

DETERMINAÇÃO DAS REGIÕES DE ESTABILIDADE DE UM MODELO DE DINÂMICA DE POPULAÇÕES

ARTUR C. FASSONI* & LUCY T. TAKAHASHI†

A determinação das regiões de estabilidade (ou bacias de atração) dos pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis de um sistema autônomo de EDO's é de suma importância para o estudo qualitativo do fenômeno que o sistema modela [1]. Sob certas hipóteses, a fronteira de tais regiões é constituída das variedades estáveis de pontos de equilíbrio que estejam naquela fronteira [2]. Quando o sistema de EDO's descreve um sistema biológico, estas previsões a respeito das condições iniciais e dos parâmetros do sistema é muito importante por causa do significado biológico do ponto de equilíbrio. Se, por exemplo, este ponto representa a extinção de uma espécie que deve ser preservada, então procura-se garantir que as condições iniciais não estejam na região de estabilidade do mesmo e estuda-se estratégias de controle sobre os parâmetros do sistema para que a região de estabilidade do ponto diminua, o que aumentará as chances de uma condição inicial não levar a extinção da espécie.

Portanto, neste trabalho propomos e utilizamos um método para a determinação da variedade estável de um ponto hiperbólico. O método consiste da junção de dois já existentes. O primeiro deles trata da resolução, utilizando aproximações sucessivas, de uma equação integral cuja solução é uma parametrização local da variedade estável de um equilíbrio hiperbólico [3]. Tendo esta expressão local, utiliza-se o método da trajetória reversa para determinar globalmente a variedade estável daquele equilíbrio.

Aplicamos o método a um modelo clássico de dinâmica populacional [4], que é um dos primeiros onde ocorre biestabilidade. O modelo descreve a dinâmica de duas espécies competindo entre si em um habitat com recursos limitados. Sob competição forte, o sistema possui dois equilíbrios assintoticamente estáveis, que correspondem cada um à extinção de uma das espécies, e também um ponto de sela e um repulsor. A variedade estável global deste ponto de sela é a fronteira das bacias de atração dos dois equilíbrios estáveis. Obtivemos esta variedade estável para diferentes valores dos parâmetros e estudamos a influência dos mesmos sobre esta variedade. Quanto maior é a taxa de competição interespecífica de uma espécie, maior é a região de estabilidade que corresponde a predominância da mesma. Ainda, a taxa de reprodução relativa das espécies influencia na concavidade da variedade estável, o que mostrou que, para uma espécie que começa com poucos indivíduos no habitat, é vantajoso que sua taxa de reprodução seja maior que a da outra espécie; ao contrário, se uma espécie começa com um grande número de indivíduos, é vantajoso que sua taxa de reprodução seja menor que a da outra espécie. Para o caso particular no qual as taxas de reprodução são iguais, mostramos analiticamente que a expressão local obtida pelas aproximações sucessivas vale globalmente, fornecendo assim, uma fórmula para a separatriz das bacias em função dos parâmetros do sistema.

Referências

- [1] R. M. MAY, *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton University Press, Princeton, 1973.
- [2] H.D. CHIANG, M. W. HIRSCH, AND F. F. WU, Stability region of nonlinear autonomous dynamical systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **33**(1):16-27, January 1988.
- [3] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 3rd ed., 2001.
- [4] J. D. MURRAY, *Mathematical Biology I: An Introduction*, Springer, New York, 2002.

*Universidade Federal de Viçosa, MG, Brasil, fassoni2@gmail.com

†Universidade Federal de Viçosa, MG, Brasil, ltiemi@ufv.br