EBED - Escola Brasileira de Equações Diferenciais
UFPB - Universidade Federal do Paraíba
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Agosto 2011

DESIGUALDADES DE HARNACK PARA SISTEMAS ELÍPTICOS

CHRYSTIAN JORGE DA MATA*

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $\delta_\Omega(x)$ a distância de $x \in \Omega$ à fronteira $\partial\Omega$ de Ω. Pela teoria clássica do potencial [1], para cada função superharmônica u em Ω, existe uma única medida μ_u em Ω tal que

$$\int_\Omega \phi(x)d\mu_u(x) = -\int_\Omega u(x)\Delta\phi(x)dx\,,$$

para toda função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. A medida μ_u chama-se medida de Riesz associada à função u. Se μ_u é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue e $d\mu_u = f_u(x)dx$, onde f_u é uma função não negativa e localmente integrável em Ω, então dizemos que f_u é a função de Riesz associada a função superharmônica u. Note que, da fórmula integral de Poisson, toda função harmônica positiva v definida na bola unitária $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ satisfaz

$$\frac{v(0)}{2^n}\delta_B(x) \le v(x) \le 2v(0)\delta_B(x)^{1-n}\,, \tag{0.1}$$

para todo $x \in B(0,1)$. Uma questão que surge aqui é a seguinte: As estimativas em (0.1) podem ser obtidas para funções superharmônicas positivas definidas num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$?
Em [3], K. Hirata mostra que a desigualdade inferior em (0.1) é obtida para qualquer função superharmônica definida num domínio Ω limitado de classe $C^{1,1}$ em $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$. Entretanto, a estimativa superior em (0.1) não é verdadeira, em geral. Assim, K. Hirata estuda as funções superharmônicas positivas u tais que as suas funções de Riesz associadas f_u satisfazem a seguinte desigualdade não-linear:

$$0 \le f_u \le c\delta_\Omega(x)^{-\alpha}u^p\,, \text{em quase todo ponto } x \in \Omega\,, \tag{0.2}$$

onde $c > 0$, $\alpha \ge 0$ e $p > 0$ são constantes.

Considere agora m funções contínuas, positivas e p-homogêneas $F_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $m \ge 1$. Neste trabalho, estudamos as aplicações $U : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $U = (u_1, ..., u_m)$, que são soluções do seguinte sistema de inequações

$$0 \le f_{u_i} \le \delta_\Omega(x)^{-\alpha}F_i(u_1, ..., u_m)\,, \tag{0.3}$$

onde $\alpha \ge 0$ é uma constante e que cada coordenada u_i é uma função superharmônica positiva. Estudamos também as aplicações $U : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $U = (u_1, ..., u_m)$, que são soluções do seguinte sistema de inequações

$$0 \le f_{u_i} \le \delta_\Omega(x)^{-\alpha}\partial_i F(u_1, ..., u_m)\,, \tag{0.4}$$

onde $\alpha \ge 0$ é uma constante, $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1, positiva e $(p+1)$-homogênea e que a função $|U| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_m^2}$ não se anula em ponto algum, é superharmônica e $f_{|U|} \ge 0$.

Estendemos as desigualdades de Harnack obtidas por K. Hirata em [3] para este contexto, um pouco mais geral, de sistemas elípticos não-lineares.

Referências

[1] D. H. ARMITAGE AND S. J. GARDINER, *Classical Potential Theory*, Springer, London (2001).
[2] D. GILBARG AND N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin (2001).
[3] K. HIRATA, The boundary growth of superharmonic functions and positive solutions of nonlinear elliptic equations, *Math. Ann.*, **340**, 625-645, 2008.

*Departamento de Matemática ,UFMG, BH, Brasil, kiucabelo@yahoo.com.br