $e^A B = Be^A$.
- Se T é uma matriz invertível, temos $Te^A T^{-1} = e^{TAT^{-1}}$.
- O caso de matrizes diagonais é particularmente fácil:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Longrightarrow e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

- Se A é diagonalizável, i.e., existe uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que $A = PDP^{-1}$, então

$$e^A = Pe^D P^{-1}$$

Propriedades da Matriz exponencial

- Se 0 é a matriz nula $n \times n$ e I a matriz identidade $n \times n$, temos $e^0 = I$.

- $\dfrac{d}{dt} e^{tA} = A e^{At}$.

- Se $AB = BA$ então $e^{A+B} = e^A e^B$. Também $e^A B = B e^A$.

- Se T é uma matriz invertível, temos $T e^A T^{-1} = e^{TAT^{-1}}$.

- O caso de matrizes diagonais é particularmente fácil:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Longrightarrow e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

- Se A é diagonalizável, i.e., existe uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que $A = PDP^{-1}$, então

$$e^A = P e^D P^{-1}$$

Propriedades da Matriz exponencial

- Se 0 é a matriz nula $n \times n$ e I a matriz identidade $n \times n$, temos $e^0 = I$.
- $\dfrac{d}{dt} e^{tA} = A e^{At}$.
- Se $AB = BA$ então $e^{A+B} = e^A e^B$. Também $e^A B = B e^A$.
- Se T é uma matriz invertível, temos $T e^A T^{-1} = e^{TAT^{-1}}$.
- O caso de matrizes diagonais é particularmente fácil:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Longrightarrow e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

- Se A é diagonalizável, i.e., existe uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que $A = PDP^{-1}$, então

$$e^A = P e^D P^{-1}$$

Teorema

A solução do problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = Ay(t),\ t \in [0,T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right. \tag{5}$$

é dada por

$$y(t) = e^{At} y_0.$$

Teorema

A solução do problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = Ay(t) + F(t),\ t \in [0,T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \tag{6}$$

com $F : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ *integável, é dada por*

$$y(t) = e^{At} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} F(s)\,ds, \qquad t \in [0,T]$$

onde a integração da função vetorial $e^{(t-s)A}F(s)$ *é feita entrada a entrada.*

Introdução

Lembramos que um sistema de controle é um sistema do tipo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = H(t, y, u), \ t > 0, \ y(t) \in Y, \ \ u \in \mathcal{U}_{ad}, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{7}$$

Onde

- y_0 é o dado inicial do sistema;
- $y = y(t)$ é o **estado** do sistema (variável que queremos controlar);
- u é o **controle** (que escolhemos para agir no sistema) ;
- Y é o **espaço de estado**;
- $\mathcal{U}_{ad}$ é o conjunto dos **controles admissíveis**.

Temos $y : [0, T] \to Y$.

Observação

A complexidade de um sistema de controle depende da complexidade dos conjuntos Y e U_{ad}, e sobretudo da natureza da equação (7)*.*

Introdução

Lembramos que um sistema de controle é um sistema do tipo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = H(t, y, u), \ t > 0, \ y(t) \in Y, \ \ u \in \mathcal{U}_{ad}, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{7}$$

Onde

- y_0 é o dado inicial do sistema;
- $y = y(t)$ é o **estado** do sistema (variável que queremos controlar);
- u é o **controle** (que escolhemos para agir no sistema) ;
- Y é o **espaço de estado**;
- $\mathcal{U}_{ad}$ é o conjunto dos **controles admissíveis**.

Temos $y : [0, T] \to Y$.

Observação

A complexidade de um sistema de controle depende da complexidade dos conjuntos Y e U_{ad}, e sobretudo da natureza da equação (7).

Diferentes noções de controlabilidade

Definition

Sistema (7) é **exatamente controlável** no tempo T se, para todo $y_0, y_T \in Y$, pudermos encontrar $u \in U_{ad}$ tal que a solução y de (7) satisfaz $y(T) = y_T$.

Definition

Sistema (7) é **aproximadamente controlável** no tempo T se, para todo $y_0, y_T \in Y$ e todo $\epsilon > 0$, pudermos encontrar $u \in U_{ad}$ tal que a solução y de (7) satisfaz:

$$||y(T) - y_T||_Y < \epsilon.$$

Definition

Sistema (7) é **controlável a zero** no tempo T se pudermos encontrar $u \in U_{ad}$ tal que a solução y de (7) satisfaz

$$y(T) = 0.$$

Diferentes noções de controlabilidade

Definition

Sistema (7) é **exatamente controlável** no tempo T se, para todo $y_0, y_T \in Y$, pudermos encontrar $u \in U_{ad}$ tal que a solução y de (7) satisfaz $y(T) = y_T$.

Definition

Sistema (7) é **aproximadamente controlável** no tempo T se, para todo $y_0, y_T \in Y$ e todo $\epsilon > 0$, pudermos encontrar $u \in U_{ad}$ tal que a solução y de (7) satisfaz:

$$||y(T) - y_T||_Y < \epsilon.$$

Definition

Sistema (7) é **controlável a zero** no tempo T se pudermos encontrar $u \in U_{ad}$ tal que a solução y de (7) satisfaz

$$y(T) = 0.$$

Diferentes noções de controlabilidade

Definition

Sistema (7) é **exatamente controlável** no tempo T se, para todo $y_0, y_T \in Y$, pudermos encontrar $u \in U_{ad}$ tal que a solução y de (7) satisfaz $y(T) = y_T$.

Definition

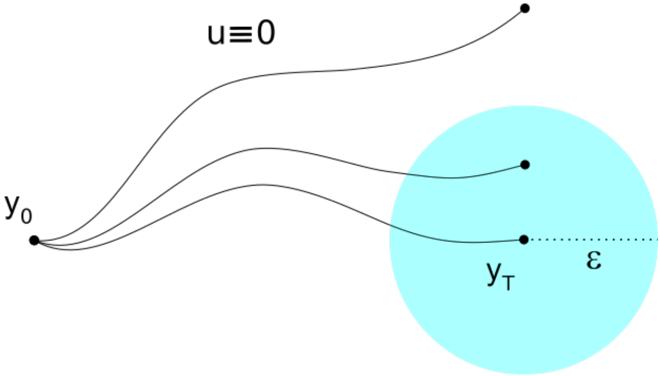
Sistema (7) é **aproximadamente controlável** no tempo T se, para todo $y_0, y_T \in Y$ e todo $\epsilon > 0$, pudermos encontrar $u \in U_{ad}$ tal que a solução y de (7) satisfaz:

$$||y(T) - y_T||_Y < \epsilon.$$

Definition

Sistema (7) é **controlável a zero** no tempo T se pudermos encontrar $u \in U_{ad}$ tal que a solução y de (7) satisfaz

$$y(T) = 0.$$



u≡0
y0
yT
ε

Definition

Sistema (7) é **controlável a trajetórias** no tempo T se, dado uma trajetória $\overline{y}$, i.e., dada uma solução (conhecida) de

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{y}}{dt}(t) = H(t, \overline{y}, \overline{u}), \\ \overline{y}(0) = \overline{y}_0 \end{cases}$$

pudermos encontrar $u \in U_{ad}$ tal que a solução y de (7) satisfaz

$$y(T) = \overline{y}(T).$$

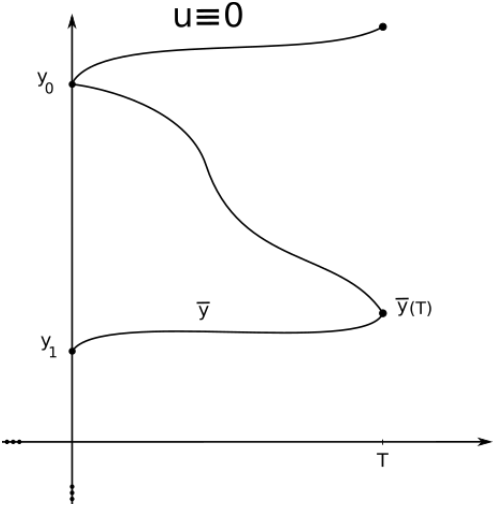
Observação

Temos

- $$\textit{Exatamente Controlável} \implies \textit{Aproximadamente Controlável};$$
- $$\textit{Exatamente Controlável} \implies \textit{Controlável a zero}.$$

Se o sistema (7) *for linear, temos*

$$\textit{Controlável a trajetórias} \implies \textit{Controlável a zero}.$$



u≡0
y0
y1
y
y(T)
T

Exemplo bobo

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $T > 0$ e consideremos a equação

$$\begin{cases} y' + \lambda y = u, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Aqui $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ e $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ são funções escalares.

Pergunta

Dados $y_T \in \mathbb{R}$, é possível construir u tal que $y(T) = y_T$?

R.: Sim. Para isso, basta tomar qualquer função suave y tal que $y(0) = y_0$ e $y(T) = y_T$.

Então basta tomar $u = y' + \lambda y$.

Exemplo bobo

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $T > 0$ e consideremos a equação

$$\begin{cases} y' + \lambda y = u, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Aqui $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ e $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ são funções escalares.

Pergunta

Dados $y_T \in \mathbb{R}$, é possível construir u tal que $y(T) = y_T$?

R.: Sim. Para isso, basta tomar qualquer função suave y tal que $y(0) = y_0$ e $y(T) = y_T$.

Então basta tomar $u = y' + \lambda y$.

Exemplo bobo

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $T > 0$ e consideremos a equação

$$\begin{cases} y' + \lambda y = u, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Aqui $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ e $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ são funções escalares.

Pergunta

Dados $y_T \in \mathbb{R}$, é possível construir u tal que $y(T) = y_T$?

R.: Sim. Para isso, basta tomar qualquer função suave y tal que $y(0) = y_0$ e $y(T) = y_T$.
Então basta tomar $u = y' + \lambda y$.

Controle de EDO's

Consideremos

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \ t \in [0,T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{8}$$

aqui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Observação

Aqui, $y : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tem n componentes e o controle $u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tem m componentes. Obviamente, $m \leq n$.

Observação

Assumimos que as matrizes A e B não dependem do tempo. Isto é somente para facilitar o entendimento.

Pela teoria de EDO's, temos que $y \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$ se $u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m)$. Na verdade, poderíamos até mesmo considerar $u \in L^1(0,T;\mathbb{R}^m)$.

Controle de EDO's

Consideremos

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \; t \in [0,T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{8}$$

aqui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Observação

Aqui, $y : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tem n componentes e o controle $u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tem m componentes. Obviamente, $m \leq n$.

Observação

Assumimos que as matrizes A e B não dependem do tempo. Isto é somente para facilitar o entendimento.

Pela teoria de EDO's, temos que $y \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$ se $u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m)$. Na verdade, poderíamos até mesmo considerar $u \in L^1(0,T;\mathbb{R}^m)$.

Controle de EDO's

Consideremos

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \ t \in [0, T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{8}$$

aqui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Observação

Aqui, $y : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tem n componentes e o controle $u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tem m componentes. Obviamente, $m \leq n$.

Observação

Assumimos que as matrizes A e B não dependem do tempo. Isto é somente para facilitar o entendimento.

Pela teoria de EDO's, temos que $y \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ se $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$. Na verdade, poderíamos até mesmo considerar $u \in L^1(0, T; \mathbb{R}^m)$.

Controle de EDO's

Consideremos

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \ t \in [0,T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{8}$$

aqui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Observação

Aqui, $y : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tem n componentes e o controle* $u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *tem m componentes. Obviamente,* $m \leq n$.

Observação

Assumimos que as matrizes A e B não dependem do tempo. Isto é somente para facilitar o entendimento.

Pela teoria de EDO's, temos que $y \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$ se $u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m)$. Na verdade, poderíamos até mesmo considerar $u \in L^1(0,T;\mathbb{R}^m)$.

Definição ($1 \leq p < +\infty$)

Definimos $L^p(0,T;\mathbb{R}^k)$ como sendo espaço (de Banach) das aplicações $u:(0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ fortemente mensuráveis e tal que $t \mapsto \|u(t)\|_{\mathbb{R}^k}^p$ é Lebesgue integrável em $(0,T)$.
Em $L^p(0,T;\mathbb{R}^k)$, definimos a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;\mathbb{R}^k)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_{\mathbb{R}^k}^p \, dt\right)^{1/p}.$$

Definição ($p = \infty$)

Definimos $L^\infty(0,T;\mathbb{R}^k)$ como sendo o espaço (de Banach) das aplicações $u:(0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ fortemente mensuráveis e tal que $t \mapsto \|u(t)\|_{\mathbb{R}^k}$ possui supremo essencial finito em $(0,T)$.
Em $L^\infty(0,T;\mathbb{R}^k)$, definimos a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^k)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_{\mathbb{R}^k}.$$

Definição ($1 \leq p < +\infty$)

Definimos $L^p(0,T;\mathbb{R}^k)$ como sendo espaço (de Banach) das aplicações $u:(0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ fortemente mensuráveis e tal que $t \mapsto \|u(t)\|^p_{\mathbb{R}^k}$ é Lebesgue integrável em $(0,T)$.

Em $L^p(0,T;\mathbb{R}^k)$, definimos a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;\mathbb{R}^k)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p_{\mathbb{R}^k}\, dt \right)^{1/p}.$$

Definição ($p = \infty$)

Definimos $L^\infty(0,T;\mathbb{R}^k)$ como sendo o espaço (de Banach) das aplicações $u:(0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ fortemente mensuráveis e tal que $t \mapsto \|u(t)\|_{\mathbb{R}^k}$ possui supremo essencial finito em $(0,T)$.

Em $L^\infty(0,T;\mathbb{R}^k)$, definimos a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^k)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_{\mathbb{R}^k}.$$

Dado $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e um controle u, temos pela fórmula de variação dos parâmetros:

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds,$$

em particular

$$y(T) = e^{TA}y_0 + \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s)ds,$$

Resolvente

Definição

Definimos o resolvente

$$R(t,s) = e^{(t-s)A}.$$

Assim, a solução pode ser escrita como

$$y(t) = R(t,0)y_0 + \int_0^t R(t,s)Bu(s)ds.$$

Temos as seguintes propriedades

- $R \in C([0,T] \times [0,T]; M_{n\times n}(\mathbb{R}))$;
- $R(t_0,t_0) = I_{n\times n}, \ \forall t_0 \in [0,T]$;
- $R(t_1,t_2)R(t_2,t_3) = R(t_1,t_3), \ \forall t_1,t_2,t_3 \in [0,T]$.

Também, dado $t_0 \in [0,T]$, temos que $R(t,t_0)$ é a (única!) solução de

$$\begin{cases} M'(t) = AM(t), \ t \in [0,T], \\ M(t_0) = I_{n\times n}, \end{cases}$$

Resolvente

Definição

Definimos o resolvente

$$R(t,s) = e^{(t-s)A}.$$

Assim, a solução pode ser escrita como

$$y(t) = R(t,0)y_0 + \int_0^t R(t,s)Bu(s)ds.$$

Temos as seguintes propriedades

- $R \in C([0,T] \times [0,T]; M_{n\times n}(\mathbb{R}))$;
- $R(t_0,t_0) = I_{n\times n}, \ \forall t_0 \in [0,T]$;
- $R(t_1,t_2)R(t_2,t_3) = R(t_1,t_3), \ \forall t_1,t_2,t_3 \in [0,T]$.

Também, dado $t_0 \in [0,T]$, temos que $R(t,t_0)$ é a (única!) solução de

$$\begin{cases} M'(t) = AM(t), \ t \in [0,T], \\ M(t_0) = I_{n\times n}, \end{cases}$$

Matriz Gramiana

Definição

Definimos a matriz Gramiana do sistema $y' = Ay + Bu$ *como sendo a matriz*

$$G := \int_0^T R(T,s)BB^*R(T,s)^*ds.$$

A matriz G *é uma matriz simétrica* $n \times n$.

Observação

Lembremos que se $M = (a_{ij})$ *com* $a_{ij} \in \mathbb{C}$ *então* $M^* = (\overline{a_{ji}})$, *ou seja* M^* *é a matriz transposta conjugada de* M.

Observação

A matriz Gramiana é não-negativa, i.e., para todo $x \in \mathbb{R}^n$ *temos*

$$x^*Gx = \int_0^T |B^*R(T,s)^*x|^2 ds.$$

Em particular, G *é invertível se e somente se existe* $c > 0$ *tal que*

$$x^*Gx \geq c|x|^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Matriz Gramiana

Definição

Definimos a matriz Gramiana do sistema $y' = Ay + Bu$ *como sendo a matriz*

$$G := \int_0^T R(T,s)BB^*R(T,s)^*ds.$$

A matriz G *é uma matriz simétrica* $n \times n$.

Observação

Lembremos que se $M = (a_{ij})$ *com* $a_{ij} \in \mathbb{C}$ *então* $M^* = (\overline{a_{ji}})$, *ou seja* M^* *é a matriz transposta conjugada de* M.

Observação

A matriz Gramiana é não-negativa, i.e., para todo $x \in \mathbb{R}^n$ *temos*

$$x^*Gx = \int_0^T |B^*R(T,s)^*x|^2 ds.$$

Em particular, G *é invertível se e somente se existe* $c > 0$ *tal que*

$$x^*Gx \geq c|x|^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Um critério de Controle

Teorema

Seja $T > 0$. O sistema $y' = Ay + Bu$ é exatamente controlável, com controle $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$, se e somente se, sua matriz Gramiana é invertível.

Prova: ($\Leftarrow$)

Suponha G invertível e $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$. Vamos levar y_0 a y_1 no tempo T.
Tome $\overline{u} \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$ dada por

$$\overline{u}(s) := B^* R(T, s)^* G^{-1}(y_1 - R(T, 0)y_0), \quad s \in (0, T).$$

Seja agora $\overline{y} \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ solução de

$$\begin{cases} \overline{y}'(t) = A\overline{y}(t) + B\overline{u}(t), \ t \in [0, T], \\ \overline{y}(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Um critério de Controle

Teorema

Seja $T > 0$. O sistema $y' = Ay + Bu$ é exatamente controlável, com controle $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$, se e somente se, sua matriz Gramiana é invertível.

Prova: $(\Leftarrow)$

Suponha G invertível e $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$. Vamos levar y_0 a y_1 no tempo T.
Tome $\overline{u} \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$ dada por

$$\overline{u}(s) := B^* R(T, s)^* G^{-1}(y_1 - R(T, 0)y_0), \quad s \in (0, T).$$

Seja agora $\overline{y} \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ solução de

$$\begin{cases} \overline{y}'(t) = A\overline{y}(t) + B\overline{u}(t), \ t \in [0, T], \\ \overline{y}(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Um critério de Controle

Teorema
Seja $T > 0$. O sistema $y' = Ay + Bu$ é exatamente controlável, com controle $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$, se e somente se, sua matriz Gramiana é invertível.

Prova: $(\Leftarrow)$

Suponha G invertível e $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$. Vamos levar y_0 a y_1 no tempo T.
Tome $\overline{u} \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$ dada por

$$\overline{u}(s) := B^* R(T, s)^* G^{-1}(y_1 - R(T, 0)y_0), \ \ s \in (0, T).$$

Seja agora $\overline{y} \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ solução de

$$\begin{cases} \overline{y}'(t) = A\overline{y}(t) + B\overline{u}(t), \ t \in [0, T], \\ \overline{y}(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned}\bar{y}(T) &= R(T,0)y_0 + \int_0^T R(T,s)BB^*R(T,s)^*G^{-1}(y_1 - R(T,0)y_0)ds \\ &= R(T,0)y_0 + y_1 - R(T,0)y_0 \\ &= y_1.\end{aligned}$$

Portanto, o sistema é exatamente controlável.

$(\Rightarrow)$
Assuma G não invertível. Assim, existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $Gx = 0$.

Em particular, $x^*Gx = 0$ e

$$\int_0^T x^*R(T,s)BB^*R(T,s)^*xds = 0$$

ou equivalentemente,

$$\int_0^T |B^*R(T,s)^*x|^2 ds = 0.$$

Portanto

$$x^*R(T,s)B = 0, \quad \forall s \in [0,T].$$

Af.: Existem y_0 e y_1 em $\mathbb{R}^n$ que não podemos levar de um ao outro.

Temos

$$\begin{aligned}\bar{y}(T) &= R(T,0)y_0 + \int_0^T R(T,s)BB^*R(T,s)^*G^{-1}(y_1 - R(T,0)y_0)ds \\ &= R(T,0)y_0 + y_1 - R(T,0)y_0 \\ &= y_1.\end{aligned}$$

Portanto, o sistema é exatamente controlável.

$(\Rightarrow)$
Assuma G não invertível. Assim, existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $Gx = 0$.

Em particular, $x^*Gx = 0$ e

$$\int_0^T x^*R(T,s)BB^*R(T,s)^*xds = 0$$

ou equivalentemente,

$$\int_0^T |B^*R(T,s)^*x|^2 ds = 0.$$

Portanto

$$x^*R(T,s)B = 0, \quad \forall s \in [0,T].$$

Af.: Existem y_0 e y_1 em $\mathbb{R}^n$ que não podemos levar de um ao outro.

Seja $u \in L^1(0,T;\mathbb{R}^m)$ e $y \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \ t \in [0,T], \\ y(0) = 0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

ou seja,

$$y(T) = \int_0^T R(T,s)Bu(s)ds.$$

Em particular, $x^* y(T) = 0$, e como $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, existe $y_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x^* y_1 \neq 0$ (e.g., $y_1 = x$).

Portanto, qualquer que seja o controle u, teremos $y(T) \neq y_1$.

Seja $u \in L^1(0,T;\mathbb{R}^m)$ e $y \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \ t \in [0,T], \\ y(0) = 0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

ou seja,

$$y(T) = \int_0^T R(T,s)Bu(s)ds.$$

Em particular, $x^* y(T) = 0$, e como $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, existe $y_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x^* y_1 \neq 0$ (e.g., $y_1 = x$).

Portanto, qualquer que seja o controle u, teremos $y(T) \neq y_1$.

O controle $\overline{u}$ construído no teorema anterior tem uma propriedade bastante interessante.

Teorema

Sejam $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$, *um controle* $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ *e* y *uma solução (controlada) de*

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \ t \in [0,T], \\ y(0) = y_0, \ \ y(T) = y_1. \end{cases}$$

Então

$$\int_0^T |\overline{u}(s)|^2 ds \leq \int_0^T |u(s)|^2 ds.$$

Isto é o controle construído tem norma mínima em $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$.

Prova: Seja $v = u - \overline{u}$. Temos

$$\int_0^T R(T,s)Bv(s)ds = \int_0^T R(T,s)Bu(s)ds - \int_0^T R(T,s)B\overline{u}(s)ds$$
$$= y(T) - R(T,0)y(0) - (\overline{y}(T) - R(T,0)\overline{y}(0)).$$

Assim,

$$\int_0^T R(T,s)Bv(s)ds = (y_1 - R(T,0)y_0) - (y_1 - R(T,0)y_0) = 0.$$

Logo,

$$\int_0^T |u(s)|^2 ds = \int_0^T |\overline{u}(s)|^2 ds + \int_0^T |v(s)|^2 ds + 2\int_0^T \overline{u}(s)v(s)ds. \tag{9}$$

Agora, como $G^* = G$, temos

$$\int_0^T \overline{u}(s)v(s)ds = (y_1 - R(T,0)y_0)^* G^{-1} \int_0^T R(T,s)Bv(s)ds,$$

donde

$$\int_0^T \overline{u}(s)v(s)ds = 0.$$

Portanto o resultado segue de (9).

Exemplo

Consideremos o sistema de controle:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = u(t). \end{cases}$$

Temos
$R(T,s) = \begin{pmatrix} 1 & T-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall s \in [0,T]$.
Além disso

$$G = \begin{pmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{pmatrix} \text{ e } G^{-1} = \tfrac{12}{T^3} \begin{pmatrix} 1 & -T/2 \\ -T/2 & T^2/3 \end{pmatrix}.$$

Se $(x_1,x_2)(0) = (-1,0)$ e $(x_1,x_2)(T) = (0,0)$, então $\overline{u}(t) = -\frac{12}{T^3}(t - T/2)$.
Também

$$x_1(t) = -1 - \frac{12}{T^3}(\frac{t^3}{6} - \frac{T}{4}t^2)$$

e

$$x_2(t) = -\frac{12}{T^3}(\frac{t^2}{2} - \frac{T}{2}t),$$