EBED - Escola Brasileira de Equações Diferenciais
UFPB - Universidade Federal do Paraíba
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Agosto 2011

SOBRE UMA EQUAÇÃO DO TIPO BENJAMIN BONA MAHONY DE SEGUNDA ORDEM EM DOMÍNIO NÃO CILÍNDRICO

CHRISTIAN MANUEL SURCO CHUÑO* & JUAN BAUTISTA LIMACO FERREL †

Suponha que $\Omega_s = O \cap \{t = s\}$; $s \in \mathbb{R}$ são conjuntos abertos não vazios limitados com fronteiras Γ_s. Fixemos o intervalo $]0, t[$ em $\mathbb{R}$ e consideremos el domínio não cilíndrico

$$\widehat{Q} = \bigcup_{0 \leq s \leq t} \Omega \times \{s\}$$

consideremos então o seguinte problema misto

$$u_t(x,t) + A(u_t(x,t)) + div(\phi(u(x,t))) = 0 \ \ em \ \widehat{Q}$$
$$u(x,t) = 0 \ em \ \widehat{\Sigma} = \bigcup_{0 \leq s \leq t} \Gamma_s \times \{s\}$$
$$u(x,0) = u_0(x) \ em \ \Omega_0$$

onde $Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j})$ é um operador de segunda ordem e $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \geq c_0(\xi_1^2 + ... + \xi_n^2) \ \text{ para todo } \ \xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{R}.$$

Uma solução fraca do problema é uma função $u : \widehat{Q} \to \mathbb{R}$ na clase $u, u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t))$ para $T > 0$, onde u satisfaz

$$\int_{\widehat{Q}} u_t(x,t)\theta(x,t)dxdt + \int_{\widehat{Q}} a_{i,j}(x,t)\frac{\partial u_t(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x_j}dxdt - \int_{\widehat{Q}} \phi(u(x,t))\nabla\theta(x,t)dxdt = 0$$

para todo $\theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_t))$ e tal que $u(x,0) = u_0(x)$ em Ω_0.
Suponha agora que $i)$ $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ com $\phi(s) = (\phi_1(s), ..., \phi_n(s))$ e $\phi(0) = 0$, $ii)$ $|\phi_i(s)| \leq \zeta(|s| + |s|^2)$, $iii)$ $|\phi_i'(s)| \leq \Lambda(1 + |s|)$, $iv)$ Se $t_1 \leq t_2$ então $\text{proj}|_{t=0}\Omega_{t_1} \subseteq \text{proj}|_{t=0}\Omega_{t_2}$ e $v)$ Se $v \in H_0^1(\Omega)$ e $v(x,t) = 0$ para todo $x \in \Omega - \Omega_0$ então $v \in H_0^1(\Omega_t)$ para todo $t \in [0, T]$.

Teorema 0.1. *Suponha $u_0 \in H_0^1(\Omega_0)$ e que as hipóteses dadas anteriormente sejam satisfeitas. Então existe uma única função real u definida em $\widehat{Q}$ solução fraca do problema misto.*

Prova: Para mostrar a existência de solução de nosso problema misto utilizaremos o metodo de penalização e Faedo- Galerkin.
A unicidade é similiar a demonstração em [1].

Referências

[1] J. Límaco, H.R. Clark, L.A. Medeiros, *Remarks on equations of Benjamin-Bona-Mahony type*, J. Math. Anal. Appl. 328(2007) 1117-1140.
[2] J.L. Lions- *Une remarque sur les problème d'évolution non linéaires dans des domaines non cylindriques*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 9(1964) 11-18.

*Instituição ... , ICMC, SP, Brasil, csurco@usp.com.br
†Instituição ..., UFF, RJ, Brasil, jlimaco@vm.uff.br ...