EBED - Escola Brasileira de Equações Diferenciais
UFPB - Universidade Federal do Paraíba
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Agosto 2011

Equações Características e Comportamento Assintótico para EDF

Miguel Frasson*

1 Introdução e resultados

Consideramos Equações Diferenciais Funcionais retardadas lineares não autônomas, cuja forma geral do problema de valor inicial é

$$\dot{x}(t) = L(t)x_t, \qquad x_{t_o} = \varphi. \tag{1.1}$$

Para a teoria geral destas equações, ver [HL]. Para notações, ver [F1,CF]. Usando a representação de Riesz, escrevemos $L(t)$ em termos de uma integral de Riemann-Stieltjes da forma $L\varphi = \int_0^r d\eta(\theta)\varphi(-\theta)$.

Para equações autônomas, em que se obtem uma equação característica, em [VL] encontramos resultados de comportamento assintótico obtidos pelo conhecimento de um autovalor dominante, isto é, um autovalor λ_d tal que $\exists\epsilon > 0$ tal que para todo outro autovalor λ, temos $\Re\lambda_d > \Re\lambda + \epsilon$.

Para EDF escalares, cuja equação característica é

$$z - \int_0^1 e^{-z\theta} d\eta(\theta) = 0, \tag{1.2}$$

apresentamos resultados sobre condições suficientes para determinar a dominância de autovalores.

Teorema 1.1 ([F2, Teo. 1 e 4])**.** *Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um zero de (1.2). Suponha que $\int_0^1 \theta|e^{-\lambda\theta}|\, d\eta_T(\theta) < 1$, onde η_T denota a variação total de η. Então λ é um autovalor simples e dominante de (1.2).*

Para cada solução $x(t)$ do PVI (1.1)*, o comportamento assintótico de x é dado por*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_d t}x(t) = \big(\varphi(0) + \int_0^1 \big[\int_0^\tau e^{-\lambda\sigma}\varphi(\sigma-\tau)d\sigma\big]d\eta(\tau)\big) \;/\; \big(1 + \lambda + \int_0^1 \theta e^{-\lambda\theta}\, d\eta(\theta)\big).$$

Para EDF escalares não autônomas, usamos o conceito de *equações características generalizadas*, ver [CF]. A equação característica generalizada para (1.1) é

$$\lambda(t) = \int_0^1 \exp\big(-\int_{t-\theta}^t \lambda(s)ds\big) d_\theta\eta(t,\theta). \tag{1.3}$$

Teorema 1.2 ([CF])**.** *Suponha $\lambda(t)$ solução de* (1.3) *tal que* $\limsup_{t\to\infty}\int_0^r \theta|e^{-\int_{t-\theta}^t \lambda(s)ds}|d_\theta\eta_T(t,\theta) < 1$. *Então para toda solução x de* (1.1)*, temos que* $\exists \lim_{t\to\infty} x(t)e^{-\int_{t_0}^t \lambda(s)ds}$ *e* $\lim_{t\to\infty}\big[x(t)e^{-\int_{t_0}^t \lambda(s)ds}\big]' = 0$.

Referências

[CF] Cuevas & Frasson, *Asymptotic properties of solutions to linear nonautonomous delay differential equations through generalized characteristic equations*, Electron. J. Diff. Equ., (2010).

[F1] Frasson, *Large time behaviour for functional differential equations with dominant eigenvalues of arbitrary order*, J. Math. Anal. Appl. 360 (2009).

[F2] Frasson, *On the dominance of roots of characteristic equations for neutral functional differential equations.* AMC 214 (2009).

[HL] Hale & Verduyn Lunel, *Introduction to Functional-Differential Equations*, Springer-Verlag (1993).

[VL] Verduyn Lunel, *Spectral theory for neutral delay equations with applications to control and stabilization*, IMA Vol. Math. Appl, vol. 134, Springer (2003).

*ICMC/USP, São Carlos, SP, Brasil, frasson@icmc.usp.br