EBED - Escola Brasileira de Equações Diferenciais
UFPB - Universidade Federal do Paraíba
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Agosto 2011

REGULARIDADE E PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS EM PROBLEMAS VARIACIONAIS COM FRONTEIRAS LIVRES

EDUARDO V. TEIXEIRA* & RAIMUNDO A. LEITÃO†

Estudamos as propriedades geométricas e de suavidade de mínimos não-negativos de funcionais da forma geral

$$\int_{\Omega} \left[F\left(x, u, \nabla u\right) + Q\left(x\right) \chi_{\{u>0\}} \right] dx, \tag{0.1}$$

sob $\mathcal{K} = \left\{ u \in W^{1,p}\left(\Omega\right) : u - \varphi \in W_0^{1,p}\left(\Omega\right) \right\}$ onde $\varphi \in W^{1,p}\left(\Omega\right)$ é não-negativa, $1 < p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. As condições mínimas são:

1. $F\left(\cdot, \cdot, \xi\right)$ é lipschitz.
2. F é p-degenerada em ξ, isto é, $\nabla_{\xi} F\left(\cdot, \cdot, \xi\right) \cdot \xi \sim |\xi|^p$.
3. Q é β-Hölder contínua e $0 < c \leq Q \leq C$.

O problema acima é inspirado pela teoria geométrica de Alt e Caffarelli; entretanto a equação de Euler-Lagrange associada é p-degenerada e não-homogênea. Nosso estudo fornece uma solução variacional à problemas de cavidade ou do tipo Bernoulli para operadores degenerados e não-homogêneos. Em forma simplificada, procura-se uma função $u \geq 0$, com dado de fronteira φ prescrito, satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \nabla \cdot a(x, \nabla u) & = & f(x), & \{u > 0\} \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} & = & \tilde{Q}(x), & \partial\{u > 0\}, \end{array} \right.$$

onde ν é o vetor normal exterior à $\partial\{u > 0\}$ e $f \in L^q$ para $q > n$. O termo não-homogêneo f apresenta diversas dificuldades técnicas ao problema e novas estratégias são desenvolvidas na elaboração do projeto.

Mostramos existência, estimativa gradiente e não-degenerescência de mínimos para o funcional (0.1). Tais resultados são ótimos. Em adição, desenvolvemos um estudo detalhado sobre a fronteira livre, $\partial\{u > 0\}$. Em particular provamos que a menos de um conjunto de medida de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-1}$ zero, a fronteira livre é uma superfície de classe $C^{1,\alpha}$.

Referências

[1] ALT, H. W., CAFFARELLI, Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. *J. Reine Angew. Math.*, **325**, (1981), 105–144.
[2] DANIELLI, D., PETROSYAN, A minimum problem with free boundary for a degenerate quasilinear operator, *Calc. Var. and PDEs*, **23**, 97-124, 2005.

*departamento de matemática, UFC, CE, Brasil, eteixeira@ufc.br
†departamento de matemática, UFC, CE, Brasil, juniormatufc@yahoo.br