Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Existência de solução para uma classe de desigualdades variacionais com crescimento crítico em $\mathbb{R}^N$

por

Luciano Martins Barros

Campina Grande - PB
Fevereiro/2018

Existência de solução para uma classe de desigualdades variacionais com crescimento crítico em $\mathbb{R}^N$

por

Luciano Martins Barros

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Campina Grande - PB

Fevereiro/2018

Universidade Federal da Paraíba

Universidade Federal de Campina Grande

Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática

Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em:

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB

Prof. Dr. Cesar Enrique Torres Ledesma - Universidade Nacional de Trujillo

---

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG

Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso - UFS

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Resumo

Nesta tese estabelecemos resultados de existência para uma classe de desigualdades variacionais com crescimento crítico: encontrar $u \in \mathbb{K}$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla(v-u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda V(x))u(v-u)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(v-u)\, dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \qquad (P)$$

onde

$$\mathbb{K} = \{v \in E;\ v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

E subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto conexo limitado com fronteira suave, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\lambda > 0$ é um parâmetro, V é um potencial contínuo e f é uma função contínua que muda conforme $N \geq 3$ e $N = 2$. No Capítulo 1, mostramos a existência de solução para uma igualdade com $N \geq 3$. No Capítulo 2, estabelecemos resultados de existência para a desigualdade variacional (P) em ambos os casos, $N \geq 3$ e $N = 2$. Finalmente, no Capítulo 3, provamos a existência de solução para a desigualdade variacional (P) em ambos casos, mas enfraquecendo uma hipótese sobre o potencial V. Entre as ferramentas utilizadas estão o Método Variacional, o Princípio de Concentração e Compacidade e o Método de Penalização.

Palavras-chave: Desigualdades Variacionais; Métodos Variacionais; Crescimento Crítico; Operador de Penalização.

Abstract

In this thesis we establish results of existence for a class of variational inequalities with critical growth: find $u \in \mathbb{K}$ satisfying

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v-u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda V(x))u(v-u)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(v-u)\, dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \qquad (P)$$

where

$$\mathbb{K} = \{v \in E;\ v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

E subespace of $H^1(\mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded conexo open with smooth boundary, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\lambda > 0$ is a parameter, V is a continuous potential and f is a continuous function that changes according to $N \geq 3$ and $N = 2$. In Chapter 1, we show the existence of a solution for equality with $N \geq 3$. In Chapter 2, we establish existence results for the variational inequality (P) in both cases, $N \geq 3$ and $N = 2$. Finally, in Chapter 3, we prove the existence of solution to the variational inequality (P) in both cases, but with a more weaker condition on V. Among the tools used are the Variational Method, the Principle of Concentration and Compaction and the Method of Penalization.

Keywords: Variational Inequalities; Variational Methods; Critical Growth; Penalty Operator.

Agradecimentos

Primeiramente, à DEUS por está sempre presente em todos os momentos de minha vida, me fortaleceu e me deu coragem para recomeçar quando a razão pedia para desistir. Palavras não são suficientes para agradecer pelo bem que tens feito a mim. Por isso a ELE seja dada toda honra, glória e louvor.

À minha esposa Sânzia Raline e ao meu filhão Luan Max pelo amor, carinho, dedicação e por terem suportado muitas vezes minha ausência. AMO VOCÊS!

À minha mãe Gessy e ao meu pai Sebastião por terem me conduzido no caminho certo e por acreditarem em mim mais que eu mesmo. Mãe pode ter certeza que o nosso maravilhoso DEUS escuta suas orações.

Ao meu orientador Professor Claudianor Oliveira Alves por ter me dado a honra de ser seu orientando. Pela paciência, dedicação, atenção, ensinamentos durante todo esse caminho. Por fim, agradeço pelo excelente trabalho de orientação e pela contribuição para meu desenvolvimento intelectual, social e espiritual.

Ao meu irmão Geilson Germano, minha gratidão por está presente em muitos momentos do doutorado, dando-me força, auxiliando-me, compreendendo-me e fortalecendo-me em horas difíceis. Te desejo muito sucesso na sua vida.

Aos meus amigos Jogli Gidel e Fábio Reis por me acolherem no apartamento. Compartilhamos de muitos momentos alegres e divertidos. Não posso esquecer Jogli pela força que me deu no início do doutorado, principalmente, no verão em João Pessoa.

Aos meus colegas do doutorado, principalmente, Ronaldo, Romildo, Alânio, Natan, Rivaldo e Cládio agradeço as experiências compartilhadas.

Aos meus colegas de trabalho Maria de Jesus, Jussiê Ubaldo, Marciel Medeiros e Joseclécio Dutra pela amizade e incentivo.

Aos professores Cesar Enrique, Jefferson Abrantes, José Anderson e Uberlandio Severo pela disponibilidade em me avaliarem e fazerem parte da banca.

Aos professores da pós-graduação da UAME-UFCG, especialmente, Marco Aurélio e Brandão que contribuíram para a formação do meu conhecimento.

Aos funcionários da UAME-UFCG, principalmente, Renato, Aninha, Gislaine e Andressa sempre dispostos a ajudarem, acessíveis, alegres e responsáveis. Os funcionários Davi e Sóstenes por momentos de descontração.

Aos pais de Geilson o senhor Germano e a dona Cícera e sua avó a dona Luiza agradeço pela amizade e carinho. Vocês são pessoas maravilhosas.

À todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta pela realização deste trabalho.

"Aos homens isto é impossível, mas a DEUS tudo é possível."

Mt. 19:26

Dedicatória

Aos meus pais Gessy e Sebastião, meus amores Sânzia Raline e Luan Max.

Sumário

Introdução

O objetivo da presente tese é estudar a existência de soluções para a seguinte classe de Desigualdades Variacionais: encontrar $u \in \mathbb{K}$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v-u)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda V(x))u(v-u)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(v-u)\,dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \qquad (P)$$

onde

$$\mathbb{K} = \{v \in E;\ v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

E subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com parte positiva não trivial e $supp\,\varphi^+ \subset \Omega$, $\lambda > 0$ é um parâmetro e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando as seguintes condições:

(V_1) $V(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N$;

(V_2) $\Omega := int(V^{-1}(\{0\})) \neq \emptyset$ é um subconjunto aberto conexo limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave;

(V_3) Existe $M_0 > 0$ tal que o conjunto $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M_0\}$ é não vazio e tem medida finita.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui as seguintes condições: Se $N \geq 3$, f tem a forma

$$f(t) = \mu |t|^{q-2}t + |t|^{2^*-2}t,$$

onde μ é uma constante positiva, $2^* = 2N/(N-2)$ e $2 < q < 2^*$.

Se $N = 2$, f é uma função de classe C^1 e tem crescimento crítico exponencial, isto é, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} 0, & \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \alpha < \alpha_0. \end{cases} \qquad \text{(veja Figueiredo, Miyagaki \& Ruf [28])}$$

Desigualdades Variacionais são consideradas, hoje, com uma das importantes direções do desenvolvimento atual das equações diferenciais parciais e com uma abundante quantidade de aplicações em vários ramos da ciência. Nos últimos anos, várias ideias, técnicas e métodos tem sido desenvolvidos e devido a estes esforços levaram a soluções de problemas básicos e fundamentais que antes pensaram ser inacessíveis. Esta teoria é relativamente nova e tem desfrutado de um crescimento dinâmico. Ela foi introduzida no início da década de 1960 na Itália por Fichera [25], Stampacchia [54] e outros. Fichera motivado por problemas em mecânica, especificamente em problemas de elasticidade e Stampacchia motivado pela Teoria do Potencial. Na literatura Desigualdades Variacionais (P) são chamadas de Problema do Obstáculo, devido a presença do obstáculo φ na definição de $\mathbb{K}$.

Uma aplicação física clássica de uma Desigualdade Variacional é o problema em determinar a posição de equilíbrio que uma membrana atinge com a presença de um corpo rígido, para maiores detalhes veja [52]. Neste modelo, consideremos uma membrana homogênea e elástica que ocupa uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (aberto limitado) que seja igualmente esticada em todas as direções por uma tensão uniforme e fixada na fronteira. Assumimos que a membrana é dada pelo gráfico da função $u : \Omega \to \mathbb{R}$, com $u = 0$ sobre a fronteira $\partial\Omega$. Este problema consiste em encontrar a posição de equilíbrio da membrana que está acima do obstáculo, isto é, $u \geq \varphi$. A função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, com $\varphi < 0$ sobre a fronteira $\partial\Omega$ é chamada de obstáculo. Matematicamente introduzimos o conjunto convexo de admissibilidade

$$\mathbb{K} = \{u \in H_0^1(\Omega);\ u \geq \varphi \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega\}.$$

O princípio de minimização de energia é dado por

$$u \in \mathbb{K} : \quad I(u) \leq I(v), \quad \forall v \in \mathbb{K}, \tag{1}$$

onde

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega f(x)u\,dx.$$

O primeiro termo do segundo membro da expressão acima é a energia potencial de deformação da membrana e o segundo termo é o trabalho realizado pela força externa f durante o deslocamento. Uma formulação equivalente para o mesmo problema (1) é dada por: encontrar $u \in \mathbb{K}$ verificando

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v-u)\,dx \geq \int_{\Omega} f(x)(v-u)\,dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}. \tag{2}$$

Essa última formulação (2) é mais conhecida na literatura como Desigualdade Variacional. Mais aplicações de Desigualdades Variacionais citamos Kinderlehrer & Stampacchia [39], Troianiello [57], Monneau [49], Teka [56], Friedman [29], Ros-Oton [53] e suas referências.

O estudo da desigualdade variacional (P) foi motivado por trabalhos envolvendo a seguinte classe de problemas:

$$-\Delta u + (1+\lambda V(x))u = f(u), \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{3}$$

Em [14], Bartsch & Wang estabeleceram a existência e multiplicidade de soluções positivas para o problema

$$-\Delta u + (\lambda V(x)+1)u = u^{p-1}, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \tag{4}$$

para $N \geq 3$, $\lambda > 0$ e $2 < p < 2^*$ e V verificando $(V_1)-(V_3)$. Nesse trabalho, os autores combinaram métodos variacionais com a categoria Lusternik-Schnirelmann para mostrar que (4) tem no mínimo $cat(\Omega)$ de soluções positivas quando p está próximo de 2^* e λ grande. O leitor pode encontrar em Bartsch, Pankov & Wang [11] e Bartsch & Tang [12] e suas referências outros resultados para problemas relacionados com (4).

Em [22], Ding & Tanaka mostraram a existência e a multiplicidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u = u^p, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u > 0, \text{ in } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{5}$$

supondo que o primeiro autovalor de $-\Delta + Z(x)$ em Ω_j sob condições de fronteira de Dirichlet é positivo para cada $j \in \{1,2,\cdots,k\}$, $p \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$ e $N \geq 3$. Nesse artigo, verificou-se que o problema (5) possui pelo menos $2^k - 1$ soluções para λ suficientemente grande, as quais são chamadas soluções multi-bump. Essas soluções possuem as seguintes características: para cada subconjunto não vazio $\Gamma \subset \{1,2,\cdots,k\}$ e $\varepsilon > 0$ fixado, existe $\lambda^* > 0$ tal que (5) possui uma solução u_λ, para $\lambda \geq \lambda^* = \lambda^*(\varepsilon)$, satisfazendo:

$$\left| \int_{\Omega_j} \left[|\nabla u_\lambda|^2 + (\lambda V(x) + Z(x))u_\lambda^2 \right] - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right)^{-1} c_j \right| < \varepsilon, \ \forall j \in \Gamma$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Gamma} \left[|\nabla u_\lambda|^2 + u_\lambda^2 \right] dx < \varepsilon,$$

onde $\Omega_\Gamma = \bigcup_{j \in \Gamma} \Omega_j$ e c_j é o nível minimax do funcional energia relacionado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u + Z(x)u = u^p, \text{ em } \Omega_j, \\ u > 0, \text{ em } \Omega_j, \\ u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_j. \end{cases} \tag{6}$$

Motivados pelo estudo feito em [22], Alves, de Morais Filho & Souto [4] e Alves & Souto [9] consideraram um problema do tipo (5), assumindo que a não-linearidade tem um crescimento crítico para o caso $N \geq 3$ e crescimento crítico exponencial quando $N = 2$, respectivamente. Outros resultados envolvendo soluções multi-bump podem ser encontrados em Alves, Nobrega & Yang [6], Guo & Tang [35], Gui [34] e Wang [59] e suas referências.

Em [20], Clapp & Ding estabeleceram a existência e a multiplicidade de soluções positivas para o problema

$$-\Delta u + \lambda V(x)u = \mu u + u^{2^*-1}, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{7}$$

para $N \geq 4$, $\lambda, \mu > 0$ e V verificando $(V_1) - (V_3)$. Ao usar métodos variacionais, os autores mostraram que se λ é grande e μ pequeno, (7) tem uma solução positiva que localiza no conjunto onde o potencial se anula.

No Capítulo 1, com intuito de obter soluções para o problema (P) , para o caso $N \geq 3$, realizamos o estudo de existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de problemas elípticos

$$-\Delta u + \lambda V(x)u = \mu u^{q-1} + u^{2^*-1}, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{$P_{\lambda,\mu}$}$$

onde $\lambda, \mu > 0$ e $2 < q < 2^*$. Isto deve-se ao fato que, uma vez estabelecida a solução para igualdade saberíamos perceber as dificuldades e os desafios para reproduzi-las para a Desigualdade Variacional (P). Para nossa surpresa, fizemos um levantamento bibliográfico e constatamos que o mesmo ainda não tinha sido estudado na literatura.

Motivados pelos resultados encontrados em [14] e [20], a nossa intenção no Capítulo 1 é provar que o mesmo tipo de resultado é válido para o problema $(P_{\lambda,\mu})$. O problema $(P_{\lambda,\mu})$ despertou o interesse, devido à falta de compacidade na imersão de

$H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $s \in [2, 2^*]$ e pelo fato de que estamos considerando uma não-linearidade com crescimento crítico. Esses fatos trazem muitas dificuldades para aplicar métodos variacionais, por exemplo, o funcional energia associado não satisfaz, em geral, a condição de Palais-Smale em todos os níveis. Neste capítulo, superamos essa dificuldade explorando os parâmetros λ e μ em conjunto com argumentos explorados em [14]. Além disso, outro artigo importante, na demonstração do nosso resultado é devido a Alves & Ding [5].

O principal Teorema do Capítulo 1 é o seguinte:

Teorema 0.0.1 *Assuma* $(V_1) - (V_3)$ *e que*

$$N \geq 4 \ \text{e}\ 2 < q < 2^* \quad \text{ou} \quad N = 3 \ \text{e}\ 4 < q < 6.$$

Então existem $\lambda^*, \mu^* > 0$ *tais que* $(P_{\lambda,\mu})$ *tem no mínimo* $cat(\Omega)$ *soluções positivas para* $\lambda \geq \lambda^*$ *e* $\mu \leq \mu^*$.

Os resultados obtidos no Capítulo 1 fazem parte do artigo Alves & Barros [2], o qual foi aceito para publicação na revista Monatshefte für Mathematik.

No Capítulo 2, estudamos a existência de solução para o problema (P). Como vimos no início da introdução a não linearidade deste problema muda conforme $N \geq 3$ ou $N = 2$. Então, dividimos este capítulo em duas seções. Na primeira seção, tratamos o caso $N \geq 3$ e focamos nosso estudo na Desigualdade Variacional: encontrar $u \in \mathbb{K}$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v-u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda V(x)) u (v-u)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (\mu u^{q-1} + u^{2^*-1})(v-u)\, dx, \ \ \forall v \in \mathbb{K} \quad (P)$$

No contexto dos expoentes críticos, [43], Mancini & Musina estabeleceram a existência de solução não-trivial para a Desigualdade Variacional: encontrar $u \in \mathbb{K}_\psi$ satisfazendo

$$\int_\Theta \nabla u \nabla (v-u)\, dx \geq \int_\Theta u^{2^*-1}(v-u)\, dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}_\psi \tag{8}$$

onde

$$\mathbb{K}_\psi = \{v \in H_0^1(\Theta);\ v \leq \psi \ \text{ q.t.p. em } \Theta \setminus C\}$$

em que $\Theta \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado com fronteira suave, $C \subset \Theta$ é um conjunto fechado e $\psi \in H_0^1(\Theta) \cap C(\overline{\Theta})$ com $\psi \geq 0$. Para resolver o problema (8), inicialmente, os autores estudaram o comportamento das sequências (PS) para a desigualdade variacional (8), isto é,

(i) $u_n \in \mathbb{K}_\psi$;

(ii) $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Theta |\nabla u_n|^2\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Theta |u_n|^{2^*}\,dx \right\} < \infty$;

(iii) Existe $z_n \in H_0^1(\Theta)$ com $z_n \to 0$ em $H_0^1(\Theta)$ tal que

$$\int_\Theta \nabla u_n \nabla(v-u_n)\,dx - \int_\Theta |u_n|^{2^*-1}(v-u_n)\,dx \geq \int_\Theta \nabla z_n \nabla(v-u_n)\,dx, \quad v \in \mathbb{K}_\psi.$$

Em seguida, utilizando o Lema de Concentração e Compacidade de Lions contido em [40] e [41] provaram que o limite fraco da sequência (u_n) é solução da desigualdade variacional (8).

Em [36], Jianfu mostrou a existência de duas soluções positivas para a Desigualdade Variacional: encontrar $u \in \mathbb{K}_\psi$ verificando

$$\int_\Theta |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(v-u)\,dx \geq \lambda \int_\Theta u^{p^*-1}(v-u)\,dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}_\psi \tag{9}$$

onde

$$\mathbb{K}_\psi = \{v \in W_0^{1,p}(\Theta);\ v \geq \psi \ \text{ q.t.p. em } \Theta\}$$

para todo λ pertencente a um intervalo não-degenerado $(0,\lambda^*)$, Θ é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $p^* = Np/(N-p)$, $N > p \geq 2$ e $\psi \in C^{1,\alpha}(\Theta)$, $\psi|_{\partial\Theta} < 0$ com $\psi^+ \neq 0$. Na obtenção da primeira solução, o autor utilizou essencialmente o Princípio Variacional de Ekeland [23], para provar a existência de uma sequência minimizante $(u_n) \subset \mathbb{K}_\psi$ para o funcional

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Theta |\nabla u|^p\,dx - \frac{\lambda}{p^*}\int_\Theta (u^+)^{p*}\,dx \tag{10}$$

e mostrou que o limite fraco da sequência (u_n) é uma solução de (9). Na segunda solução, ele utilizou uma versão do Teorema do Passo da Montanha na obtenção de um ponto crítico para funcionais semicontínuos inferiormente da forma

$$J(u) = I(u) + \Psi(u) \tag{11}$$

onde $\Psi : W_0^{1,p}(\Theta) \to \mathbb{R}$ é conhecida como a função indicatriz do conjunto $\mathbb{K}_\psi$, isto é,

$$\Psi(u) = \begin{cases} 0, & u \in \mathbb{K}_\psi, \\ +\infty, & u \in W_0^{1,p}(\Theta) \setminus \mathbb{K}_\psi. \end{cases}$$

Esta versão do Teorema do Passo da Montanha para essa classe de funcionais (11) é devido Szulkin [55]. Recordamos que $u \in W_0^{1,p}(\Theta)$ é ponto crítico para o funcional J se $u \in D(J)$ e $0 \in \partial J(u)$, onde

$$D(J) = \{v \in W_0^{1,p}(\Theta): \ J(v) < +\infty\}$$

é chamado domínio efetivo de J e $\partial J(u)$ é a subdiferencial de J em u. Desta forma, u é ponto crítico para o funcional J se, e somente se, $u \in D(\Psi)$ e $-I'(u) \in \partial\Psi(u)$, onde

$$\partial\Psi(u) = \{u^* \in W_0^{1,p}(\Theta)': \ \Psi(v) - \Psi(u) \geq \langle u^*, v-u\rangle, \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Theta)\}$$

é chamada de subdiferencial de Ψ em u. Observe que $-I'(u) \in \partial\Psi(u)$ é equivalente

$$\langle I'(u), v-u\rangle + \Psi(v) - \Psi(u) \geq 0, \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Theta).$$

Neste sentido $u \in W_0^{1,p}(\Theta)$ é dito ser ponto crítico para J se $u \in \mathbb{K}_\psi$ e

$$\langle I'(u), v-u\rangle \geq 0, \ \forall v \in \mathbb{K}_\psi$$

(ver conceito em V. Barbu [10]). O leitor pode encontrar em Fang [24] e suas referências outros problemas relacionados com (9).

A proposta de estudo da Desigualdade Variacional (P) foi motivada pelo trabalho de Barstch & Wang [14] e pelo fato de existirem poucos resultados envolvendo Desigualdades Variacionais em domínios ilimitados, até onde sabemos, conhecemos apenas Alves & Júlio [3], Frites, Moussaoui & O'Regan [31], Chipot & Yeressian [19] e Jianfu [37].

As principais ferramentas que usamos para encontrar solução para o problema (P) são o método de penalização Carl, Le & Motreanu [18], Teorema do Passo da Montanha devido Willem [60] e o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti & Rabinowitz [8]. O método de penalização, introduzido por Bensoussan & Lions [16] e aprimorado por Carl, Le & Montreanu em [18], vem sendo bastante usado em vários artigos no estudo das Desigualdades Variacionais. Por exemplo, em [46], Matzeu & Servadei provaram a existência de uma solução não trivial e não negativa para a seguinte Desigualdade Variacional Elíptica Semilinear: encontrar $u \in \mathbb{K}_\psi$ satisfazendo

$$\int_\Theta \nabla u \nabla(v-u)\,dx - \lambda\int_\Theta u(v-u)\,dx \geq \int_\Theta f(x,u,\nabla u)(v-u)\,dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}_\psi \tag{12}$$

onde

$$\mathbb{K}_\psi = \{v \in H_0^1(\Theta);\ v \leq \psi \ \text{ q.t.p. em } \Theta\},$$

em que $\Theta \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado com fronteira suave, $N \geq 3$, $\lambda \in (0, \lambda_1)$, o obstáculo $\psi \in H^1(\Theta)$ e $\psi|_{\partial\Theta} \geq 0$, enquanto $f : \Theta \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfaz algumas condições técnicas. Os autores combinaram métodos variacionais e técnicas de penalização para provar a existência de solução para o problema (12). Outros resultados envolvendo técnicas de penalização podem ser encontrados em Matzeu & Servadei [47], Bensoussan, Chandrasekharan & Turi [15], Magrone & Servadei [44], Matzeu & Servadei [45] e suas referências.

O método adotado de penalização neste capítulo consiste em considerar uma família de equações penalizadas da forma

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u - \frac{1}{\epsilon}(\varphi - u)^+ \chi_\Omega = \mu u^{q-1} + u^{2^*-1}, \quad \text{em } \ \mathbb{R}^N \tag{13}$$

onde u é uma solução fraca de (13), isto é, verifica a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + (1+\lambda V(x))uv]\, dx - \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u)^+ v\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu u^{q-1} + u^{2^*-1}) v\, dx,\ \forall v \in E,$$

$\epsilon > 0$ é o parâmetro de penalização, enquanto $\displaystyle\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u)^+ v\, dx$ é o termo de penalização. Em [46], o termo de penalização considerado foi

$$\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (u - \varphi)^+ v\, dx.$$

Isto deve-se ao fato que $u \leq \psi$ na definição $\mathbb{K}_\psi$.

As soluções fracas da equação penalizada (13) podem ser encontradas como pontos críticos do funcional $I_{\lambda,\epsilon} : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) = \frac{1}{2}||u||_\lambda + \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega [(\varphi - u)^+]^2\, dx - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q\, dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\, dx.$$

Uma das dificuldades desta seção é obter um ponto crítico para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$, pois a não linearidade tem crescimento crítico e estamos trabalhando em todo $\mathbb{R}^N$. Superamos esta dificuldade utilizando técnicas variacionais semelhantes as trabalhadas no Capítulo 1 e adicionando uma condição ao obstáculo φ.

Uma vez encontradas as soluções penalizadas, trabalhamos com o operador de penalização $P : E \to E'$ definido por

$$\langle P(u), v\rangle = -\int_\Omega (\varphi - u)^+ v\, dx,$$

o qual verifica as seguintes condições:

(P_1) A função real

$$t \mapsto \langle P(u+tv), w\rangle$$

é contínua sobre $[0,1]$, para todos u, v, $w \in E$;

(P_2) Vale a desigualdade

$$\langle P(u) - P(v), u - v\rangle \geq 0, \quad u, v \in E;$$

(P_3) $P(u) = 0$ se, e somente se, $u \in \mathbb{K}$;

(P_4) O operador P leva conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Pelas propriedade (P_2) e (P_3), garantimos que a sequência (u_n) de soluções do problema penalizado (13) verifica

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(v-u_n)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda V(x))u_n(v-u_n)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (\mu u_n^{q-1} + u_n^{2^*-1})(v-u_n)\,dx,$$

para todo $v \in \mathbb{K}$.

O desafio em seguida é mostrar que u o limite fraco da sequência (u_n) está no convexo $\mathbb{K}$ e que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\,dx, \tag{14}$$

onde

$$f(t) = \mu|t|^{q-2}t + |t|^{2^*-2}t.$$

Essa convergência é crucial para garantirmos uma solução para a Desigualdade Variacional (P). Ao longo de todo estudo, percebemos que essa convergência é um divisor de água nos problemas envolvendo desigualdades variacionais, pois sem a mesma não conseguiríamos garantir o resultado. Então, isso mostra que resolver uma desigualdade variacional não é meramente aplicar a metodologia de resolver uma equação, existe todo um cuidado específico com a não-linearidade. Tal dificuldade torna o problema do ponto de vista matemático mais interessante, contribuindo desta forma para o desenvolvimento da pesquisa nesta área.

Uma vez estabelecida uma solução u_λ para o problema (P), ou melhor, uma sequência de soluções (u_{λ_n}), com $\lambda_n \to \infty$, podemos extrair uma subsequência λ_{n_i} tal que u_{n_i} converge em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para uma função u tal que verifica $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e é solução do seguinte problema

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(v-u)\,dx + \int_\Omega u(v-u)\,dx \geq \int_\Omega (\mu|u|^{q-2} + |u|^{2^*-2})u(v-u)\,dx, \quad \forall v \in \tilde{\mathbb{K}}$$

onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega);\ v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Ainda no Capítulo 2, na segunda seção, tratamos o caso $N = 2$. Para este caso a não linearidade f tem crescimento crítico exponencial e satisfaz as seguintes condições:

(f_1) $\dfrac{f(t)}{t} \to 0$ quando $|t| \to 0$;

(f_2) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(t) := \theta \int_0^t f(s)\,ds \leq f(t)t,\ t \neq 0;$$

(f_3) Existem $C > 0$ tal que

$$|f'(t)| \leq Ce^{\alpha_0 t^2},\ t \in \mathbb{R};$$

(f_4) Existem $p > 2$ e uma constante $\nu > 0$ tais que

$$f(t) \geq \nu t^p,\ \forall t \geq 0.$$

Após uma revisão bibliográfica, observamos que existem poucos trabalhos envolvendo Desigualdades Variacionais quando a não-linearidade f tem um crescimento crítico exponencial. Conhecemos apenas o trabalho de Figueredo, Furtado & Montenegro [27]. Em [27], os autores provaram a existência de duas soluções para a seguinte Desigualdade Variacional: encontrar $u \in \mathbb{K}_\psi$ satisfazendo

$$\int_\Theta \nabla u \nabla(v-u)\,dx \geq \int_\Theta f(u)(v-u)\,dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}_\psi \tag{15}$$

onde

$$\mathbb{K}_\psi = \{v \in H_0^1(\Theta);\ v \geq \psi \ \text{ q.t.p. em } \Theta\}, \tag{16}$$

Θ é um domínio do $\mathbb{R}^2$ limitado, $\psi \in C^{1,\beta}(\Theta)$, $0 < \beta < 1$ tal que $\psi < 0$ sobre $\partial\Theta$, $\psi^+ \neq 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua com crescimento crítico exponencial. Nesse trabalho os autores utilizaram argumentos de minimização e uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais não diferenciáveis devido Szulkin [55], como foi visto em [36]. Motivados por este fato, estudamos a desigualdade variacional (P) para caso $N = 2$, onde a não-linearidade tem crescimento crítico exponencial.

Os argumentos utilizados no desenvolvimento dos resultados desta seção são semelhantes aos da seção anterior, com alguns cuidados, devido a não linearidade. Sabemos que a noção de criticidade em dimensão $N = 2$ é diferente do caso $N \geq 3$. Na verdade, em dimensão $N = 2$, o crescimento crítico está relacionado com uma versão da desigualdade Trundiger & Moser, veja [58] e [50], a qual diz que se Θ é um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$ com fronteira $\partial\Theta$ suave, então para qualquer $u \in H_0^1(\Theta)$, tem-se

$$\int_{\Theta} e^{\alpha|u|^2}\, dx < \infty, \quad \forall \alpha > 0. \tag{17}$$

Além disso, existe uma constante $C = C(\alpha, |\Theta|) > 0$ tal que

$$\sup_{||u||_{\Theta} \leq 1} \int_{\Theta} e^{\alpha|u|^2}\, dx \leq C, \quad \forall \alpha \leq 4\pi. \tag{18}$$

Uma outra versão da desigualdade Trundiger & Moser em todo $\mathbb{R}^2$, a qual é fundamental no desenvolvimento do nosso estudo, é devido Cao [17], que afirma o seguinte

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha|u|^2} - 1\right) dx < \infty, \ \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2) \text{ e } \alpha > 0. \tag{19}$$

Ademais, se $\alpha < 4\pi$ e $|u|_2 \leq M$ então existe uma constante $C = C(\alpha, M)>0$ tal que

$$\sup_{|\nabla u|_2 \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha|u|^2} - 1\right) dx \leq C. \tag{20}$$

A ideia é penalizar o problema (P) e considerar o problema

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u - \frac{1}{\epsilon}(\varphi - u)^+ \chi_\Omega = f(u), \quad \text{em } \ \mathbb{R}^2. \tag{21}$$

Em seguida, encontraremos pontos críticos para o funcional energia associado ao problema penalizado (21)

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) = \frac{1}{2}||u||_\lambda + \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega [(\varphi - u)^+]^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} F(u)\, dx.$$

Para obtermos pontos críticos para este funcional energia, além de utilizamos todo estudo anterior, exploramos argumentos encontrados em Freitas [30]. Nesse momento vale ressaltar, que a hipótese (f_4) desempenha um papel importante para contornar a falta de compacidade, uma vez que neste caso, o funcional energia não irá satisfazer a condição de Palais-Smale. Tal condição está relacionada com a localização correta do nível do passo da montanha do funcional energia.

O próximo passo é trabalhar com o operador de penalização, que de fato é o mesmo da seção anterior, em conjunto com alguns resultados para obter a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (v - u_n)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u_n (v - u_n)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(v - u_n)\, dx,$$

onde (u_n) é a sequência de soluções do problema penalizado (21). Para obtermos a convergência (14), o desafio foi ainda maior, pois estamos considerando a não linearidade com crescimento crítico exponencial. Com essa convergência, garantimos a existência de solução não trivial para o problema (P) tratado nesta seção. Da mesma forma que conseguimos um resultado de concentração para uma sequência de soluções da Desigualdade Variacional (P), obtemos, também, para o caso $N = 2$, ou seja, encontrada uma solução u_λ para o problema (P), ou melhor, uma sequência de soluções (u_{λ_n}), com $\lambda_n \to \infty$, podemos extrair uma subsequência λ_{n_i} tal que u_{n_i} converge em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para uma função u tal que verifica $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e é solução da seguinte desigualdade variacional

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (v - u)\, dx + \int_\Omega u(v - u)\, dx \geq \int_\Omega f(u) u (v - u)\, dx, \quad \forall v \in \tilde{\mathbb{K}}$$

onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega);\ v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

O principal Teorema do Capítulo 2 é o seguinte:

Teorema 0.0.2 *Assuma que V satisfaz $(V_1) - (V_3)$ e f satisfaz $(f_1) - (f_4)$ se $N = 2$. Então existem $\lambda_* > 0$, $\mu_* > 0$, $\nu_* > 0$ e $\rho > 0$ tais que se $||\varphi|| < \rho$, o problema (P) tem solução u_λ não trivial para $\lambda \geq \lambda_*$, $\mu \geq \mu_*$ e $\nu \geq \nu_*$. Além disso, a família $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda_*}$ tem a seguinte propriedade: para qualquer subsequência $\lambda_n \to +\infty$, podemos extrair uma subsequência (λ_n) tal que a sequência (u_{λ_n}) converge forte em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para uma função u que verifica $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e é solução da seguinte desigualdade variacional*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (v - u)\, dx + \int_\Omega u(v - u)\, dx \geq \int_\Omega f(u) u (v - u)\, dx,$$

para todo $v \in \tilde{\mathbb{K}}$, onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega);\ v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

No Capítulo 3, estudamos a existência de solução não trivial para a Desigualdade Variacional (P), mas sem a condição (V_3) para o potencial V. Fomos motivados pelo artigo do Alves & Corrêa [3], onde os autores estabeleceram a multiplicidade de soluções positivas para a seguinte Desigualdade Variacional: encontrar $u \in \mathbb{K}_\varphi$ verificando

$$\int_{\mathbb{R}} u'(v-u)'\,dx + \int_{\mathbb{R}} (1+\lambda V(x))u(v-u)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}} f(u)(v-u)\,dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}_\varphi, \tag{22}$$

onde

$$\mathbb{K}_\varphi = \{v \in H^1(\mathbb{R});\ v \geq \varphi \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}\}$$

$\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ com parte positiva não trivial com $supp\,\varphi^+ \subset V^{-1}(\{0\})$, o potencial V verificando $(V_1)-(V_2)$ e a função f verificando algumas condições técnicas. Nesse trabalho, os autores combinaram métodos variacionais em conjunto com o Princípio Variacional de Ekeland [23] e uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais não diferenciáveis devido Szulkin [55].

Inspirados nas ideias do Capítulo 2, dividimos o Capítulo 3 também em duas seções: na primeira seção, trataremos o caso $N \geq 3$ e na segunda o caso $N = 2$. Como dissemos anteriormente, o potencial não verifica a condição (V_3). Isso nos leva a uma mudança na forma tratada anteriormente de atacar o problema, como, por exemplo, a perda de compacidade. Para superar esta dificuldade, adaptamos algumas ideias encontradas em del Pino & Felmer [21], modificando a não linearidade fora do conjunto Ω. Nesse sentido, consideramos as funções

$$h(t) = \begin{cases} 0,\ t \leq 0 \\ \mu|t|^{q-2}t + |t|^{2^*-2}t,\ 0 \leq t \leq a \\ \dfrac{t}{k},\ \ t \geq a \end{cases}$$

e

$$g(x,t) = \chi_{\Omega'}(x)\mu|t|^{q-2}t + |t|^{2^*-2}t + (1-\chi_{\Omega'}(x))h(t)$$

onde a e k são constantes positivas tomadas adequadamente e $\chi_{\Omega'}$ é a função característica do conjunto Ω'. Aqui, estamos considerando Ω' um aberto conexo limitado contendo $\overline{\Omega}$.

O objetivo é mostrar a existência de solução para a seguinte classe de Desigualdades Variacionais modificada:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla(v-u)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda V(x))u(v-u)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)(v-u)\,dx,\ \forall v \in \mathbb{K}. \tag{23}$$

Uma vez encontrada uma solução u_λ para o problema (23), ou melhor, uma sequência de soluções (u_{λ_n}), com $\lambda_n \to \infty$, podemos extrair uma subsequência λ_{n_i} tal que u_{n_i} converge em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para uma função u tal que verifica $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e é solução do seguinte problema

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u)\,dx + \int_\Omega u(v-u)\,dx \geq \int_\Omega (\mu|u|^{q-2} + |u|^{2^*-2})u(v-u)\,dx, \quad \forall v \in \tilde{\mathbb{K}}$$

onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega);\ v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Ainda, sobre a solução u_λ para o problema (23), podemos utilizar Método de Iteração de Moser [51] para mostra que

$$u_\lambda(x) \leq a, \quad \forall x \in \Omega'^c$$

para λ suficientemente grande. Isso mostra que u_λ é solução do problema original (P). Além disso, estabelecemos um resultado de concentração para uma sequência de soluções (u_λ) da Desigualdade Variacional (P) e com isso finalizamos a primeira seção do Capítulo 3.

Para mostrar que a Desigualdade Variacional modificada (23) possui solução utilizaremos a mesma metodologia usada no Capítulo 2, penalizando (23), isto é, consideramos o seguinte problema

$$-\Delta u + (1+\lambda V(x))u - \frac{1}{\epsilon}(\varphi - u)^+ \chi_\Omega = g(x,u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{24}$$

Em seguida, encontramos pontos críticos para o funcional energia associado ao problema penalizado (24) dado por

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) = \frac{1}{2}||u||_\lambda + \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega [(\varphi-u)^+]^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,dx.$$

A dificuldade de encontrar pontos críticos para o funcional energia associado ao problema (24), mais uma vez, está relacionada ao fato que o mesmo não satisfaz em geral a condição de Palais & Smale. Para obtermos tais pontos críticos, utilizamos técnicas variacionais, algumas ideias encontradas em [3], [4] e o Lema de Concentração e Compacidade de Lions [40], [41], [42]. Conforme feito no Capítulo 2, usando as propriedades do operador penalização, encontramos uma sequência $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ de soluções do problema penalizado (24) que verifica

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (v-u_n)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda V(x))u_n(v-u_n)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)(v-u_n)\,dx.$$

Mostraremos, a menos de subsequência, que a mesma converge forte em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para uma função u_λ, a qual de fato é solução da Desigualdade Variacional modificada

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_\lambda \nabla (v - u_\lambda)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u_\lambda (v - u_\lambda)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_\lambda)(v - u_\lambda)\, dx, \ \ \forall v \in \mathbb{K}$$

Na segunda seção, o caso $N = 2$, a não-linearidade $\mu|t|^{q-2}t + |t|^{2^*-2}t$ é substituída pela função f considerada na segunda seção do Capítulo 2 verificando todas condições $(f_1) - (f_4)$. Prosseguiremos da mesma forma que foi feito no caso $N \geq 3$, com as devidas modificações.

O principal Teorema do Capítulo 3 é o seguinte:

Teorema 0.0.3 *Assuma que V satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e f satisfaz $(f_1) - (f_4)$ se $N = 2$. Então existem $\lambda_* > 0$, $\mu_* > 0$, $\nu_* > 0$ e $\rho > 0$ tais que se $||\varphi|| < \rho$, o problema (P) tem solução u_λ não trivial para $\lambda \geq \lambda_*$, $\mu \geq \mu_*$ e $\nu \geq \nu_*$. Além disso, a família $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda_*}$ tem a seguinte propriedade: para qualquer subsequência $\lambda_n \to +\infty$, podemos extrair uma subsequência (λ_n) tal que a sequência (u_{λ_n}) converge forte em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para uma função u que verifica $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e é solução da seguinte desigualdade variacional*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (v - u)\, dx + \int_\Omega u(v - u)\, dx \geq \int_\Omega f(u) u (v - u)\, dx,$$

para todo $v \in \tilde{\mathbb{K}}$, onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega);\ v \geq \varphi \ q.t.p. \ em\ \Omega\}.$$

Capítulo 1

Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elípticos com crescimento crítico

1.1 Introdução

Neste capítulo mostraremos existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de problemas elípticos com crescimento crítico:

$$-\Delta u + \lambda V(x)u = \mu u^{q-1} + u^{2^*-1}, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \qquad (P_{\lambda,\mu})$$

onde $\lambda, \mu > 0$, $2 < q < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$ e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando as seguintes condições:

(V_1) $V(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^N$;

(V_2) $\Omega := int(V^{-1}(\{0\})) \neq \emptyset$ é um subconjunto aberto conexo limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave;

(V_3) Existe $M_0 > 0$ tal que o conjunto $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M_0\}$ é não vazio e tem medida finita.

Conforme mencionado na Introdução, fomos motivados pelos trabalhos de Bartsch & Wang [9] e Clapp & Ding [10] e nossa intenção é provar que o mesmo tipo de resultado é válido para o problema $(P_{\lambda,\mu})$.

Gostaríamos de salientar que a nossa contribuição, em relação ao problema $(P_{\lambda,\mu})$, foi de estender o estudo realizado em [14] e [20] no seguinte sentido: Em [14], a não-linearidade tem um crescimento subcrítico, enquanto no nosso a não-linearidade tem um crescimento crítico, então precisamos ter o cuidado ao provar a condição Palais-Smale para o funcional energia. Em relação a [20], observamos que somente o caso $q = 2$ foi considerado, enquanto que aqui consideramos $2 < q < 2^*$. O leitor é convidado a observar que nossa abordagem é totalmente diferente da usada em [20].

O resultado principal deste capítulo é o seguinte

Teorema 1.1.1 *Assuma* $(V_1) - (V_3)$ *e que*

$$N \geq 4 \ \text{e} \ 2 < q < 2^* \quad \text{ou} \quad N = 3 \ \text{e} \ 4 < q < 6.$$

Então existem $\lambda^*, \mu^* > 0$ *tais que* $(P_{\lambda,\mu})$ *tem no mínimo* $cat(\Omega)$ *soluções positivas para* $\lambda \geq \lambda^*$ *e* $\mu \leq \mu^*$.

Na demonstração do Teorema 1.1.1, usamos métodos variacionais adaptando para o nosso caso alguns argumentos explorados em Bartsch & Wang [14]. Além disso, outro trabalho importante na demonstração do nosso teorema principal é devido a Alves & Ding [5], onde a multiplicidade de soluções foi estabelecida para o problema limite. Para mais detalhes veja a próxima seção.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: Na primeira seção, introduzimos o problema limite estabelecido por Alves & Ding [5] e recordamos alguns fatos envolvendo este problema. Na Seção 1.2, apresentamos alguns resultados preliminares. Além disso, mostraremos que o funcional energia verifica a geometria do passo da montanha e também a condição $(PS)_c$, para alguns valores de c. Com isso, mostramos que o problema $(P_{\lambda,\mu})$ possui solução não trivial. Em seguida, na Seção 1.3, provamos o resultado principal o Teorema 1.1.1.

1.2 O problema limite

Nesta seção, relembramos alguns resultados encontrados em [5] para o funcional $I_\mu : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\mu(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \frac{\mu}{q} \int_\Omega |u|^q \, dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega |u|^{2^*} \, dx$$

cujos pontos críticos são soluções fracas do problema (problema limite)

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu|u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{$(P)_\infty$}$$

Em [5], os autores estabeleceram a existência de pelo menos $cat(\Omega)$ de soluções positivas do problema $(P)_\infty$. Se c_μ é o nível do passo da montanha associado ao funcional I_μ é possível mostrar a estimativa abaixo

$$0 < c_\mu < \frac{1}{N} S^{N/2}, \quad \forall \mu > 0, \quad \text{(veja Miyagaki [48])} \tag{1.1}$$

supondo que

$$q \in (2, 2^*) \quad \text{if} \quad N \geq 4 \quad \text{ou} \quad q \in (4, 6) \quad \text{if} \quad N = 3, \tag{1.2}$$

onde S é a melhor constante da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ dada pela

$$S = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx; \ u \in H_0^1(\Omega), \ \int_\Omega |u|^{2^*} \, dx = 1 \right\}. \tag{1.3}$$

Por resultados encontrados em Willem [60],

$$c_\mu = \inf_{u \in \mathcal{M}} I_\mu(u)$$

onde

$$\mathcal{M} = \{ u \in H_0^1(\Omega); \ u \neq 0 \quad \text{e} \quad I'_\mu(u)u = 0 \}.$$

O conjunto $\mathcal{M}$ é chamado de variedade de Nehari do funcional I_μ.

No que segue, sem perda de generalidade, assumimos que $0 \in \Omega$. Entretanto, sendo Ω um domínio limitado suave, podemos fixar $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset \Omega$ e os conjuntos

$$\Omega_r^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^N; \ d(x, \Omega) \leq r \right\}$$

e

$$\Omega_r^- = \{ x \in \Omega; \ d(x, \partial\Omega) \geq r \}$$

são homotopicamente equivalentes a Ω. Denotemos por $m(\mu)$ o nível do passo da montanha associado ao funcional

$$I_{\mu,r}(u) = \int_{B_r(0)} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{\mu}{q} \int_{B_r(0)} |u|^q \, dx - \frac{1}{2^*} \int_{B_r(0)} |u|^{2^*} \, dx.$$

Então

$$0 < m(\mu) < \frac{1}{N} S^{N/2}, \tag{1.4}$$

e

$$m(\mu) = \inf_{u \in \mathcal{M}_r} I_{\mu,r}(u) \tag{1.5}$$

com

$$\mathcal{M}_r = \{u \in H_0^1(B_r(0));\ u \neq 0 \quad \text{e} \quad I'_{\mu,r}(u)u = 0\}. \tag{1.6}$$

Os próximos três lemas podem ser encontrados em [5].

Lema 1.2.1 $\lim\limits_{\mu \to 0} c_\mu = \lim\limits_{\mu \to 0} m(\mu) = \dfrac{1}{N} S^{N/2}$.

Lema 1.2.2 *Se u é um ponto crítico de I_μ sobre $\mathcal{M}$, então u é um ponto crítico de I_μ em $H_0^1(\Omega)$.*

Lema 1.2.3 *Existe $\mu^* > 0$ tal que se $\mu \in (0, \mu^*)$ e $u \in \mathcal{M}$ com $I_\mu(u) \leq m(\mu)$, então $\beta_0(u) \in \Omega^+_{r/2}$, onde a aplicação $\beta_0 : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^N$ é definida por*

$$\beta_0(u) = \frac{\int_\Omega |u|^{2^*} x \, dx}{\int_\Omega |u|^{2^*} \, dx}.$$

Essa aplicação é conhecida na literatura como o *baricentro* de u. Visto que Ω é um domínio limitado, então $\beta_0(u)$ está bem definida.

Aqui e ao longo deste capítulo estamos assumindo que $\mu \in (0, \mu^*)$ e (1.2).

1.3 Resultados preliminares

O espaço $E \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ definido por

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N);\ \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 \, dx < +\infty \right\}$$

equipado com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + \lambda V(x) uv] \, dx$$

é um espaço de Hilbert com a norma

$$||u||_\lambda = \left(\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + \lambda V(x) |u|^2] \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Denotemos por E_λ, o espaço E com a norma $||\ \ ||_\lambda$. As condições $(V_1) - (V_3)$ implicam que existe $\Upsilon > 0$ satisfazendo

$$||u||_\lambda \geq \Upsilon ||u||, \quad \forall u \in E_\lambda \quad \text{e} \quad \forall \lambda \geq 1.$$

Esta desigualdade implica que a imersão $E_\lambda \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ é contínua para $\lambda \geq 1$. Assim, as imersões

$$E_\lambda \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N), \quad \forall s \in [2, 2^*],$$

são contínuas para $\lambda \geq 1$.

Usando as notações acima, definimos o funcional $I_{\lambda,\mu} : E_\lambda \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}||u||_\lambda^2 - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} \, dx,$$

que pertence a $C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$ com a derivada dada por

$$I'_{\lambda,\mu}(u)v = \langle u, v\rangle_\lambda - \mu\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-2}uv \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-2}uv \, dx, \quad \forall u, v \in E_\lambda$$

ou equivalente,

$$I'_{\lambda,\mu}(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda V(x)uv) \, dx - \mu\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-2}uv \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-2}uv \, dx.$$

Observe que os pontos críticos de $I_{\lambda,\mu}$ são soluções fracas de $(P_{\lambda,\mu})$.

O próximo lema mostra que o funcional $I_{\lambda,\mu}$ satisfaz a geometria do passo da montanha.

Lema 1.3.1 (a) *Existem contantes $r, \rho > 0$, independentes de $\lambda \geq 1$ e $\mu > 0$ tais que*

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq \rho \quad \textit{para} \quad ||u||_\lambda = r.$$

(b) *Existe $e \in C_0^\infty(\Omega)$ com $||e||_\lambda > r$ e $I_{\lambda,\mu}(e) < 0$.*

Demonstração. Usando a imersão de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N), \text{ para } 2 \leq s \leq 2^*, \tag{1.7}$$

segue que

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq \frac{1}{2}||u||_\lambda^2 - C||u||_\lambda^q - C||u||_\lambda^{2^*}.$$

Como $2 < q < 2^*$, existem $\rho, r > 0$ tais que

$$I_{\lambda,\mu}(u) \geq \rho > 0, \text{ para } ||u||_\lambda = r,$$

mostrando (a). Agora, fixemos $\Psi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $supp\, \Psi \subset \Omega$. Então,

$$I_{\lambda,\mu}(t\Psi) = \frac{t^2}{2}\int_\Omega (|\nabla\Psi|^2 + |\Psi|^2) \, dx - \frac{t^q\mu}{q}\int_\Omega |\Psi|^q \, dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega |\Psi|^{2^*} \, dx.$$

Desde que $2 < q < 2^*$,

$$I_{\lambda,\mu}(t\Psi) \to -\infty \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

Assim, (b) segue fixando $e = t^*\Psi$ com $t^* > 0$ suficientemente grande.

■

Agora, usando uma versão do Teorema do Passo da Montanha encontrada em Willem [60], existe uma sequência $(PS)_{c_{\lambda,\mu}}$ para o funcional $I_{\lambda,\mu}$, isto é, existe uma sequência $(u_n) \subset E_\lambda$ satisfazendo

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) \to c_{\lambda,\mu} \quad \text{e} \quad I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0, \tag{1.8}$$

onde $c_{\lambda,\mu}$ é o nível do passo da montanha associado ao funcional $I_{\lambda,\mu}$ dado por

$$c_{\lambda,\mu} = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\mu}(\gamma(t)) \tag{1.9}$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E_\lambda); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Como na seção anterior, é possível provar que

$$c_{\lambda,\mu} = \inf_{u\in\mathcal{M}_{\lambda,\mu}} I_{\lambda,\mu}(u)$$

onde

$$\mathcal{M}_{\lambda,\mu} = \{u \in E_\lambda;\ u \neq 0 \quad \text{e} \quad I'_{\lambda,\mu}(u)u = 0\}.$$

Lema 1.3.2 *Existe uma constante $\sigma > 0$, independente de $\lambda \geq 1$, tal que*

$$\sigma \leq ||u||_\lambda, \quad \forall u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}.$$

Demonstração. Dado $u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$, temos

$$||u||_\lambda = \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q\ dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\ dx.$$

Usando as imersões de Sobolev existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$||u||_\lambda^2 \leq C_1||u||_\lambda^q + C_2||u||_\lambda^{2^*}.$$

Sendo $q \in (2, 2^*)$, dado $\epsilon > 0$ existe uma constante $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|t|^q \leq \epsilon|t|^2 + C_\epsilon|t|^{2^*}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Utilizando esta estimativa, segue que

$$(1 - \epsilon C_1)||u||_\lambda^2 \leq (C_\epsilon + C_2)||u||_\lambda^{2^*}.$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $C_3 = \dfrac{1-\epsilon C_1}{C_\epsilon + C_2} > 0$, obtemos

$$0 < C_3 \leq ||u||_\lambda^{2^*-2},$$

ou ainda,

$$0 < \sigma \leq ||u||_\lambda,$$

onde $\sigma = (C_3)^{1/(2^*-2)}$. Como $u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$ foi dado arbitrariamente, temos

$$\sigma \leq ||u||_\lambda, \quad \forall u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu},$$

finalizando a demonstração.

■

O lema a seguir está relacionado com a boa localização do nível do passo da montanha do funcional energia $I_{\lambda,\mu}$.

Lema 1.3.3 *Existe $\tau = \tau(\mu) > 0$ tal que o nível do passo da montanha $c_{\lambda,\mu}$ verifica a seguinte desigualdade*

$$0 < c_{\lambda,\mu} < \frac{1}{N}S^{N/2} - \tau, \quad \forall \lambda > 0. \tag{1.10}$$

Demonstração. Dado $u \in \mathcal{M}$, temos $u \neq 0$ e $I'_\mu(u)u = 0$. Note que $u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$ e $I_\mu(u) = I_{\lambda,\mu}(u)$. Logo,

$$c_{\lambda,\mu} \leq I_{\lambda,\mu}(u) = I_\mu(u).$$

Pela definição de c_μ, segue que $c_{\lambda,\mu} \leq c_\mu$ para todo $\lambda, \mu > 0$. Então, basta aplicar (1.1) para obter o resultado desejado.

■

A seguir, estudaremos algumas propriedades das sequências (PS) para o funcional $I_{\lambda,\mu}$, as quais serão provadas em alguns lemas.

Lema 1.3.4 *Se (u_n) é uma sequência $(PS)_d$ para o funcional $I_{\lambda,\mu}$, então (u_n) é limitada em E_λ e*

$$\limsup_{n\to+\infty} ||u_n||_\lambda^2 \leq \frac{2qd}{q-2}. \tag{1.11}$$

Demonstração. Primeiro de tudo, note que

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\mu}(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) ||u_n||^2_\lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{q} I'_{\lambda,\mu}(u_n)u_n \leq d + o_n(1) + o_n(1)||u_n||_\lambda, \quad \text{para} \quad n \geq n_0.$$

Combinando as desigualdades acima, produzimos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) ||u_n||^2_\lambda \leq d + o_n(1) + o_n(1)||u_n||_\lambda, \quad \text{para} \quad n \geq n_0,$$

de onde segue a limitação de (u_n) e (1.11).

■

Lema 1.3.5 *Seja $\Theta > 0$ uma constante que não depende de λ e μ. Se $(u_n) \subset E_\lambda$ é uma sequência $(PS)_d$ para o funcional $I_{\lambda,\mu}$ com $0 \leq d \leq \Theta$, então dado $\delta > 0$ existem $\lambda_* = \lambda_*(\delta, \Theta) > 0$ e $R = R(\delta, \Theta) > 0$ tais que*

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_{B^c_R(0)} |u_n|^q \, dx < \delta, \quad \forall \lambda \geq \lambda_*.$$

Demonstração. Na demonstração utilizaremos alguns argumentos encontrados em Bartch & Wang [14]. Sejam (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para o funcional $I_{\lambda,\mu}$ com $0 \leq d \leq \Theta$. Para cada $R > 0$, definimos

$$X_R = \left\{x \in \mathbb{R}^N;\, |x| > R,\, V(x) \geq M_0\right\}$$

e

$$Y_R = \left\{x \in \mathbb{R}^N;\, |x| > R,\, V(x) < M_0\right\},$$

onde M_0 é dado em (V_3). Observe que

$$\int_{X_R} |u_n|^2 \, dx \leq \frac{1}{\lambda M_0} \int_{X_R} \lambda V(x)|u_n|^2 \, dx \leq \frac{||u_n||^2_\lambda}{\lambda M_0} \tag{1.12}$$

e pela desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev

$$\int_{Y_R} |u_n|^2 \, dx \leq \left(\int_{Y_R} |u_n|^{2^*} \, dx\right)^{\frac{2}{2^*}} |Y_R|^{\frac{2}{N}} \leq C||u_n||^2_\lambda |Y_R|^{\frac{2}{N}}. \tag{1.13}$$

Usando a desigualdade de interpolação para $2 < q < 2^*$, obtemos

$$|u_n|^q_{L^q(B^c_R)} \leq |u_n|^{q\eta}_{L^2(B^c_R)} |u_n|^{q(1-\eta)}_{L^{2^*}(B^c_R)} \leq |u_n|^{q\eta}_{L^2(B^c_R)} ||u_n||^{q(1-\eta)}_\lambda, \tag{1.14}$$

para algum $\eta \in (0,1)$. De (1.11)-(1.14) existe $K > 0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} |u_n|^q_{L^q(B^c_R)} \leq K \left(\frac{1}{\lambda M_0} + |Y_R|^{\frac{2}{N}} \right)^{\frac{q\eta}{2}}. \tag{1.15}$$

De (V_3), $Y_R \subset \mathcal{L}$. Logo

$$\lim_{R\to\infty} |Y_R| = 0.$$

Do limite acima e de (1.15), para cada δ existem $R > 0$ e $\lambda_* > 0$ tais que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B^c_R(0)} |u_n|^q \, dx < \delta, \quad \forall \lambda \geq \lambda_*,$$

como queríamos provar.

■

Como consequência do Lema 1.3.5, temos o seguinte corolário.

Corolário 1.3.6 *Seja $(v_n) \subset E_{\lambda_n}$ uma sequência tal que $(||v_n||_{\lambda_n})$ é limitada com $\lambda_n \to +\infty$. Se $v_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então*

$$v_n \to 0 \quad em \quad L^q(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Seja $(v_n) \subset E_{\lambda_n}$ uma sequência tal que $(||v_n||_{\lambda_n})$ é limitada com $\lambda_n \to +\infty$. Repetindo as ideias contidas na demonstração do Lema 1.3.5 é possível mostrar um resultado semelhante para a sequência (v_n), isto é, dado $\delta > 0$ existem $R > 0$ e $\lambda_* > 0$ tais que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B^c_R(0)} |v_n|^q \, dx < \delta/2, \quad \forall \lambda \geq \lambda_*.$$

Por outro lado, temos

$$v_n \to 0 \quad L^q(B_R(0)).$$

Logo,

$$\limsup_{n\to\infty} |v_n|_q = 0,$$

de onde segue

$$v_n \to 0 \;\text{ em }\; L^q(\mathbb{R}^N).$$

■

A próxima proposição mostra alguns níveis em que o funcional $I_{\lambda,\mu}$ satisfaz a condição (PS).

Proposição 1.3.7 *Existe $\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda}(\tau) > 0$ tal que $I_{\lambda,\mu}$ verifica a condição $(PS)_{d_\lambda}$ para qualquer $d_\lambda \in \left(0, \frac{1}{N}S^{N/2} - \tau\right)$ para todo $\lambda \geq \widehat{\lambda}$, onde τ foi dado no Lema 1.3.3.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_{d_\lambda}$ para o funcional $I_{\lambda,\mu}$, isto é,

$$I_{\lambda,\mu}(u_n) \to d_\lambda \quad \text{e} \quad I'_{\lambda,\mu}(u_n) \to 0.$$

Pelo Lema 1.3.4, a sequência (u_n) é limitada em E_λ. Sendo E_λ um espaço de Hilbert, para alguma subsequência (u_n), existe $u \in E_\lambda$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad E_\lambda,$$

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^s_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad 1 \leq s < 2^*.$$

Com um cálculo direto mostra-se que $I'_{\lambda,\mu}(u) = 0$, e assim, $I'_{\lambda,\mu}(u)u = 0$. Por outro lado, pelo Lema de Brezís & Lieb [38], segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx + o_n(1)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} \, dx + o_n(1),$$

onde $v_n = u_n - u$. Desde que

$$\frac{1}{2}||u_n||^2_\lambda - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \, dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \, dx = d_\lambda + o_n(1),$$

temos

$$\frac{1}{2}||v_n||^2_\lambda - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q \, dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \, dx = d_\lambda - I_{\lambda,\mu}(u) + o_n(1). \tag{1.16}$$

Agora, usando o fato que $I'_{\lambda,\mu}(u_n)u_n = o_n(1)$ e $I'_{\lambda,\mu}(u)u = 0$, segue que

$$||v_n||^2_\lambda - \mu\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \, dx = o_n(1). \tag{1.17}$$

Da limitação de (u_n), podemos assumir que

$$||v_n||^2_\lambda \to L_\lambda \quad \text{e} \quad \mu\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \to L_\lambda.$$

Se $L_\lambda = 0$, então deduzimos que $v_n \to 0$ em E_λ, ou equivalentemente, $u_n \to u$ em E_λ, e com isso finalizamos a demonstração. Em seguida, mostraremos que $L_\lambda > 0$ não pode ser positivo λ suficientemente grande. Para isso, se

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q \, dx \to A_\lambda \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \to B_\lambda,$$

então $\mu A_\lambda + B_\lambda = L_\lambda$. Seguindo os argumentos explorados na demonstração do Lema 1.3.5, vemos que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q \, dx = o_\lambda(1),$$

onde $o_\lambda(1) \to 0$ quando $\lambda \to +\infty$. Assim,

$$A_\lambda = o_\lambda(1) \quad \text{e} \quad L_\lambda = B_\lambda + o_\lambda(1). \tag{1.18}$$

De (1.17) e das imersões de Sobolev

$$||v_n||_\lambda^2 \le C\big(||v_n||_\lambda^q + ||v_n||_\lambda^{2^*}\big) + o_n(1). \tag{1.19}$$

Recordando que existe $C > 0$ verificando

$$|t|^q \le \frac{1}{2}|t|^2 + C|t|^{2^*}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e supondo por contradição que $L_\lambda > 0$, a última desigualdade implica que

$$\lim_{n\to+\infty} ||v_n||_\lambda^2 \ge (1/C)^{2/(2^*-2)} = C_1 > 0,$$

ou equivalentemente,

$$L_\lambda \ge C_1 > 0. \tag{1.20}$$

onde C_1 não depende de $\lambda > 0$. Por outro lado, sabemos que

$$S \le \frac{||v_n||_\lambda^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}}.$$

Então, tomando o limite quando $n \to +\infty$, encontramos

$$S \le \frac{L_\lambda}{(B_\lambda)^{2/2^*}} = \frac{L_\lambda}{(L_\lambda + o_\lambda(1))^{2/2^*}}.$$

Agora, fazemos $\lambda \to +\infty$ e usando (1.20), ficamos com

$$S^{N/2} \le \liminf_{\lambda\to\infty} L_\lambda. \tag{1.21}$$

De (1.16), segue que

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)L_\lambda + o_\lambda(1) \leq d_\lambda,$$

donde

$$\liminf_{\lambda\to\infty} d_\lambda \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\liminf_{\lambda\to\infty} L_\lambda.$$

Usando a desigualdade acima combinada com (1.21), deduzimos

$$\liminf_{\lambda\to\infty} d_\lambda \geq \frac{1}{N}S^{N/2}, \tag{1.22}$$

o que é um absurdo, pois por hipótese

$$\limsup_{\lambda\to+\infty} d_\lambda \leq \frac{1}{N}S^{N/2} - \tau < \frac{1}{N}S^{N/2}.$$

Sendo assim, existe $\widehat{\lambda} > 0$ tal que $L_\lambda = 0$ para todo $\lambda \geq \widehat{\lambda}$, finalizando a demonstração.

∎

Inspirados na demonstração do resultado precedente, obtemos uma consequência que será muito importante adiante para mostrar a multiplicidade de soluções para o problema $(P_{\lambda,\mu})$.

Corolário 1.3.8 *Existe $\widehat{\lambda} > 0$ tal que $I_{\lambda,\mu}$ verifica a condição $(PS)_{d_\lambda}$ sobre $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}$ para qualquer $d_\lambda \in \left(0, \frac{1}{N}S^{N/2} - \tau\right)$ e $\lambda \geq \widehat{\lambda}$, onde τ foi dado no Lema 1.3.3.*

O teorema a seguir garante a existência de solução de energia mínima para o problema $(P_{\lambda,\mu})$.

Teorema 1.3.9 *Existe $\lambda^* > 0$ tal que o nível do passo da montanha $c_{\lambda,\mu}$ é um valor crítico para o funcional $I_{\lambda,\mu}$, para todo $\lambda \geq \lambda^*$, isto é, existe $u_{\lambda,\mu} \in E_\lambda$ verificando*

$$I_{\lambda,\mu}(u_{\lambda,\mu}) = c_{\lambda,\mu} \quad e \quad I'_{\lambda,\mu}(u_{\lambda,\mu}) = 0.$$

Demonstração. Pelo Lema 1.3.3, tem-se que $c_{\lambda,\mu} < \frac{1}{N}S^{N/2} - \tau$. A Proposição 1.3.7 garante a existência de $\lambda^* = \lambda^*(\tau) > 0$ tal que o funcional energia $I_{\lambda,\mu}$ verifica a condição $(PS)_{c_{\lambda,\mu}}$ para $\lambda \geq \lambda^*$. Desta forma, pelo Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti & Rabinowitz [8], existe $u_{\lambda,\mu} \in E_\lambda$ verificando

$$I_{\lambda,\mu}(u_{\lambda,\mu}) = c_{\lambda,\mu} \quad \text{e} \quad I'_{\lambda,\mu}(u_{\lambda,\mu}) = 0,$$

isto finaliza a demonstração.

$\blacksquare$

Agora, nossa intenção é mostrar uma relação importante entre $c_{\lambda,\mu}$ e c_{μ}. No entanto, para fazer isso precisamos estudar o comportamento das sequências $(PS)_{c,\infty}$. A seguir, seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_{c,\infty}$, isto é,

$$
\begin{aligned}
& u_n \in E_{\lambda_n} \text{ e } \lambda_n \to +\infty, \\
& I_{\lambda_n,\mu}(u_n) \to c \quad \text{para algum} \quad c \in \mathbb{R}, \\
& ||I'_{\lambda_n,\mu}(u_n)||_{E'_{\lambda_n}} \to 0.
\end{aligned}
$$

Proposição 1.3.10 *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_{c,\infty}$ com $c \in \left(0, \frac{1}{N} S^{N/2}\right)$. Então, existe uma subsequência (u_n) e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso,

(i) $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e u é uma solução de

$$
\begin{cases}
-\Delta u = \mu |u|^{q-2} u + |u|^{2^*-2} u, \text{ em } \Omega, \\
u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega.
\end{cases}
\tag{$(P)_\infty$}
$$

(ii) $||u_n - u||^2_{\lambda_n} \to 0$.

(iii) Quando $\lambda_n \to \infty$ temos as seguintes convergências:

$$
\begin{aligned}
& u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N), \\
& \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_n|^2 \, dx \to 0, \\
& ||u_n||^2_{\lambda_n} \to \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = ||u||^2_{H^1_0(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Conforme foi feito no Lema 1.3.4,

$$\limsup_{n \to +\infty} ||u_n||^2_{\lambda_n} \leq \frac{2qc}{q-2}. \tag{1.23}$$

Isto mostrar que $(||u_n||_{\lambda_n})$ é limitada em $\mathbb{R}$. Desde que

$$||u_n||_{\lambda_n} \geq \Upsilon ||u_n|| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(u_n) também é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, e assim, existe uma subsequência de (u_n) e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Para mostrar (i), para cada $m \in \mathbb{N}^*$ consideramos o conjunto

$$C_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^N;\ V(x) > \frac{1}{m} \right\}.$$

É fácil ver que

$$\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} = \bigcup_{m=1}^{+\infty} C_m.$$

Note que,

$$\int_{C_m} |u_n|^2 dx = \int_{C_m} \frac{\lambda_n V(x)}{\lambda_n V(x)} |u_n|^2 dx \leq \frac{m}{\lambda_n} ||u_n||_{\lambda_n}^2 \leq \frac{mM}{\lambda_n},$$

onde $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} ||u_n||_{\lambda_n}^2$. Pelo Lema de Fatou,

$$\int_{C_m} |u|^2 dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_{C_m} |u_n|^2 dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{mM}{\lambda_n} = 0$$

e isto implica

$$\int_{C_m} |u|^2 dx = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Desta forma $u = 0$ em quase todo ponto de C_m, para todo $m \in \mathbb{N}^*$. Logo,

$$u(x) = 0 \ \text{ sobre } \bigcup_{m=1}^{+\infty} C_m = \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}.$$

Consequentemente, $u = 0$ para quase todo ponto em $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$. Para completar a demonstração de (i), considere uma função teste $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e observe que

$$I'_{\lambda_n,\mu}(u_n)\varphi = \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega (\mu |u_n|^{q-2} u_n + |u_n|^{2^*-2} u_n) \varphi \, dx. \tag{1.24}$$

Como (u_n) é uma sequência $(PS)_{c,\infty}$, temos

$$I'_{\lambda_n,\mu}(u_n)\varphi \to 0. \tag{1.25}$$

Recordando que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, devemos ter

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi \, dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx \tag{1.26}$$

e

$$\int_\Omega (\mu |u_n|^{q-2} u_n + |u_n|^{2^*-2} u_n) \varphi \, dx \to \int_\Omega (\mu |u|^{q-2} u + |u|^{2^*-2} u) \varphi \, dx. \tag{1.27}$$

Sendo assim, de (1.24)-(1.27),

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega (\mu |u|^{q-2} u + |u|^{2^*-2} u) \varphi \, dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, a igualdade acima nos dá

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega (\mu|u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u)v \, dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

mostrando que u é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu|u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u, \text{ em } \Omega, \\ u = 0, \ \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.28}$$

Para (ii), note que

$$||u_n - u||_{\lambda_n}^2 = ||u_n||_{\lambda_n}^2 + ||u||_{\lambda_n}^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla u + \lambda_n V(x) u_n u) \, dx. \tag{1.29}$$

De (i),

$$||u||_{\lambda_n}^2 = ||u||_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

e assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla u + \lambda_n V(x) u_n u) \, dx = ||u||_{H_0^1(\Omega)}^2 + o_n(1).$$

Daí, podemos reescrever (1.29) como

$$||u_n - u||_{\lambda_n}^2 = ||u_n||_{\lambda_n}^2 - ||u||_{H_0^1(\Omega)}^2 + o_n(1). \tag{1.30}$$

Juntando a limitação de $(||u_n||_{\lambda_n})$ com o limite $||I'_{\lambda_n}(u_n)||_{E'_{\lambda_n}} \to 0$, encontramos

$$I'_{\lambda_n}(u_n)u_n \to 0.$$

Como,

$$||u_n||_{\lambda_n}^2 = I'_{\lambda_n}(u_n)u_n + \int_{\mathbb{R}^N} (\mu|u_n|^q + |u_n|^{2^*}) \, dx,$$

então

$$||u_n||_{\lambda_n}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu|u_n|^q + |u_n|^{2^*}) \, dx + o_n(1). \tag{1.31}$$

Por outro lado, sabemos que o limite $I'_{\lambda_n}(u_n)u \to 0$ é equivalente

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u \, dx - \int_\Omega (\mu|u_n|^{q-2}u_n u + |u_n|^{2^*-2}u_n u) \, dx = o_n(1),$$

o que implica

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu|u|^q + |u|^{2^*}) \, dx. \tag{1.32}$$

Combinando (1.30) com (1.31) e (1.32), segue que

$$||u_n - u||_{\lambda_n}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\mu|u_n|^q + |u_n|^{2^*}) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu|u|^q + |u|^{2^*}) \, dx + o_n(1).$$

isto é,

$$||v_n||^2_{\lambda_n} = \mu|v_n|^q_q + |v_n|^{2^*}_{2^*} + o_n(1),$$

onde $v_n = u_n - u$. Pelo Corolário 1.3.6, $v_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, consequentemente

$$||v_n||^2_{\lambda_n} = |v_n|^{2^*}_{2^*} + o_n(1).$$

Agora, repetindo os mesmos passos dados na finalização da demonstração da Proposição 1.3.7 para a sequência (v_n) deduzimos

$$||v_n||^2_{\lambda_n} \to 0,$$

finalizando a demonstração de (ii). Finalmente, a fim de provar (iii), basta usar a desigualdade abaixo

$$0 \leq \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n|^2 dx = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n - u|^2 dx \leq ||u_n - u||^2_{\lambda_n} \to 0.$$

■

No que segue, provaremos alguns resultados envolvendo $c_{\lambda,\mu}$ e c_μ.

Lema 1.3.11 *Se $\lambda_n \to +\infty$, então $\lim_{n\to\infty} c_{\lambda_n,\mu} = c_\mu$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.9, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $u_n = u_{\lambda_n,\mu} \in E_{\lambda_n}$ tal que

$$I_{\lambda_n,\mu}(u_n) = c_{\lambda_n,\mu} \quad \text{e} \quad I'_{\lambda_n,\mu}(u_n) = 0.$$

O Lema 1.3.1, juntamente com a definição de $c_{\lambda_n,\mu}$ implica que

$$0 < \rho \leq c_{\lambda_n,\mu} \leq c_\mu < \frac{1}{N} S^{N/2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de onde segue que $(c_{\lambda_n \mu})$ é uma sequência limitada e $||u_n||_{\lambda_n} \not\to 0$. Agora, argumentado como na demonstração do Lema 1.3.4, obtemos

$$\limsup_{n\to+\infty} ||u_n||^2_{\lambda_n} \leq \frac{2qc_\mu}{q-2},$$

mostrando que (u_n) é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Sendo assim, pela Proposição 1.3.10, existe uma subsequência (u_n) e $u \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}$ tais que

$$||u_n - u||^2_{\lambda_n} \to 0,$$

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N),$$

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^s(\mathbb{R}^N) \quad \forall s \in [2, 2^*],$$

$$I'_\mu(u) = 0.$$

Assim, podemos concluir que $I_{\lambda,\mu}(u_n) \to I_\mu(u)$. Como $I_{\lambda,\mu}(u_n) = c_{\lambda_n,\mu} \leq c_\mu$,

$$I_\mu(u) \leq c_\mu. \tag{1.33}$$

Sendo $u \neq 0$ e $I'_\mu(u)u = 0$, devemos ter $u \in \mathcal{M}$. Logo,

$$c_\mu \leq I_\mu(u). \tag{1.34}$$

As duas desigualdades (1.33) e (1.34) implicam que $I_\mu(u) = c_\mu$ e

$$\lim_{n\to\infty} c_{\lambda_n,\mu} = c_\mu,$$

provando o resultado desejado.

■

O Lema 1.3.11 nos fornece informações importantes que estão listadas nos corolários abaixo.

Corolário 1.3.12 *Seja $(\lambda_n) \subset (0, +\infty)$ uma sequência verificando $\lambda_n \to +\infty$ e $u_{\lambda_n,\mu}$ a solução de energia mínima obtida no Teorema 1.3.9. Então, existe uma subsequência de $(u_{\lambda_n,\mu})$, denotada por ela mesma, e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que $u_{\lambda_n,\mu} \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ e u é uma solução de energia mínima do problema limite*

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu|u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u, \text{ em } \Omega, \\ u = 0, \ \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$(P)_\infty$}$$

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 1.3.10.

■

Corolário 1.3.13 *Existem $\lambda^* > 0$ grande e $\mu^* > 0$ pequeno tais que*

$$m(\mu) < 2c_{\lambda,\mu}, \quad \forall \lambda \geq \lambda^* \quad e \quad \forall \mu \in (0, \mu^*).$$

Demonstração. Pelo Lema 1.2.1 podemos diminuir μ^*, se necessário, de tal forma que

$$m(\mu) < 2c_\mu, \quad \forall \mu \in (0, \mu^*).$$

Sabemos pelo Lema 1.3.11 que $c_{\lambda,\mu} \to c_\mu$ quando $\lambda \to +\infty$. Para cada $\mu > 0$ fixado, existe $\lambda^* = \lambda^*(\mu)$ tal que

$$m(\mu) < 2c_{\lambda,\mu}, \quad \forall \lambda \geq \lambda^*,$$

mostrando o resultado desejado.

∎

Corolário 1.3.14 *Assumindo que $m(\mu) < 2c_{\lambda,\mu}$ e $u \in E_\lambda$ é um ponto crítico não trivial do funcional $I_{\lambda,\mu}$ com $I_{\lambda,\mu}(u) \leq m(\mu)$. Então, u é positiva ou u é negativa.*

Demonstração. Se $u^\pm \neq 0$, temos que $u^\pm \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$. De fato,

$$0 = I'_{\lambda_n,\mu}(u)u^+ = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla u^+ + V(x)uu^+)\,dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-2}uu^+\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-2}uu^+\,dx.$$

Observando que

$$I'_{\lambda_n,\mu}(u)u^+ = I'_{\lambda_n,\mu}(u^+)u^+,$$

tem-se, $I'_{\lambda_n,\mu}(u^+)u^+ = 0$ e, consequentemente, $u^+ \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$. Da mesma forma mostra-se que $u^- \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$. Agora, podemos concluir que

$$m(\mu) \geq I_{\lambda,\mu}(u) = I_{\lambda,\mu}(u^+) + I_{\lambda,\mu}(u^-) \geq 2c_{\lambda,\mu},$$

o que é um absurdo. O resultado segue pela aplicação do Princípio de Máximo em [33].

∎

Observação 1.3.15 *Como $I_{\lambda,\mu}$ é par, pelo último corolário, podemos supor que os pontos críticos não triviais de $I_{\lambda,\mu}$ são soluções positivas $(P_{\lambda,\mu})$.*

No que segue, fixamos $R > 2diam(\Omega)$ tal que $\Omega \subset B_R(0)$ e consideramos a função

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq R, \\ \frac{R}{t}, & t \geq R. \end{cases}$$

Além disso, definimos $\beta : H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^N$ por

$$\beta(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \xi(|x|)|u|^{2^*} x\,dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\,dx}.$$

Note que pela definição da função ξ, que a função baricentro β está bem definida.

Lema 1.3.16 *Existe $\widehat{\lambda} > 0$ tal que se $u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$ e $I_{\lambda,\mu}(u) \leq m(\mu)$, então $\beta(u) \in \Omega_r^+$ para todo $\lambda \geq \widehat{\lambda}$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe uma sequência $\lambda_n \to +\infty$ e $(u_n) \subset \mathcal{M}_{\lambda_n,\mu}$ com $I_{\lambda_n,\mu}(u_n) \leq m(\mu)$ e

$$\beta(u_n) \notin \Omega_r^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $(||u_n||_{\lambda_n})$ é limitada em $\mathbb{R}$, existe $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que a menos de subsequência,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{em } H^1(\mathbb{R}^N), \\ u_n(x) \to u(x) & \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \\ u_n \to u & \text{em } L^t_{loc}(\mathbb{R}^N) \quad \text{para} \quad t \in [1, 2^*). \end{cases}$$

Além disso,

$$||v_n||^2_{\lambda_n} = \mu |v_n|_q^q + |v_n|_{2^*}^{2^*} + o_n(1),$$

onde $v_n = u_n - u$. Pelo Corolário 1.3.6, $v_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, implicando que

$$||v_n||^2_{\lambda_n} = |v_n|_{2^*}^{2^*} + o_n(1).$$

Argumentando como na demonstração da Proposição 1.3.10, obtemos

$$||v_n||_{\lambda_n} \to 0 \Leftrightarrow ||u_n - u||_{\lambda_n} \to 0.$$

Este limite combinado com o Lema 1.3.2 implica que

$$u_n \to u \quad \text{in} \quad H^1(\mathbb{R}^N), \quad u \neq 0, \quad I'_\mu(u)u = 0 \quad \text{e} \quad I_{\lambda_n,\mu}(u_n) \to I_\mu(u). \tag{1.35}$$

Desse modo, $u \in \mathcal{M}_\mu$ e $I_\mu(u) \leq m(\mu)$. Aplicando o Lema 1.2.3, temos $\beta_0(u) \in \Omega^+_{r/2}$, o que é um absurdo, pois

$$\beta_0(u) = \lim_{n \to \infty} \beta_0(u_n) \notin \Omega^+_{r/2}.$$

Isto completa a demonstração.

■

1.4 Demonstração do Teorema 1.1.1

Seja $u_r \in H_0^1(B_r(0))$ uma função radialmente simétrica que verifica

$$I_{\mu,r}(u_r) = m(\mu) = \inf_{u \in \mathcal{M}_r} I_{\mu,r}(u) \quad \text{e} \quad I'_{\mu,r}(u_r) = 0.$$

Usando a função u_r, definimos o operador $\Psi_r : \Omega_r^- \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ por

$$\Psi_r(y)(x) = \begin{cases} u_r(|x-y|), & x \in B_r(y), \\ 0, & x \in \Omega_r^- \setminus B_r(y), \end{cases}$$

Afirmação 1.4.1 *O operador Ψ_r é contínuo e satisfaz*

$$\beta(\Psi_r(y)) = y, \quad \forall\, y \in \Omega_r^-. \tag{1.36}$$

A continuidade de Ψ_r segue da continuidade da função u_r. Note que, para cada $y \in \Omega_r^-$,

$$\beta(\Psi_r(y)) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \xi(|x|)|\Psi_r(y)|^{2^*} x\, dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_r(y)|^{2^*}\, dx}.$$

Observe que se

$$x \in B_r(y)^c \text{ tem-se } \Psi_r(y)(x) = 0,$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \xi(|x|)|\Psi_r(y)|^{2^*} x\, dx = \int_{B_r(y)} \xi(|x|)|\Psi_r(y)|^{2^*} x\, dx.$$

Assim, se $x \in B_r(y)$ então $|x-y| < r$. Como fixamos $R > 2diam(\Omega)$ tal que $\Omega \subset B_R(0)$, temos $|x| < r + |y| < R$ e consequentemente $\xi(|x|) = 1$. Desta informação, deduzimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \xi(|x|)|\Psi_r(y)|^{2^*} x\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_r(y)|^{2^*} x\, dx.$$

Usando a definição $\Psi_r(y)$ segue que

$$\beta(\Psi_r(y)) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|x-y|)|^{2^*} x\, dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|x-y|)|^{2^*}\, dx}.$$

Fazendo uma mudança de variáveis, segue que

$$\begin{aligned}
\beta(\Psi_r(y)) &= \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*}(z+y)\,dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*}\,dz} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} y\,dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*}\,dz} + \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} z\,dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*}\,dz} \\
&= y\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*}\,dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*}\,dz} + \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} z\,dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*}\,dz} \\
&= y + \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} z\,dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*}\,dz}.
\end{aligned}$$

Note que

$$u_r(z) = 0 \text{ se } z \in B_r(0)^c.$$

Sendo assim, z deve verificar $|z| < r < R$ o que implica em $\xi(|z|) = 1$. Desse modo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|z|)|^{2^*} z\,dz = \int_{\mathbb{R}^N} \xi(|z|)|u_r(|z|)|^{2^*} z\,dz = \beta(u_r).$$

Portanto,

$$\beta(\Psi_r(y)) = y + \beta(u_r).$$

Como u_r é radial, isto é, $\beta(u_r) = 0$, concluímos que $\beta(\Psi_r(y)) = y$, o que mostra a afirmação.

Usando as informações acima, provaremos a seguinte afirmação:

Afirmação 1.4.2 *Para* $0 < \mu < \mu^*$,

$$cat(I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)}) \geq cat(\Omega),$$

onde $I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)} := \{u \in \mathcal{M}_{\lambda,\mu}\,;\, I_{\lambda,\mu}(u) \leq m(\mu)\}$ *e* μ^* *é dado no Lema 1.2.3.*

Se $cat(I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)}) = \infty$, o resultado é imediato. Assumimos que $cat(I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)}) = n$, isto é,

$$I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)} = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n,$$

onde F_j é fechado e contrátil em $I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)}$, para cada $j = 1, 2, ..., n$, isto é, existe $h_j \in C([0,1] \times F_j, I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)})$ e $w_j \in F_j$ tais que

$$h_j(0,u) = u \quad \text{e} \quad h_j(1,u) = w_j,$$

para todo $u \in F_j$. Considere os conjuntos $B_j := \Psi_r^{-1}(F_j)$, $1 \leq j \leq n$. Sendo Ψ_r contínua, os conjuntos B_j são fechados e segue que

$$\Omega_r^- = \Psi_r^{-1}(I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)}) = \Psi_r^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^n F_j\right) = \bigcup_{j=1}^n \Psi_r^{-1}(F_j) = \bigcup_{j=1}^n B_j.$$

Defina agora aplicação $g_j : [0,1] \times B_j \to \Omega_r^+$ dada por

$$g_i(t,y) = \beta(h_j(t,\Psi_r(y))),$$

e observe que:

(a) A aplicação g_j está bem definida. Tomando $t \in [0,1]$ e $y \in B_j = \Psi_r^{-1}(F_j)$ tem-se $\Psi_r(y) \in F_j$. Logo, $h_j(t,y)$ está bem definida e $h_j(t,y) \in I_{\lambda,\mu}^{m(\mu)}$. Além disso, pelo Lema 1.3.16, existe $\widehat{\lambda} > 0$ tal que

$$\beta(h_j(t,\Psi_r(y))) \in \Omega_r^+, \quad \forall \lambda \geq \widehat{\lambda};$$

(b) A continuidade de g_j segue da continuidade das funções β, h_j e Ψ. Todas estas funções são contínuas;

(c) Note que

$$g_j(0,y) = \beta(h_j(0,\Psi_r(y))) = \beta(\Psi_r(y)) = y, \quad \forall y \in B_j$$

e

$$g_j(1,y) = \beta(h_j(1,\Psi_r(y))) = \beta(w_j), \quad \forall y \in B_j.$$

Portanto, B_j é contrátil em Ω_r^+, para todo $1 \leq j \leq n$, donde segue que

$$cat(\Omega) = cat_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-) \leq n.$$

finalizando a demonstração da afirmação.

Como $I_{\lambda,\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ sobre $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}$ para $c \leq m(\mu)$ (veja Corolário 1.3.8), podemos aplicar a Categoria de Lusternik-Schnirelmann na Afirmação 1.4.2 para garantir que $I_{\lambda,\mu}$ tem pelo menos $cat(\Omega)$ de pontos críticos sobre $\mathcal{M}_{\lambda,\mu}$ e, consequentemente, $cat(\Omega)$ pontos críticos em E_λ.

Capítulo 2

Existência de solução para uma classe de desigualdades variacionais com potencial Bartsch-Wang: Parte I

2.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a existência de soluções não triviais para a seguinte desigualdade variacional: encontrar $u \in \mathbb{K}$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v-u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda V(x)) u(v-u)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(v-u)\, dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \tag{2.1}$$

onde

$$\mathbb{K} = \{v \in E;\ v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

$\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com parte positiva não trivial e $supp\, \varphi^+ \subset \Omega$, $\lambda > 0$ é um parâmetro e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando as seguintes condições:

(V_1) $V(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N$;

(V_2) $\Omega := int(V^{-1}(\{0\})) \neq \emptyset$ é um subconjunto aberto conexo limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave;

(V_3) Existe $M_0 > 0$ tal que o conjunto $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^N;\ V(x) \leq M_0\}$ é não vazio e tem medida finita.

Com relação a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assumimos as seguintes condições: Se $N \geq 3$, f é da forma

$$f(t) = \mu|t|^{q-2}t + |t|^{2^*-2}t, \tag{2.2}$$

onde $2^* = 2N/(N-2)$ e $2 < q < 2^*$.

Se $N = 2$, f é de classe de C^1 e tem crescimento crítico exponencial, isto é, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} = \begin{cases} 0, & \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \alpha < \alpha_0 \end{cases}$$

Assumimos também as seguintes condições

(f_1) $\dfrac{f(t)}{t} \to 0$ quando $|t| \to 0$;

(f_2) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(t) := \theta \int_0^t f(s)\,ds \leq f(t)t,\ s \neq 0;$$

(f_3) Existem $C > 0$ tal que

$$|f'(t)| \leq Ce^{\alpha_0 t^2},\ t \in \mathbb{R};$$

(f_4) Existem $p > 2$ e uma constante $\nu > 0$ tais que

$$f(t) \geq \nu t^p,\ \forall t \geq 0.$$

No que segue, supomos sem perda de generalidade $f(t) = 0$, para $t \leq 0$.

Conforme falamos na introdução, a nossa motivação pelo estudo do problema (2.1) vem dos recentes trabalhos envolvendo a seguinte classe de problemas

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u = f(u), \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

mais especificamente, do trabalho Bartsch & Wang [14] e dos poucos trabalhos encontrados na literatura de desigualdades variacionais em domínios ilimitados.

Nossa contribuição, em relação ao problema (2.1), foi demonstrar a existência de uma solução não trivial para o mesmo, considerando os casos $N \geq 3$ e $N = 2$.

O principal resultado deste capítulo é o teorema que enunciaremos a seguir.

Teorema 2.1.1 *Assuma que V satisfaz $(V_1) - (V_3)$ e f satisfaz $(f_1) - (f_4)$ se $N = 2$. Então existem $\lambda_* > 0$, $\mu_* > 0$, $\nu_* > 0$ e $\rho > 0$ tais que se $||\varphi|| < \rho$, o problema (2.1) tem solução u_λ não trivial para $\lambda \geq \lambda_*$, $\mu \geq \mu_*$ e $\nu \geq \nu_*$. Além disso, a família $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda_*}$ tem a seguinte propriedade: para qualquer subsequência $\lambda_n \to +\infty$, podemos extrair uma subsequência (λ_n) tal que a sequência (u_{λ_n}) converge forte em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para uma função u que verifica $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e é solução da seguinte desigualdade variacional*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (v - u)\, dx + \int_\Omega u(v - u)\, dx \geq \int_\Omega f(u)u(v - u)\, dx,$$

para todo $v \in \tilde{\mathbb{K}}$, onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega);\ v \geq \varphi \ q.t.p.\ em\ \Omega\}.$$

Com o propósito de demonstrar o Teorema 2.1.1, utilizaremos o método de penalização devido Bensoussan & Lions [16] e melhorado por Carl, Le & Motreanu [18], Teorema do Passo da Montanha devido Willem [60] e o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti & Rabinowitz [8].

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na primeira seção, introduzimos alguns resultados preliminares e a formulação do método de penalização para o Problema (2.1). Na Seção 2.2, demonstraremos o Teorema 2.1.1 para caso $N \geq 3$. Inicialmente, penalizamos o Problema (2.1) o qual chamaremos de problema penalizado. Logo após, iremos mostrar que o mesmo possui solução não trivial. Para isso, mostraremos que o funcional energia verifica a geometria do passo da montanha e também a condição $(PS)_c$ para alguns valores de c. Em seguida, trabalhamos com a sequência de soluções do problema penalizado combinado com o operador de penalização para obtermos, a menos de subsequência, uma convergência forte em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Através desta convergência, garantimos uma solução não trivial para a desigualdade variacional (2.1). Além disso, estabelecemos um resultado de concentração para uma sequência de soluções (u_λ) da Desigualdade Variacional (2.1) o que de fato demonstra o Teorema 2.1.1. Na Seção 2.3, o objetivo é provar o Teorema 2.1.1 para o caso $N = 2$. Seguimos os mesmos passos da Seção 2.3 com os devidos ajustes e faremos uso de uma versão da desigualdade de Trundiger & Moser em todo $\mathbb{R}^2$, devido a Cao [17].

2.2 Resultados preliminares

Seja $E \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ definido por

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N);\ \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2\, dx < +\infty \right\}$$

munido da norma

$$||u||_\lambda = \left(\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + (1 + \lambda V(x))|u|^2]\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

a qual está associada com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + (1 + \lambda V(x))uv]\, dx.$$

Mostra-se que E é um espaço de Hilbert, para todo $\lambda \geq 0$. Ao longo deste capítulo, denotemos por E_λ, o espaço E com a norma $||\ \ ||_\lambda$.

As condições $(V_1) - (V_2)$ implicam que E_λ satisfaz

$$||u||_\lambda \geq ||u||, \quad \forall u \in E_\lambda \quad \text{e} \quad \forall \lambda > 0.$$

Portanto, a imersão $E_\lambda \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ é contínua para $\lambda > 0$, de onde segue

$$E_\lambda \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N), \quad \forall s \in [2, 2^*],$$

também são contínuas para $\lambda > 0$.

Para resolvermos o problema (2.1), usaremos o método de penalização encontrado em Carl, Le e Motreanu em [18]. Iniciaremos definindo o que é um operador de penalização.

Definição 2.2.1 *Seja C um subconjunto não vazio, fechado e convexo de um espaço de Banach X. Um operador $P : X \to X'$ é chamado operador de penalização associado com $C \subset X$ se verifica:*

(P_1) *A função real*

$$t \mapsto \langle P(u + tv), w \rangle$$

é contínua sobre $[0, 1]$, para todos u, v, $w \in X$;

(P_2) *Temos*

$$\langle P(u) - P(v), u - v \rangle \geq 0,$$

para todos u, $v \in X$;

(P_3) *$P(u) = 0$ se, e somente se, $u \in C$;*

(P_4) *O operador P leva conjuntos limitados de X em conjuntos limitados.*

O próximo passo consiste em penalizar o problema (2.1). Para isso, considere a seguinte classe de problemas elípticos

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u - \frac{1}{\epsilon}(\varphi - u)^+ \chi_\Omega = f(u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{2.3}$$

Recordamos que u é uma solução fraca de (2.3) quando verifica a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + (1 + \lambda V(x))uv]\, dx - \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u)^+ v\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v\, dx, \ \forall v \in E_\lambda, \tag{2.4}$$

onde $\epsilon > 0$ é o parâmetro de penalização, enquanto $\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u)^+ v\, dx$ é o termo de penalização.

No que segue consideramos o operador $P : E_\lambda \to E'_\lambda$ definido por

$$\langle P(u), v \rangle = -\int_\Omega (\varphi - u)^+ v\, dx.$$

Lema 2.2.2 *O operador P definido acima é um operador de penalização associado ao conjunto $\mathbb{K} \subset E_\lambda$.*

Demonstração. Vamos iniciar por (P_1). Dados u, v, $w \in E_\lambda$, definimos a função $p : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(t) = \langle P(u + tv), w \rangle.$$

Seja $(t_n) \subset [0, 1]$ verificando $t_n \to t_0$, onde $t_0 \in [0, 1]$. Então,

$$p(t_n) = -\int_\Omega (\varphi - (u + t_n v))^+ w\, dx \text{ e } p(t_0) = -\int_\Omega (\varphi - (u + t_0 v))^+ w\, dx.$$

Nosso objetivo é mostrar $p(t_n) \to p(t_0)$, nesse sentido, observe que

$$|p(t_n) - p(t_0)| \leq \int_\Omega |(\varphi - (u + t_n v))^+ - (\varphi - (u + t_0 v))^+||w|\, dx.$$

Perceba que

$$|(\varphi - (u + t_n v))^+ - (\varphi - (u + t_0 v))^+||w| \leq 2|\varphi||w| + 2|u||w| + 2|v||w|$$

e

$$|(\varphi(x) - (u(x) + t_n v(x)))^+ - (\varphi(x) - (u(x) + t_0 v(x)))^+||w(x)| \to 0 \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

isso mostra que estamos sob as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, e portanto,

$$|p(t_n) - p(t_0)| \to 0,$$

o que mostra a condição (P_1).

Agora para mostrar (P_2) analisaremos pontualmente e dividimos em quatro casos. Dados u, $v \in E_\lambda$ e fixe $x \in \Omega$

(i) Se $\varphi(x) \leq u(x)$ e $\varphi(x) \leq v(x)$,

$$-(\varphi - u)^+(x)(u - v)(x) + (\varphi - v)^+(x)(u - v)(x) = 0$$

(ii) Se $v(x) \geq \varphi(x) \geq u(x)$

$$-(\varphi - u)^+(x)(u - v)(x) + (\varphi - v)^+(x)(u - v)(x) = -(\varphi - u)^+(x)(u - v)(x) \geq 0$$

(iii) Se $u(x) \geq \varphi(x) \geq v(x)$

$$-(\varphi - u)^+(x)(u - v)(x) + (\varphi - v)^+(x)(u - v)(x) = (\varphi - v)^+(x)(u - v)(x) \geq 0$$

(iv) Se $\varphi(x) \geq u(x)$ e $\varphi(x) \geq v(x)$,

$$-(\varphi - u)^+(x)(u - v)(x) + (\varphi - v)^+(x)(u - v)(x) = (u - v)^2(x) \geq 0,$$

de todas as análises feitas o operador P satisfaz (P_2).

Vamos justificar a condição (P_3). Seja $u \in E_\lambda$ com $P(u) = 0$, isto é,

$$\langle P(u), v\rangle = -\int_\Omega (\varphi - u)^+ v \, dx = 0, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Em particular,

$$\int_\Omega (\varphi - u)^+ v \, dx = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Pelo Lema Fundamental das Distribuições tem-se $(\varphi - u)^+ = 0$ q.t.p. em Ω, ou seja, $u \geq \varphi$ q.t.p. em Ω. Isto mostra que $u \in \mathbb{K}$. Por outro lado, se $u \in \mathbb{K}$, imediatamente temos $P(u) = 0$. Portanto, está mostrado a condição (P_3).

Para finalizarmos a demonstração do lema, falta mostra condição (P_4). Seja $\Sigma \subset E_\lambda$ um conjunto limitado, isto é, existe $L > 0$

$$||u|| \leq L, \quad \forall u \in \Sigma.$$

Dada $u \in \Sigma$ e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$|\langle P(u), v\rangle| \leq |(\varphi - u)^+|_2 |v|_2.$$

Usando as imersões contínuas de Sobolev

$$E_\lambda \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N), \quad \forall s \in [2, 2^*]$$

existe uma constante $C > 0$ tal que a última desigualdade fica

$$|\langle P(u), v\rangle| \leq C||(\varphi - u)^+||_\lambda ||v||_\lambda,$$

ou ainda,

$$|\langle P(u), v\rangle| \leq C(||\varphi||_\lambda + ||u||_\lambda)||v||_\lambda.$$

Logo,

$$||P(u)||_{E'_\lambda} \leq C(L + ||\varphi||),$$

mostrando que P verifica a condição (P_4). Portanto, P é um operador de penalização associado ao conjunto $\mathbb{K}$.

$\blacksquare$

2.3 Demonstração do Teorema 2.1.1 para o caso $N \geq 3$

Relembrando que a desigualdade (2.1) que estamos estudando nesta seção é a seguinte: encontrar $u \in \mathbb{K}$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v-u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda V(x))u(v-u)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (\mu u^{q-1} + u^{2^*-1})(v-u)\, dx, \ \forall v \in \mathbb{K}$$

O problema penalizado associado a desigualdade acima é

$$-\Delta u + (1+\lambda V(x))u - \frac{1}{\epsilon}(\varphi - u)^+ \chi_\Omega = \mu u^{q-1} + u^{2^*-1}, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

As soluções fracas do problema penalizado podem ser encontradas como pontos críticos do funcional $I_{\lambda,\epsilon} : E_\lambda \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) = \frac{1}{2}||u||^2_\lambda + \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega [(\varphi - u)^+]^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} F_+(u)\, dx$$

o qual está bem definido e é de classe C^1 sobre o espaço E_λ com a derivada dada por

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u)v = \langle u, v\rangle_\lambda - \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u)^+ v\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} f_+(u)v\, dx,$$

$\forall u, v \in E_\lambda$, onde

$$f_+(t) = \mu(t^+)^{q-1} + (t^+)^{2^*-1} \quad \text{e} \quad F_+(t) = \int_o^t f_+(s)ds.$$

2.3.1 Solução para o problema penalizado (2.3)

Iniciamos mostrando a geometria do passo da montanha para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$.

Lema 2.3.1 (a) *Existem contantes $r, \rho > 0$, as quais são independentes de λ e ϵ, tais que*

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \rho \quad \textit{para} \quad \|u\|_\lambda = r;$$

(b) *Existe $e \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|e\|_\lambda > r$ e $I_{\lambda,\epsilon}(e) < 0$.*

Demonstração. Primeiramente, note que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \frac{1}{2}||u||_\lambda^2 - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q\, dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\, dx \quad u \in E_\lambda.$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N), \quad \text{para} \ \ 2 \leq s \leq 2^*. \tag{2.5}$$

existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \frac{1}{2}||u||_\lambda^2 - \frac{C_1\mu}{q}||u||_\lambda^q - \frac{C_2}{2^*}||u||_\lambda^2.$$

Uma vez que $2 < q < 2^*$, existem $\rho > 0$ e $r > 0$ tais que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \rho > 0 \quad \text{para} \quad ||u||_\lambda = r.$$

Isso mostra (a). Agora, observe que

$$\int_\Omega [(\varphi - \varphi^+)^+]^2\, dx = 0 \quad \text{e} \quad ||\varphi^+||_\lambda = ||\varphi^+||.$$

Logo,

$$I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+) \leq ||\varphi^+||^2 \leq ||\varphi||^2.$$

Como por hipótese fixamos $||\varphi||$ suficientemente pequena em relação ρ, temos

$$I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+) < \rho.$$

Por outro lado para $t > 1$

$$I_{\lambda,\epsilon}(t\varphi^+) = \frac{t^2}{2}||\varphi^+||_\lambda^2 - \frac{t^q\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi^+|^q\, dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi^+|^{2^*}\, dx.$$

Sendo $2 < q < 2^*$, obtemos $I_{\lambda,\epsilon}(t\varphi^+) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Assim, fixando $t_* > 0$ suficientemente grande e $w = (1 + t_*)\varphi^+$ tem-se

$$I_{\lambda,\epsilon}(w) < I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+) < \rho \leq I_{\lambda,\epsilon}(u), \quad \text{com} \quad ||u||_\lambda = r$$

e

$$||\varphi^+||_\lambda < r < ||w||_\lambda.$$

Em vista disso, concluímos o lema.

■

Aplicando o Teorema do Passo da Montanha devido Willem [60], garantimos a existência de uma sequência $(PS)c_{\lambda,\epsilon}$ para $I_{\lambda,\epsilon}$, isto é, uma sequência $(u_n) \subset E_\lambda$ verificando

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) \to c_{\lambda,\epsilon} \text{ e } I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) \to 0,$$

onde

$$c_{\lambda,\epsilon} = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t))$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E);\ \gamma(0) = \varphi^+ \text{ e } \gamma(1) = w\}.$$

Lema 2.3.2 *Existem $\tau > 0$ e $\mu_* = \mu_*(\tau) > 0$ tais que*

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < \frac{q-2}{2q}S^{N/2} - \tau, \quad \forall\lambda > 0, \quad \forall\epsilon > 0 \quad e \quad \mu \geq \mu_*.$$

Demonstração. Considere o caminho $\gamma : [0,1] \to E_\lambda$ definido por $\gamma(t) = (1 + tt_*)\varphi^+$. Claramente, $\gamma \in \Gamma$. Como $(1 + tt_*)\varphi^+ \geq \varphi$,

$$\int_\Omega [(\varphi - (1 + tt_*)\varphi^+)^+]^2\, dx = 0$$

e

$$I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t)) = \frac{(1 + tt_*)^2}{2}||\varphi^+||^2 - \frac{(1 + tt_*)^q\mu}{q}\int_\Omega |\varphi^+|^q\, dx - \frac{(1 + tt_*)^{2^*}}{2^*}\int_\Omega |\varphi^+|^{2^*}\, dx.$$

Note que

$$I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t)) \leq \frac{(1+tt_*)^2}{2}||\varphi^+||^2 - \frac{(1+tt_*)^q\mu}{q}\int_\Omega |\varphi^+|^q\,dx.$$

Para deixar o cálculo mais simples, chamamos $A = ||\varphi^+||/2$ e $B = |\varphi^+|_q^q/q$ e consideramos as funções

$$j_\mu(t) = A(1+tt_*)^2 - \mu B(1+tt_*)^q, \quad t \in [0,\infty)$$

e

$$h_\mu(t) = At^2 - \mu Bt^q, \quad t \in [0,\infty).$$

Perceba que $j_\mu(t) = h_\mu(1+tt_*)$ e

$$h'_\mu(t) = 2At - \mu Bqt^{q-1}, \quad q > 2.$$

Fazemos $h'_\mu(t) = 0$, isso nos dá $2At - \mu Bqt^{q-1} = 0$. Fazendo algumas manipulações algébricas encontramos

$$t = \Big(\frac{2A}{\mu Bq}\Big)^{1/(q-2)}.$$

Denotamos este ponto

$$t_\mu = \Big(\frac{2A}{\mu Bq}\Big)^{1/(q-2)}.$$

Fazendo o estudo com a função h_μ podemos garantir que t_μ é um ponto de máximo que verifica

$$h_\mu(t_\mu) = \frac{A}{\mu^{2/(q-2)}}\Big(\frac{2A}{Bq}\Big)^{2/(q-2)} - \frac{\mu B}{\mu^{q/(q-2)}}\Big(\frac{2A}{Bq}\Big)^{q/(q-2)}.$$

Como $\frac{\mu}{\mu^{q/(q-2)}} = \frac{1}{\mu^{2/(q-2)}}$, quando $\mu \to \infty$ segue que

$$h_\mu(t_\mu) \to 0.$$

Recorde,

$$j_\mu(t) = h_\mu(1+tt_*) \leq h_\mu(t_\mu).$$

Com as últimas duas informações, obtemos

$$c_{\lambda,\epsilon} \leq \max_{t\geq 0} j_\mu(t) = \max_{t\geq 1} h_\mu(t) \leq \max_{t\geq 0} h_\mu(t) = h_\mu(t_\mu) < \frac{q-2}{2q}S^{N/2} - \tau$$

para todo $\lambda > 0$ e para todo $\mu \geq \mu_*$ onde fixamos μ_* suficientemente grande, finalizando a demonstração.

$\blacksquare$

Enunciaremos alguns lemas envolvendo o comportamento das sequências $(PS)_c$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$.

Lema 2.3.3 *Se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$, então (u_n) é limitada.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$. Então

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \tfrac{1}{q}I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)||u_n||_\lambda^2 + \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega [(\varphi-u_n)^+]^2\,dx \\ &+ \frac{1}{q\epsilon}\int_\Omega (\varphi-u_n)^+u_n\,dx + \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*}\,dx. \end{aligned}$$

Note que

$$[(\varphi-u_n)^+]^2 + (\varphi-u_n)^+u_n \geq (\varphi-u_n)^+\varphi$$

e

$$\frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega [(\varphi-u_n)^+]^2\,dx \geq \frac{1}{q\epsilon}\int_\Omega [(\varphi-u_n)^+]^2\,dx.$$

Usando tais informações, segue que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q}I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \geq \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\Big)||u_n||_\lambda^2 + \frac{1}{q\epsilon}\int_\Omega (\varphi-u_n)^+\varphi\,dx$$

ou ainda,

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q}I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \geq \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\Big)||u_n||_\lambda^2 - \frac{1}{q\epsilon}\int_\Omega |\varphi-u_n||\varphi|\,dx.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev, existe uma constante positiva C tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q}I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \geq \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\Big)||u_n||_\lambda^2 - \frac{1}{q\epsilon}|\varphi|_2^2 - \frac{C}{q\epsilon}|\varphi|_2^2||u_n||_\lambda. \tag{2.6}$$

Por outro lado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q}I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \leq c + o_n(1) + o_n(1)||u_n||_\lambda \quad n \geq n_0. \tag{2.7}$$

Das condições (2.6) e (2.7),

$$\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\Big)||u_n||_\lambda^2 \leq c + o_n(1) + \frac{1}{q\epsilon}|\varphi|_2^2 + \big(o_n(1) + \frac{C}{q\epsilon}|\varphi|_2^2\big)||u_n||_\lambda$$

para $n \geq n_0$, o que garante a limitação da sequência (u_n).

$\blacksquare$

Lema 2.3.4 *Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência* (u_n) *dada pelo Lema 2.3.3 pode ser considerada como uma sequência de funções não negativas, ou seja,* (u_n^+) *é uma sequência* $(PS)_c$*.*

Demonstração. De fato, sendo (u_n) limitada, então $u_n^- = u_n - u_n^+$ também é limitada. Observe que

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n^- = \frac{1}{2}||u_n^-||_\lambda^2 - \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u_n)^+ u_n^- \, dx \geq \frac{1}{2}||u_n^-||_\lambda^2.$$

Recordando que $I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n^- \to 0$, ficamos com

$$||u_n^-||_\lambda^2 \to 0. \tag{2.8}$$

Assim, de (2.8)

$$||u_n||_\lambda^2 = ||u_n^+||_\lambda^2 + o_n(1). \tag{2.9}$$

Nossa intenção é mostrar (u_n^+) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$. Sendo (u_n) limitada e E_λ um espaço de Hilbert, existem uma subsequência (u_n) e $u \in E_\lambda$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad E_\lambda.$$

Consequentemente,

$$u_n \to u \quad L^s(\Omega), \quad \text{para} \quad 2 \leq s < 2^*$$

e

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p.} \quad \Omega.$$

Por (2.8), a menos de subsequência

$$u_n^-(x) \to 0 \quad \text{q.t.p.} \quad \Omega.$$

Deduzimos destas informações que a menos de subsequência

$$u_n^+ \to u \quad L^s(\Omega), \quad \text{para} \quad 2 \leq s < 2^*$$

e

$$u_n(x)^+ \to u(x) \quad \text{q.t.p.} \quad \Omega.$$

Afirmação 2.3.5

$$\int_\Omega [(\varphi - u_n)^+]^2\, dx - \int_\Omega [(\varphi - u_n^+)^+]^2\, dx = o_n(1).$$

Observe

$$\Big| \int_\Omega [(\varphi - u_n)^+]^2\, dx - \int_\Omega [(\varphi - u_n^+)^+]^2\, dx \Big| \leq \int_\Omega |[(\varphi - u_n)^+]^2 - [(\varphi - u_n^+)^+]^2|\, dx.$$

É possível mostrar do estudo feito da sequência (u_n) que existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_n|$, $|u_n^+| \leq g$. Assim,

$$|[(\varphi - u_n)^+]^2 - [(\varphi - u_n^+)^+]^2| \leq 4|\varphi| + 4|u_n| + 4|u_n^+| \leq 8|\varphi| + 8g.$$

Além disso, podemos mostrar que

$$|[(\varphi - u_n)^+]^2 - [(\varphi - u_n^+)^+]^2|(x) \to 0 \ \text{ q.t.p. } \ \Omega.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue a afirmação está provada. Vejamos agora que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - I_{\lambda,\epsilon}(u_n^+) = \frac{1}{2}||u_n||_\lambda - \frac{1}{2}||u_n^+||_\lambda + \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega [(\varphi - u_n)^+]^2\, dx - \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega [(\varphi - u_n^+)^+]^2\, dx$$

Por (2.9) e pela Afirmação 2.3.5,

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) = I_{\lambda,\epsilon}(u_n^+) + o_n(1). \tag{2.10}$$

Sem maiores dificuldades, mostra-se

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) = I'_{\lambda,\epsilon}(u_n^+) + o_n(1). \tag{2.11}$$

De (2.10) e (2.11), (u_n^+) é uma sequência $(PS)_c$.

■

Lema 2.3.6 *Sendo (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$ então a mesma verifica*

$$\limsup_{n\to+\infty} ||u_n||_\lambda^2 \leq \Big(\frac{2q}{q-2}\Big)c.$$

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \tfrac{1}{q}I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)||u_n||_\lambda^2 + \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega [(\varphi-u_n)^+]^2\,dx \\ &+ \frac{1}{q\epsilon}\int_\Omega (\varphi-u_n)^+u_n\,dx + \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2^*}\,dx. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.3.4 podemos supor $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, assim

$$\int_\Omega (\varphi-u_n)^+u_n\,dx \geq 0,$$

e com isso,

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q}I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)||u_n||_\lambda^2.$$

Por outro lado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q}I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \leq c + o_n(1) + o_n(1)||u_n||_\lambda \quad n \geq n_0.$$

Fazendo as mesmas manipulações algébricas que foi feita no Lema 2.3.3 encontramos

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)||u_n||_\lambda^2 \leq c + o_n(1) + o_n(1)||u_n||_\lambda \quad \forall n \geq n_0.$$

De onde segue o lema.

■

O próximo lema constitui um ponto chave para mostrar a a condição $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$.

Lema 2.3.7 *Seja $\Theta > 0$ uma constante que não depende de λ. Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E_\lambda$ é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$ com $0 \leq c \leq \Theta$. Então dado $\delta > 0$ existem $\lambda_* = \lambda_*(\delta) > 0$ e $R = R(\delta,\Theta)$ tais que*

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{B_R^c(0)}|u_n|^q\,dx < \delta, \quad \forall\lambda \geq \lambda_*$$

.

Omitimos a demonstração por se tratar da mesma feita no Lema 1.3.5. Como observado no Capítulo 1, o corolário a seguir segue do Lema 2.3.7.

Corolário 2.3.8 *Seja $(v_n) \subset E_\lambda$ uma sequência tal que $(\|v_n\|_{\lambda_n})$ é limitada com $\lambda_n \to +\infty$. Se $v_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então*

$$v_n \to 0 \quad em \quad L^q(\mathbb{R}^N).$$

A proposição seguinte é fundamental para obtenção de solução do problema penalizado (2.3).

Proposição 2.3.9 *Existe* $\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda}(\tau) > 0$ *tal que* $I_{\lambda,\epsilon}$ *verifica a condição* $(PS)c_{\lambda,\epsilon}$ *para qualquer* $c_{\lambda,\epsilon} \in \left(0, \frac{q-2}{2q}S^{N/2} - \tau\right)$ *para todo* $\lambda \geq \widehat{\lambda}$*, onde* τ *foi dado no Lema 2.3.1.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$ não negativa para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$, isto é,

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) \to c_{\lambda,\epsilon}$$

e

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) \to 0.$$

Pelo Lema 2.3.3, (u_n) é limitada. Então para alguma subsequência existe $u \in E_\lambda$ tal que podemos assumir os seguintes fatos:

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ E_\lambda,$$

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$u_n \to u \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^N), \ 2 \leq s < 2^*.$$

Essa última convergência significa que dado qualquer aberto limitado $\Theta \subset \mathbb{R}^N$ tem-se

$$u_n \to u \text{ em } L^s(\Theta), \ 2 \leq s < 2^*.$$

Com algumas manipulações algébricas é possível mostrar que $I'_{\lambda,\epsilon}(u) = 0$, e assim, $I'_{\lambda,\epsilon}(u)u = 0$. Por Brezís & Lieb (ver [38])

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx + o_n(1) \tag{2.12}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} \, dx + o_n(1), \tag{2.13}$$

onde $v_n = u_n - u$. Recorde,

$$\frac{1}{2}||u_n||^2_\lambda + \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega [(\varphi - u_n)^+]^2 \, dx - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \, dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \, dx = c_{\lambda,\epsilon} + o_n(1). \tag{2.14}$$

Usando a mesma argumentação feita na demonstração da Afirmação 2.3.5, temos

$$\int_\Omega [(\varphi - u_n)^+]^2 \, dx = \int_\Omega [(\varphi - u)^+]^2 \, dx + o_n(1). \tag{2.15}$$

Substituindo (2.12), (2.13) e (2.15) em (2.14) encontramos

$$\frac{1}{2}||u_n||_\lambda^2 - \frac{\mu}{q}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^q\,dx + \int_{\mathbb{R}^N}|u|^q\,dx\right) - \frac{1}{2^*}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{2^*}\,dx + \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\,dx\right) =$$
$$-\frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega[(\varphi-u)^+]^2\,dx + c_{\lambda,\epsilon} + o_n(1),$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2}||u_n||_\lambda^2 - \frac{1}{2}||u||_\lambda^2 + I_{\lambda,\epsilon}(u) - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^q\,dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{2^*}\,dx = c_{\lambda,\epsilon} + o_n(1).$$

Desde que

$$||v_n||_\lambda^2 = ||u_n||_\lambda^2 - ||u||_\lambda^2 + o_n(1),$$

temos

$$\frac{1}{2}||v_n||_\lambda^2 - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^q\,dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{2^*}\,dx = c_{\lambda,\epsilon} - I_{\lambda,\epsilon}(u) + o_n(1). \tag{2.16}$$

Por outro lado, $I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n = o_n(1)$, ou seja,

$$\frac{1}{2}||u_n||_\lambda^2 - \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega(\varphi-u_n)^+u_n\,dx - \mu\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^q\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2^*}\,dx = o_n(1).$$

Mais uma vez, utilizando (2.12) e (2.13) a última expressão fica

$$||v_n||_\lambda^2 - \mu\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^q\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{2^*}\,dx + ||u||_\lambda^2 - \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega(\varphi-u)^+u\,dx - \mu\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\,dx = o_n(1),$$

ou ainda

$$||v_n||_\lambda^2 - \mu\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^q\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{2^*}\,dx + I'_{\lambda,\epsilon}(u)u = o_n(1).$$

Sabemos que $I'_{\lambda,\epsilon}(u)u = 0$, logo

$$||v_n||_\lambda^2 - \mu\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^q\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{2^*}dx = o_n(1). \tag{2.17}$$

De (2.17) podemos assumir

$$||v_n||_\lambda^2 \to L_\lambda$$

e

$$\mu\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^q\,dx + \int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{2^*}\,dx \to L_\lambda.$$

Se $L_\lambda = 0$ a proposição está provada. Suponha por contradição que $L_\lambda > 0$. Considerando

$$\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^q\,dx \to A_\lambda \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{2^*}\,dx \to B_\lambda,$$

devemos ter $\mu A_\lambda + B_\lambda = L_\lambda$. É possível mostrar uma versão do Lema 2.3.7 para a sequência (v_n), ou seja, mostra-se

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q \, dx = o_\lambda(1),$$

onde $o_\lambda(1) \to 0$ as $\lambda \to +\infty$. Desta forma,

$$A_\lambda = o_\lambda(1) \quad \text{and} \quad L_\lambda = B_\lambda + o_\lambda(1). \tag{2.18}$$

De (2.17) e das imersões contínuas de Sobolev

$$||v_n||_\lambda^2 \leq C\big(||v_n||_\lambda^q + ||v_n||_\lambda^{2^*}\big) + o_n(1). \tag{2.19}$$

Sem dificuldades é possível mostrar que existe $C > 0$ verificando

$$|t|^q \leq \frac{1}{2C}|t|^2 + C|t|^{2^*}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Como supomos $L_\lambda > 0$, a última desigualdade (2.19) implica em

$$\lim_{n\to+\infty} ||v_n||_\lambda^2 \geq (1/C)^{2/(2^*-2)} = C_1 > 0,$$

ou equivalentemente,

$$L_\lambda \geq C_1 > 0. \tag{2.20}$$

onde C_1 não depende de $\lambda > 0$. Sabemos que

$$S \leq \frac{||v_n||_\lambda^2}{\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx\Big)^{2/2^*}}.$$

Então, tomando o limite quando $n \to +\infty$, encontramos

$$S \leq \frac{L_\lambda}{(B_\lambda)^{2/2^*}} = \frac{L_\lambda}{(L_\lambda + o_\lambda(1))^{2/2^*}}.$$

Fazendo $\lambda \to +\infty$ na expressão acima, encontramos

$$S^{N/2} \leq \liminf_{\lambda\to\infty} L_\lambda. \tag{2.21}$$

De (2.16),

$$\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\Big)L_\lambda + o_\lambda(1) \leq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\Big)L_\lambda + o_\lambda(1) \leq c_{\lambda,\epsilon},$$

conduzindo a

$$\liminf_{\lambda\to\infty} c_{\lambda,\epsilon} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \liminf_{\lambda\to\infty} L_\lambda.$$

A última desigualdade combinada com (2.21) implica que

$$\liminf_{\lambda\to\infty} c_{\lambda,\epsilon} \geq \frac{q-2}{2q} S^{N/2}$$

o que é um absurdo, pois por hipótese

$$\limsup_{\lambda\to+\infty} c_{\lambda,\epsilon} \leq \frac{q-2}{2q} S^{N/2} - \tau < \frac{q-2}{2q} S^{N/2}.$$

Portanto, existe $\widehat{\lambda} > 0$ tal que $L_\lambda = 0$, para todo $\lambda \geq \widehat{\lambda}$, o que demonstra a proposição.

■

Agora mostraremos que problema penalizado (2.3) possui solução não trivial. Pelo Lema 2.3.2 existe $\mu_* > 0$ tal que $c_{\lambda,\epsilon} < \frac{q-2}{2q} S^{N/2}$, para todo $\mu \geq \mu_*$. A Proposição 2.3.9 garante a existência de $\widehat{\lambda} > 0$ tal que o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$ verifica a condição $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$ para todo $\lambda \geq \widehat{\lambda}$. Então, pelo Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti-Rabinowtz [8], existe $u_\epsilon \in E_\lambda$ verificando

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_\epsilon) = c_{\lambda,\epsilon} \quad \text{e} \quad I'_{\lambda,\epsilon}(u_\epsilon) = 0.$$

2.3.2 Finalização da demonstração do Teorema 2.1.1

Pelo estudo feito na seção anterior fixados $\lambda \geq \widehat{\lambda}$ e $\mu \geq \mu_*$, existe uma solução $u_\epsilon \in E_\lambda$ não trivial do problema (2.3) , ou seja, u_ϵ verifica

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_\epsilon \nabla v + (1+\lambda V(x)) u_\epsilon v]\, dx + \frac{1}{\epsilon}\langle P(u_\epsilon), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f_+(u_\epsilon) v\, dx,\ \forall v \in E_\lambda.$$

Recordamos a definição do operador de penalização

$$\langle P(u_\epsilon), v\rangle = -\int_\Omega (\varphi - u_\epsilon)^+ v\, dx.$$

Uma vez que $u_\epsilon \geq 0$, temos $f_+(u_\epsilon) = f(u_\epsilon)$, portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_\epsilon \nabla v + (1+\lambda V(x)) u_\epsilon v]\, dx + \frac{1}{\epsilon}\langle P(u_\epsilon), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_\epsilon) v\, dx,\ \forall v \in E_\lambda.$$

Por simplicidade, vamos fazer as seguintes escolhas:

$$\epsilon = 1/n, \quad u_n = u_{1/n} \quad I_{\lambda,\epsilon} = I_n, \quad I_n(u_n) = c_n,$$

onde $c_n = c_{\lambda,\epsilon}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que existe $u_n \in E_\lambda$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla v + (1+\lambda V(x)) u_n v]\, dx + n\langle P(u_n), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) v\, dx,\ \forall v \in E_\lambda. \quad (2.22)$$

Pelo estudo feito, a sequência (u_n) cumpre

$$\limsup_{n\to+\infty} ||u_n||^2 \leq \limsup_{n\to+\infty} ||u_n||_\lambda^2 \leq \Big(\frac{2q}{q-2}\Big)c_n \leq \frac{2q}{q-2}\Big(\frac{q-2}{2q}S^{N/2} - \tau\Big) < S^N, \quad (2.23)$$

onde τ foi dado no Lema 2.3.2. Diante disso, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u \;\text{ em }\; H^1(\mathbb{R}^N)$$

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

e

$$u_n \to u \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^N),\; 2 \leq s < 2^*.$$

Agora demonstraremos um importante resultado para nosso propósito.

Lema 2.3.10 $P(u) = 0$, *isto é,* $u \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Sabemos que $I_n'(u_n)v = 0$, para todo $v \in E_\lambda$. Assim,

$$n\langle P(u_n), v\rangle = -\langle u_n, v\rangle_\lambda + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v\,dx, \quad \forall v \in E_\lambda.$$

Relembrando a definição da f, a última igualdade fica

$$n|\langle P(u_n), v\rangle| \leq ||u_n||_\lambda ||v||_\lambda + \mu\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q-1}v\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*-1}v\,dx. \quad (2.24)$$

Utilizando a desigualdade de Hölder e logo após as imersões de Sobolev na desigualdade (2.24) deduzimos

$$|\langle P(u_n), v\rangle| \leq \frac{1}{n}\Bigg(||u_n||_\lambda ||v||_\lambda + C_1||u_n||_\lambda^{q-1}||v||_\lambda + C_2||u_n||_\lambda^{2^*-1}||v||_\lambda\Bigg).$$

Como sabemos que (u_n) é limitada, existe $C > 0$ tal que

$$|\langle P(u_n), v\rangle| \leq \frac{C}{n}||v||_\lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ou ainda,

$$||P(u_n)||_{E_\lambda'} \leq \frac{C}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com esta informação garantimos que

$$P(u_n) \to 0 \;\text{ em }\; E_\lambda'. \quad (2.25)$$

Pela condição (P_2),

$$\langle P(v) - P(u_n), v - u_n \rangle \geq 0, \quad \forall v \in E_\lambda$$

ou ainda,

$$\langle P(v), v - u_n \rangle - \langle P(u_n), v - u_n \rangle \geq 0, \quad \forall v \in E_\lambda$$

passando ao limite quando $n \to \infty$ nesta última desigualdade, por (2.25) segue que

$$\langle P(v), v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in E_\lambda. \tag{2.26}$$

Considerando $v = u + tw$, para $t > 0$ e $w \in E_\lambda$ arbitrário, obtemos

$$\langle P(u + tw), tw \rangle \geq 0, \quad \forall w \in E_\lambda$$

ou ainda,

$$\langle P(u + tw), w \rangle \geq 0 \quad \forall w \in E_\lambda.$$

Fazendo $t \to 0$ e usando a condição (P_1) tem-se

$$\langle P(u), w \rangle \geq 0, \quad \forall w \in E_\lambda,$$

mostrando que $P(u) = 0$, ou seja, $u \in \mathbb{K}$ finalizando a demonstração.

■

Sabemos que

$$\langle P(u_n), u_n - u \rangle = \langle P(u_n) - P(u), u_n - u \rangle \geq 0$$

Então usando este fato, escolhendo $v = u_n - u$ e substituindo em (2.22), ficamos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla (u_n - u) + (1 + \lambda V(x)) u_n (u_n - u)]\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n - u)\, dx. \tag{2.27}$$

Lema 2.3.11 *Para $\lambda \approx +\infty$, temos*

$$u_n \to u \quad em \quad H^1(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Nesta demonstração usaremos argumentos já conhecidos e também ideias da demonstração da Proposição 2.1. Até mesmo em alguns pontos, usaremos a mesma notação para que o leitor posso verificar sem dificuldades a conexão. Suponha por contradição que

$$u_n \nrightarrow u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N),$$

então a menos de subsequência

$$\lim_{n\to+\infty} ||u_n - u||^2 = L_\lambda > 0. \tag{2.28}$$

Afirmação 2.3.12 *A sequência (u_n) cumpre*

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \int_{\mathbb{R}^N} [f(u_n) - f(v_n) - f(u)] v_n \, dx \Big| = 0,$$

onde $v_n = u_n - u$. De fato utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$|f(v_n+u)-f(v_n)| \leq \int_0^1 |f'(v_n+tu)u| \, dt \leq \int_0^1 [\mu(q-1)|v_n+tu|^{q-2}|u|+(2^*-1)|v_n+tu|^{2^*-2}|u|] \, dt,$$

ou ainda, existem constantes C_1 e C_2 positivas tais que

$$|f(v_n+u) - f(v_n)| \leq C_1|v_n|^{q-2}|u| + C_1|u|^{q-1} + C_2|v_n|^{2^*-2}|u| + C_2|u|^{2^*-1}.$$

Com esta informação, podemos observar que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n) - f(v_n) - f(u)||v_n| \, dx \quad &\leq \quad C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q-1}|u| \, dx + C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v_n||u|^{q-1} \, dx \\ &+ \quad C_2 \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*-1}|u| \, dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} |v_n||u|^{2^*-1} \, dx. \end{aligned}$$

Agora vamos justificar que

(i)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q-1}|u| \, dx = o_n(1)$$

(ii)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-1}|v_n| \, dx = o_n(1)$$

(iii)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*-1}|u| \, dx = o_n(1)$$

e

(iv)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-1}|v_n| \, dx = o_n(1)$$

Vamos mostrar apenas uma, pois as demais seguem com os mesmos argumentos. Vamos optar por (iii), onde temos o expoente crítico. Para isso, utilizaremos o Lema de Brézis & Lieb (ver [38]). Note que a sequência $(|v_n|^{2^*-1})$ é limitada em $L^{2^*/(2^*-1)}(\mathbb{R}^N)$ e

$$v_n(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Sendo $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e 2^* e $2^*/(2^*-1)$ expoentes conjugados segue pelo Lema de Brézis & Lieb

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*-1}|u|\, dx \to 0$$

com isso provamos (iii), e consequentemente

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} [f(u_n) - f(v_n) - f(u)]v_n\, dx\Big| = o_n(1),$$

como queríamos e portanto a Afirmação está provada. Continuando com a demonstração do Lema 2.3.11, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n - u)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} [f(u_n) - f(u)](u_n - u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(u_n - u)\, dx.$$

Pela Afirmação 2.3.12 a expressão acima fica

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n - u)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v_n\, dx + o_n(1). \tag{2.29}$$

Usando os mesmos argumentos explorados na demonstração da Afirmação 2.3.12 é possível mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u)v_n\, dx \to 0.$$

Assim, (2.29) pode ser escrita na forma

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n - u)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n\, dx + o_n(1). \tag{2.30}$$

Substituindo (2.30) em (2.27), ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla v_n + (1 + \lambda V(x))u_n v_n]\, dx \le \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n \, + o_n(1). \tag{2.31}$$

Desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla v_n + (1 + \lambda V(x))u_n v_n]\, dx = \langle u_n, v_n\rangle_\lambda = ||v_n||_\lambda^2 + o_n(1) \tag{2.32}$$

(2.31) e (2.32) implicam que

$$||v_n||_\lambda^2 \le \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n\, dx + o_n(1)$$

ou ainda,

$$||v_n||^2 \leq \mu|v_n|_q^q + |v_n|_{2^*}^{2^*} + o_n(1). \tag{2.33}$$

Pelas imersões de Sobolev existem constantes C_1, $C_2 > 0$ tais que

$$||v_n||^2 \leq C_1||v_n||^q + ||v_n||^{2^*} + o_n(1).$$

Usando o fato que

$$\liminf_{n\to+\infty} \|v_n\| > 0,$$

deduzimos

$$1 \leq C_1||v_n||^{q-2} + ||v_n||^{2^*-2} + o_n(1). \tag{2.34}$$

Tomando o limite quando $n \to +\infty$ em (2.34) segue que

$$1 \leq C_1 L_\lambda^{q-2} + L_\lambda^{2^*-2}. \tag{2.35}$$

Considerando a função $h(t) = C_1 t^{q-2} + C_2 t^{2^*-2}$, $t \geq 0$, percebemos que a mesma é contínua e estritamente crescente. Podemos concluir que existe um único ponto $\widehat{t} > 0$ tal que $h(\widehat{t}) = 1$. Assim, segue que

$$L_\lambda \geq \widehat{t} > 0, \quad \forall \lambda > 0$$

onde $\widehat{t}$ independe de λ. Observe que

$$\limsup_{n\to+\infty} ||v_n||^2 < S^{N/2}, \tag{2.36}$$

De fato, pois

$$||v_n||^2 \leq ||v_n||_\lambda^2 \leq ||u_n||_\lambda^2 + o_n(1).$$

Deste fato e de (2.23), segue que

$$\limsup_{n\to+\infty} ||v_n||^2 \leq S^{N/2} - \tau < S^{N/2}.$$

Usando o limite $||v_n||^2 \to L_\lambda$, segue de (2.36) que

$$\limsup_{\lambda\to+\infty} L_\lambda \leq S^{N/2} - \tau < S^{N/2}. \tag{2.37}$$

É possível mostrar que a sequência (v_n) verifica o mesmo resultado do Lema 2.3.7, logo

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q \, dx = o_\lambda(1)$$

onde $o_\lambda(1) \to 0$ quando $\lambda \to +\infty$. Desde que

$$S \leq \frac{||v_n||^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}\,dx\right)^{2/2^*}},$$

segue de (2.33),

$$S \leq \frac{||v_n||^2}{\left(||v_n||^2 - \mu|v_n|_q^q + o_n(1)\right)^{2/2^*}}.$$

Assim, passando ao limite quando $n \to +\infty$ obtemos

$$S \leq \frac{L_\lambda}{(L_\lambda + o_\lambda(1))^{2/2^*}}.$$

Mais uma vez, passando ao limite quando $\lambda \to +\infty$ na desigualdade encontramos

$$S^{N/2} \leq \liminf_{\lambda \to \infty} L_\lambda. \tag{2.38}$$

Combinando (2.37) e (2.38) chegaremos a um absurdo, pois

$$S^{N/2} \leq \liminf_{\lambda \to +\infty} L_\lambda \leq \limsup_{\lambda \to +\infty} L_\lambda < S^{N/2}.$$

Portanto, (u_n) converge forte em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para λ grande.

■

Vimos pelo Lema 2.3.11 que para λ suficientemente grande temos

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N)$$

e consequentemente, sem maiores dificuldades, mostra-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\,dx \tag{2.39}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v\,dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{2.40}$$

Agora, note que

$$\langle P(u_n), w - u_n\rangle = \langle P(u_n) - P(w), w - u_n\rangle \leq 0$$

para todo $w \in \mathbb{K}$. Então escolhendo $v = w - u_n$ e substituindo em (2.22), ficamos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(w - u_n)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x))u_n(w - u_n)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(w - u_n)\,dx \tag{2.41}$$

Tomando o limite quando $n \to +\infty$ em (2.41) e usando os limites (2.39) e (2.40) encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (w-u)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda V(x))u(w-u)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(w-u)\,dx \qquad (2.42)$$

para todo $w \in \mathbb{K}$. Com isso, mostramos que o Problema (2.1) tem uma solução não trivial. Para finalizarmos a demonstração do Teorema 2.1.1 para $N \geq 3$, precisamos provar a seguinte proposição.

Proposição 2.3.13 *Seja $\lambda_n \to +\infty$ e (u_n) uma solução de (2.42). Então, existe uma subsequência (u_n) e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{em}\ H^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso,

(i) $u \equiv 0$ *em* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

(ii) $||u_n - u||^2_{\lambda_n} \to 0$.

(iii) Quando $\lambda_n \to \infty$ temos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned}
& u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N),\\
& \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|u_n|^2\,dx \to 0,\\
& ||u_n||^2_{\lambda_n} \to \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2)\,dx = ||u||^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

(iv) Temos que u é uma solução da Desigualdade Variacional

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v-u)\,dx + \int_{\Omega} u(v-u)\,dx \geq \int_{\Omega} (\mu |u|^{q-2} + |u|^{2^*-2})u(v-u)\,dx, \qquad (2.43)$$

para todo $v \in \tilde{\mathbb{K}}$, onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H^1_0(\Omega);\ v \geq \varphi \ \text{q.t.p. em}\ \Omega\}.$$

Demonstração. Sem maiores dificuldades, é possível mostrar que

$$\limsup_{n\to+\infty} ||u_n||^2 < S^N. \qquad (2.44)$$

De tal informação, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em }\ H^1(\mathbb{R}^N)$$

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

e

$$u_n \to u \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq s < 2^*.$$

A justificativa (i) segue das mesmas ideias encontradas na Proposição 1.3.10. Vamos mostrar (ii). Suponha por contradição que

$$u_n \nrightarrow u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N),$$

então a menos de subsequência

$$\lim_{n\to+\infty} ||u_n - u|| = L > 0. \tag{2.45}$$

Sabemos que $u_n \in \mathbb{K}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo, $u \in \mathbb{K}$. Agora, percebemos que podemos repetir todas as etapas da demonstração do Lema 2.3.11. Desta forma, repetindo toda argumentação, com as devidas modificações, garantimos a convergência

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N). \tag{2.46}$$

No que segue, mais uma vez, reproduzindo algumas etapas da demonstração do Lema 2.3.11 deduzimos

$$||v_n||^2_{\lambda_n} \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n\,dx + o_n(1), \tag{2.47}$$

onde $v_n = u_n - u$. Combinando (2.46) e (2.47) resulta

$$||v_n||^2_{\lambda_n} \to 0$$

finalizando (ii). Para demonstrar (iii), note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x)|u_n|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x)|u_n - u|^2\,dx \leq C||u_n - u||^2_{\lambda_n}$$

o que implica, pelo item (ii),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x)|u_n|^2\,dx \to 0.$$

Falta mostrar (iv), ou seja, que u é solução do problema (3.91). Escolhendo $w \in \tilde{\mathbb{K}}$, arbitrária, e substituindo em (2.42) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(w-u_n)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda_n V(x))u_n(w-u_n)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(w-u_n)\,dx \tag{2.48}$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ e usando $(i)-(iii)$, concluímos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (w-u)\,dx + \int_\Omega u(w-u)\,dx \geq \int_\Omega (\mu|u|^{q-2} + |u|^{2^*-2})u(w-u)\,dx, \qquad (2.49)$$

para todo $w \in \tilde{\mathbb{K}}$.

■

2.4 Demonstração do Teorema 2.1.1 para o caso $N = 2$

Antes de iniciarmos o nosso estudo para o caso $N = 2$, enunciaremos duas estimativas fundamentais para o desenvolvimento desta seção. A primeira é deduzida pela condição de crescimento da f combinada com as hipóteses (f_1) e (f_2) segue que fixados $\beta > 0$, $l \geq 0$ e $\alpha > \alpha_0$ existe uma constante $C_\beta > 0$ tal que

$$|f(u)| \leq \beta|u| + C_\beta|u|^l\Big(e^{\alpha|u|^2} - 1\Big), \ \forall u \in \mathbb{R}. \qquad (2.50)$$

A segunda sejam $\alpha > 0$ e $k > 1$, para cada $l > k$, existe uma constante $C = C(k) > 0$ tal que

$$\Big(e^{\alpha|s|^2} - 1\Big)^k \leq C\Big(e^{\alpha l|s|^2} - 1\Big). \qquad (2.51)$$

Uma desigualdade importante no desenvolvimento desta seção, devido a Cao [17], é uma versão da desigualdade Trundiger-Moser em todo $\mathbb{R}^2$ que afirma

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Big(e^{\alpha|u|^2} - 1\Big)\,dx < \infty, \ \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2) \text{ e } \alpha > 0.$$

Além disso, se $\alpha < 4\pi$ e $|u|_2 \leq M$ então existe uma constante $C = C(\alpha, M) > 0$ tal que

$$\sup_{|\nabla u|_2 \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \Big(e^{\alpha|u|^2} - 1\Big)\,dx \leq C. \qquad (2.52)$$

2.4.1 Solução para o problema penalizado (2.3)

Iniciamos mostrando que o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$ verifica a geometria do passo da montanha.

Lema 2.4.1 (a) *Existem contantes $r, \rho > 0$, as quais são independentes de λ e ϵ, tais que*

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \rho \quad \textit{para} \quad \|u\|_\lambda = r;$$

(b) *Existe $e \in H^1(\mathbb{R}^2)$ com $\|e\|_\lambda > r$ e $I_{\lambda,\epsilon}(e) < 0$.*

Demonstração. Da estimativa (2.50) fixados $\beta > 0$, $l \geq 1$ e $\alpha > \alpha_0$, existe $C_\beta > 0$ tal que

$$|F(u)| \leq \frac{\beta}{2}|u|^2 + C_\beta |u|^{l+1}\Big(e^{\alpha|u|^2} - 1\Big), \ \forall u \in \mathbb{R}. \tag{2.53}$$

Consequentemente,

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \frac{1}{2}||u||_\lambda^2 - \frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2\,dx - C_\beta \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{l+1}\big(e^{\alpha|u|^2} - 1\big)\,dx.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder na última expressão e as imersões contínuas de Sobolev na estimativa anterior resulta em

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq C_1||u||_\lambda^2 - C_2|u|_{(l+1)s_1}^{l+1}\Big|e^{\alpha|u|^2} - 1\Big|_{s_2}, \tag{2.54}$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas e s_1 e s_2 são expoentes conjugados. Agora fixemos $r_0 > 0$ tal que $\alpha r_0^2 < 4\pi$. Podemos considerar $s_2 > 1$ e suficientemente próximo de 1 tal que $s_2\alpha r_0^2 < 4\pi$. Da mesma forma, consideremos $s_2' > s_2$ tal que $s_2'\alpha r_0^2 < 4\pi$. Então para $u \in E_\lambda$ com $||u||_\lambda < r_0$ e usando a estimativa (2.51), ficamos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \big(e^{\alpha|u|^2} - 1\big)^s\,dx &\leq C\int_{\mathbb{R}^2} (e^{s_2'\alpha|u|^2} - 1)\,dx \\
&= C\int_{\mathbb{R}^2} (e^{s_2'\alpha||u||_\lambda^2(\frac{|u|}{||u||_\lambda})^2} - 1)\,dx \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^2} (e^{s_2'\alpha r_0^2(\frac{|u|}{||u||_\lambda})^2} - 1)\,dx.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade (2.52) de Trudinger-Moser devida a Cao [17] existe $C' > 0$ tal que

$$\Big|e^{\alpha|u|^2} - 1\Big|_{s_2} \leq C', \quad \text{para} \ \ ||u||_\lambda \leq r_0. \tag{2.55}$$

Substituindo (2.55) em (2.54) e usando as imersões contínuas de Sobolev resulta em

$$I(u)_{\lambda,\epsilon} \geq C_1||u||_\lambda^2 - C_3||u||_\lambda^{l+1}.$$

Tomando r_0 suficientemente pequeno existem $0 < r < r_0$ e $\rho > 0$ tais que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) \geq \rho, \qquad \text{para} \ \ ||u||_\lambda = r,$$

uma vez que $2 < l + 1$. Isso nos mostra a primeira geometria do passo da montanha. Agora, observe que

$$I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+) = \frac{1}{2}||\varphi^+||_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(\varphi^+)\,dx \leq ||\varphi||_\lambda^2 \quad \text{e} \quad ||\varphi^+||_\lambda = ||\varphi^+||.$$

Como tomamos $||\varphi||$ suficientemente pequena em relação ρ, por hipótese, então

$$I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+) < \rho.$$

Da condição (f_2) existem constantes A e B positivas verificando

$$F(t) \geq A|t|^\theta - B, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.56}$$

Para $t > 1$ produzimos

$$I_{\lambda,\epsilon}(t\varphi^+) \leq t^2 \int_\Omega (|\nabla \varphi^+|^2 + |\varphi^+|^2)\, dx + A|t|^\theta \int_\Omega |\varphi^+|^\theta\, dx - B|\Omega|.$$

Podemos concluir pela desigualdade acima que $I_{\lambda,\epsilon}(t\varphi^+) \to -\infty$ quando $t \to \infty$ mostrando que para $\widetilde{w} = (1 + t_*)\varphi^+$ e t_* suficientemente grande tem-se

$$||\widetilde{w}||_\lambda > r \quad \text{e} \quad I_{\lambda,\epsilon}(\widetilde{w}) < 0.$$

Com isso concluímos a demonstração do lema.

■

Pelo Lema 2.4.1, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha devido Willem [60], o qual garante a existência de uma sequência $(PS)c_{\lambda,\epsilon}$ para $I_{\lambda,\epsilon}$, isto é, uma sequência (u_n) verificando

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) \to c_{\lambda,\epsilon} \text{ e } I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) \to 0,$$

onde

$$c_{\lambda,\epsilon} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t))$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E);\ \gamma(0) = \varphi^+ \text{ e } \gamma(1) = \widetilde{w}\}.$$

Lema 2.4.2 *Se (u_n) é uma sequência $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$, então (u_n) é limitada.*

Omitiremos a demonstração por se tratar de argumentos semelhantes com os da demonstração do Lema 2.3.3. Os mesmos Lemas 2.3.4 e 2.3.6 são verificadas para a sequência (u_n) dada no Lema (2.4.2). Então resumiremos em apenas um lema.

Lema 2.4.3 *Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência* (u_n) *pode ser considerada como uma sequência de funções não negativas e que cumpre*

$$\limsup_{n\to+\infty} ||u_n||_\lambda^2 \leq \Big(\frac{2\theta}{\theta-2}\Big)c_{\lambda,\epsilon}.$$

O próximo resultado é fundamental para a demonstração da próxima proposição. Considere o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$ sem o termo de penalização, o qual denotaremos por

$$I_\lambda(u) = ||u||_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u)\,dx, \quad u \in E_\lambda$$

vamos demonstrar o seguinte lema

Lema 2.4.4 *Sejam* $\Theta > 0$ *fixo e* $(u_n) \subset E_\lambda$ *uma sequência* $(PS)_{c_\lambda}$ *para o funcional* I_λ *com* $0 \leq c_\lambda \leq \Theta$. *Fixado* $s \geq 2$, *então dado* $\delta > 0$ *existem* $\lambda_* = \lambda_*(\delta) > 0$ *e* $R = R(\delta, \Theta) > 0$ *tais que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{B_R^c(0)} |u_n|^s\,dx < \delta, \quad \forall \lambda \geq \lambda_*(s).$$

Demonstração. A demonstração deste lema segue praticamente a mesma do Lema 2.3.7. Demonstraremos para $s > 2$ fixo, pois para $s = 2$ é imediato. Seja (u_n) a sequência dada pelo $(PS)_{c_\lambda}$ para o funcional I_λ. Fazendo as mesmas manipulações algébricas do Lema 2.3.3 temos

$$||u_n||_\lambda^2 \leq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\Big)\Theta + o_n(1). \tag{2.57}$$

Para $R > 0$ considere

$$A(R) = \big\{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| > R,\ V(x) \geq M_0\big\} \text{ e } B(R) = \big\{x \in \mathbb{R}^2; |x| > R,\ V(x) < M_0\big\}$$

onde M_0 foi dado na condição (V_3). Segue das imersões contínuas de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^2),\ \forall s \geq 2 \tag{2.58}$$

que $u_n \in L^t(\mathbb{R}^2)$, para todo $t \geq 2$. Assim, para $l > 1$ e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\int_{B(R)} |u_n|^2\,dx \leq \Big(\int_{B(R)} |u_n|^{2l}\,dx\Big)^{1/l} |B(R)|^{1/l'},$$

e usando as imersões de Sobolev em conjunto com a expressão (2.57) ficamos

$$\int_{B(R)} |u_n|^2\, dx \leq \Big(\frac{2\theta}{\theta-2}\Big)\Theta |B(R)|^{1/l'} + o_n(1), \tag{2.59}$$

onde l' é o expoente conjugado de l.

Mais uma vez, usando a imersões contínuas de Sobolev e a expressão (2.57) tem-se

$$\int_{A(R)} |u_n|^2\, dx \leq \frac{1}{(\lambda M_0+1)}\Big(\frac{2\theta}{\theta-2}\Big)\Theta + o_n(1). \tag{2.60}$$

Como tomamos $s \geq 2$ fixo, então por (2.58) e pela desigualdade de interpolação para $2 \leq s \leq s+1$ resulta em

$$\int_{B^c_R(0)} |u_n|^s\, dx \leq |u_n|^{ts}_{L^{s+1}(B^c_R)} |u_n|^{(1-t)s}_{L^2(B^c_R)},$$

para algum $t \in (0,1)$. Novamente, utilizando a imersões contínuas de Sobolev obtemos a seguinte expressão

$$\int_{B^c_R(0)} |u_n|^s\, dx \leq C||u_n||^{ts}_\lambda \Big(\int_{A(R)} |u_n|^2\, dx + \int_{B(R)} |u_n|^2\, dx\Big)^{(1-t)s/2}, \tag{2.61}$$

Substituindo (2.60) e (2.60) em (2.61) e sabendo que a sequência (u_n) verifica (2.57) podemos concluir

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B^c_R(0)} |u_n|^s\, dx \leq \tilde{C}\Big[\frac{1}{\lambda M_0+1} + |B(R)|^{1/l'}\Big]^{(1-t)s/2}. \tag{2.62}$$

Recorde de (V_3), que $B(R) \subset \mathcal{L}$, e assim,

$$\lim_{R\to\infty} |B(R)| = 0.$$

Tomando R e λ suficientemente grande tornamos o lado direito da desigualdade (2.62) arbitrariamente pequeno. Com isso, concluímos a demonstração do lema.

$\blacksquare$

Lema 2.4.5 *Sejam (u_n) uma sequência $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$ para $I_{\lambda,\epsilon}$ com*

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < \frac{(\theta-2)\pi}{\theta\alpha_0}$$

e $u \in E_\lambda$ com $u_n \rightharpoonup u$ em E_λ, então $I'_{\lambda,\epsilon}(u) = 0$.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$ para $I_{\lambda,\epsilon}$. Pelo Lema 2.4.3 segue que

$$\limsup_{n\to+\infty} ||u_n||_\lambda^2 < \frac{2\pi}{\alpha_0} < \frac{4\pi}{\alpha_0}. \tag{2.63}$$

De onde segue que $(||u_n||_\lambda)$ é limitada em $\mathbb{R}$. Assim, a menos de subsequência segue os seguintes fatos

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ E_\lambda,$$

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2$$

e

$$u_n \to u \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^2), s \geq 2.$$

Sejam $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ não nula e $R > 0$ tais que $supp\,\phi \subset B_R(0)$. Observe que

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)\phi \to 0 \ \text{ e } \ \langle u_n, \phi\rangle_\lambda \to \langle u, \phi\rangle_\lambda,$$

onde

$$\langle u, v\rangle_\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\nabla u \nabla v + (1+\lambda V)uv\right] dx$$

é o produto interno de E_λ.

Além disso, argumentando da mesma forma que foi feito em (2.3.5) tem-se

$$\int_\Omega (\varphi - u_n)^+ \phi\, dx = \int_\Omega (\varphi - u)^+ \phi\, dx + o_n(1).$$

Portanto, analisando o que queremos mostrar, fica claro que o objetivo é concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)\phi\, dx \to \int_{\mathbb{R}^2} f(u)\phi\, dx$$

ou melhor,

$$\int_{B_R(0)} f(u_n)\phi\, dx \to \int_{B_R(0)} f(u)\phi\, dx$$

pois $supp\,\phi \subset B_R(0)$.

Podemos mostrar o limite acima fazendo uso do Teorema da Convergência Dominada Generalizada de Lebesgue. Da estimativa (2.50),

$$|f(u_n)\phi| \leq |u_n||\phi| + C|\phi|(e^{\alpha|u_n|^2} - 1).$$

Definimos

- $f_n(x) = f(u_n(x))\phi(x)$, $\widetilde{f}(x) = f(u(x))\phi(x)$;

- $g_n(x) = |u_n(x)||\phi(x)| + C|\varphi(x)|(e^{\alpha|u_n(x)|^2} - 1)$;

- $g(x) = |u(x)||\phi(x)| + C|\varphi(x)|(e^{\alpha|u(x)|^2} - 1)$

Observando as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue precisamos apenas mostrar que

$$g_n \to g \text{ em } L^1(B_R(0)).$$

Vamos mostrar este limite, para isso, definamos

- $h_n(x) = C|\phi(x)|(e^{\alpha|u_n(x)|^2} - 1)$;

- $h(x) = C|\phi(x)|(e^{\alpha|u(x)|^2} - 1)$

Dividiremos a demonstração em duas etapas:

(i) $\displaystyle\int_{B_R(0)} u_n\phi\, dx \to \int_{B_R(0)} u\phi\, dx$;

(ii) $\displaystyle\int_{B_R(0)} h_n\, dx \to \int_{B_R(0)} h_n\, dx$.

Justificativa (i): Observe que

$$\begin{aligned}\Big|\int_{B_R(0)} u_n\phi\, dx - \int_{B_R(0)} u\phi\, dx\Big| &\leq \int_{B_R(0)} |u_n - u||\phi|\, dx \\ &\leq |u_n - u|_{L^2(B_R(0))}|\phi|_2,\end{aligned}$$

mas $u_n \to u$ em $L^2(B_R(0))$, logo, obtemos (i).

Justificativa (ii): Inicialmente, mostraremos que para $t > 1$ e suficientemente próximo de 1 tem-se

$$h_n \in L^t(B_R(0)) \quad \text{e} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |h_n|_t < \infty,$$

ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$|h_n|_t \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De (2.63), fixemos $0 < m < 4\pi/\alpha_0$ de tal maneira que

$$||u_n||_\lambda^2 \leq m.$$

De acordo com a escolha de m temos $m\alpha_0 < 4\pi$. Logo, para $\alpha > \alpha_0$ e suficientemente próximo de α_0 devemos ter $m\alpha < 4\pi$. Portanto, com a escolha de t segue

$$tm\alpha < 4\pi$$

. Agora, note que

$$\int_{B_R(0)} |h_n|^t \, dx = \int_{B_R(0)} C|\phi|^t (e^{\alpha |u_n|^2} - 1)^t \, dx \leq C \int_{B_R(0)} (e^{\alpha |u_n|^2} - 1)^t \, dx.$$

Seja $t' > t$ e suficientemente próximo de t tal que $\alpha m t' < 4\pi$. Utilizando a desigualdade (2.51) segue

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)} |h_n|^t \, dx &\leq C \int_{B_R(0)} (e^{t'\alpha |u_n|^2} - 1) \, dx \\
&= C_1 \int_{B_R(0)} (e^{t'\alpha ||u_n||_\lambda \left(\frac{|u_n|}{||u_n||_\lambda}\right)^2} - 1) \, dx \\
&\leq C_1 \int_{B_R(0)} (e^{t'\alpha m \left(\frac{|u_n|}{||u_n||_\lambda}\right)^2} - 1) \, dx.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade (2.52) de Trudinger-Moser devida a Cao [17] segue que

$$|h_n|_t \leq C_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do estudo feito até aqui e por Brezís & Lieb, podemos concluir que

$$h_n \rightharpoonup h \;\text{ em }\; L^t(B_R(0)) \;\text{ com }\; t > 1.$$

Usando que

$$h_n(x) \to h(x) \;\text{ q.t.p. em }\; B_R(0),$$

podemos concluir que

$$h_n \to h \;\text{ em }\; L^1(B_R(0)),$$

o que prova (ii). Assim, por (i) e (ii) resulta em

$$g_n \to g \;\text{ em }\; L^1(B_R(0)).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada Generalizada de Lebesgue temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)\phi \, dx \to \int_{\mathbb{R}^2} f(u)\phi \, dx. \tag{2.64}$$

De todo estudo feito até aqui, podemos concluir que

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)\phi \to I'_{\lambda,\epsilon}(u)\phi,$$

mas $I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)\phi \to 0$. Logo, pela unicidade do limite tem-se

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u)\phi = 0, \;\; \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Donde segue por densidade

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u)\phi = 0, \quad \forall \phi \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Portanto,

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u) = 0.$$

■

Lema 2.4.6 *Seja $c_{\lambda,\epsilon}$ o nível do passo da montanha para $I_{\lambda,\epsilon}$. Então existe uma constante $A > 0$, independente de ν, de maneira que*

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < A/\nu^{\frac{2}{p-1}}.$$

Demonstração. Considere o caminho $\gamma : [0,1] \to E_\lambda$ definido por $\gamma(t) = (1+tt_*)\varphi^+$. Claramente, $\gamma \in \Gamma$. Como $(1+tt_*)\varphi^+ \geq \varphi$, então

$$I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t)) = \frac{(1+tt_*)^2}{2}||\varphi^+|| - \int_\Omega F((1+tt_*)\varphi^+)\,dx.$$

Agora, usaremos a condição (f_4) e a expressão acima resulta em

$$I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t)) \leq \frac{(1+tt_*)^2}{2}||\varphi^+||^2 - \frac{(1+tt_*)^{p+1}}{p+1}|\varphi^+|_{p+1}^{p+1}.$$

Consideremos a seguinte função

$$j(t) = \frac{(1+tt_*)^2}{2}||\varphi^+||^2 - \frac{\nu(1+tt_*)^{p+1}}{p+1}|\varphi^+|_{p+1}^{p+1}.$$

Observe que

$$c_{\lambda,\epsilon} = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t)) \leq \max_{t\geq 0} j(t).$$

Realizando todo estudo feito na demonstração do Lema 2.3.2 com a função j, podemos concluir que a mesma possui um ponto de máximo global. Com essas informações podemos obter

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < A/\nu^{\frac{2}{p-1}},$$

onde

$$A = \frac{1}{2}\Big(\frac{||\varphi^+||}{|\varphi^+|_{p+1}^{p+1}}\Big)^{2/(p-1)} - \frac{|\varphi^+|_{p+1}^{p+1}}{p+1}\Big(\frac{||\varphi^+||}{|\varphi^+|_{p+1}^{p+1}}\Big)^{(p+1)/(p-1)}.$$

■

Proposição 2.4.7 *Existe $\lambda_* > 0$ tal que $\lambda \geq \lambda_*$, toda (u_n) sequência $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$ com*

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < \frac{(\theta-2)\pi}{\theta\alpha_0}$$

admite uma subsequência convergente.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$ verificando a hipótese da proposição acima. Sabemos que (u_n) é uma sequência limitada, logo, existe $u \in E_\lambda$ e a menos de subsequência tem-se

$$v_n \rightharpoonup 0 \text{ em } E_\lambda,$$

$$v_n(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2$$

e

$$v_n \to 0 \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^2), s \geq 2,$$

onde $v_n = u_n - u$. Recordando que (u_n) verifica

$$\limsup_{n\to+\infty} ||u_n||^2_\lambda < \frac{2\pi}{\alpha_0}$$

e

$$||v_n||^2_\lambda = ||u_n||^2_\lambda - ||u||^2_\lambda + o_n(1) \tag{2.65}$$

é possível mostrar que

$$||u||^2_\lambda \leq \limsup_{n\to+\infty}\left(||u||^2_\eta + ||v_n||^2_\lambda\right) = \limsup_{n\to+\infty}\left(||u_n||^2_\lambda + o_n(1)\right) < 2\pi/\alpha_0$$

e

$$\limsup_{n\to+\infty} ||v_n||^2_\lambda < 2\pi/\alpha_0.$$

Daí, como foi feito na demonstração do Lema 2.4.5 existem $m \in (0, 2\pi)$ e $\alpha > \alpha_0$ tais que

$$||v_n||^2_\lambda \leq m \quad \text{e} \quad m\alpha < 2\pi. \tag{2.66}$$

As seguintes afirmações são verdadeiras

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \left[F(v_n) - F(u_n) + F(u)\right] dx = o_n(1);$

(b) Existe $s > 1$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \left[f(v_n) - f(u_n) + f(u)\right]^s dx = o_n(1);$

(c) $I_\lambda(v_n) - I_{\lambda,\epsilon}(u_n) + I_{\lambda,\epsilon}(u) = o_n(1)$;

(d) $||I'_\lambda(v_n) - I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) + I'_{\lambda,\epsilon}(u)|| = o_n(1)$.

Vamos justificar cada uma dessas afirmações.

Justificativa (a): Segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$F(v_n(x)+u(x)) - F(v_n(x)) = \int_0^1 \frac{d}{dt}F(v_n(x)+tu(x))\,dt = \int_0^1 f(v_n(x)+tu(x))u(x)\,dt.$$

Assim,

$$|F(v_n+u) - F(v_n)| \leq \int_0^1 |f(v_n+tu)u|\,dt.$$

Usando a estimativa (2.50),

$$|F(v_n+u) - F(v_n)| \leq \int_0^1 \Big[(|v_n|+t|u|)|u| + C(|v_n|+t|u|)^l|u|\big(e^{\alpha(|v_n|+t|u|)^2}-1\big)\Big]\,dt,$$

onde $l \geq 1$, $\alpha > \alpha_0$ e $C > 0$. Ainda podemos obter

$$|F(v_n+u)-F(v_n)| \leq |v_n||u|+|u|^2+C|v_n|^l|u|\big(e^{\alpha(|v_n|+|u|)^2}-1\big)+C|u|^{l+1}\big(e^{\alpha(|v_n|+|u|)^2}-1\big).$$

Por simplicidade, usaremos as notações $w_n = |v_n|+|u|$, $W_n = e^{\alpha|w_n|^2}-1$ e $W = e^{\alpha|u|^2}-1$. Daí,

$$|F(v_n+u) - F(v_n)| \leq |v_n||u| + |u|^2 + C|v_n|^l|u|W_n + C|u|^{l+1}W_n.$$

Consequentemente,

$$|F(v_n+u)-F(v_n)-F(u)| \leq |v_n||u|+C|u|^2+C|v_n|^l|u|W_n+C|u|^{l+1}W_n+C|u|^lW. \tag{2.67}$$

Sem maiores dificuldades, mostra-se

$$\limsup_{n\to+\infty} ||w_n||_\lambda^2 < 4\pi/\alpha_0. \tag{2.68}$$

Definindo

$$Z_n := |v_n||u| + C|u|^2 + C|v_n|^l|u|W_n + C|u|^{l+1}W_n + C|u|^lW$$

e

$$Z := C|u|^2 + C|u|^{l+1}W + C|u|^lW$$

vemos que

$$Z_n(x) \to Z(x) \quad \text{q.t.p. em } \ \mathbb{R}^2.$$

Utilizando (2.68) e repetindo os passos feitos no Lema 2.4.5 podemos justificar que existem $\alpha > \alpha_0$, $t > 1$ e $C > 0$ tais que (W_n) e W pertencem a $L^t(\mathbb{R}^2)$ e $|W_n|_t \leq C$.

Considere $s > 1$ e $s < t$. Vamos justificar que a sequência $(|v_n|^l W_n)$ pertence $L^s(\mathbb{R}^2)$ e que a mesma é limitada. Temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|v_n|^l W_n)^s \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^{ls} W_n^s \, dx.$$

Note que $W_n^s \in L^{t/s}(\mathbb{R}^2)$, pois $W_n \in L^t(\mathbb{R}^2)$. Sabemos que $v_n \in L^k(\mathbb{R}^2)$, para todo $k \geq 2$. Assim, $v_n^l \in L^{t/(t-s)}(\mathbb{R}^2)$ com $l > 2$. Pela desiguadade de Hölder segue

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|v_n|^l W_n)^s \, dx \leq |W_n|_t^s \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^{lt/(t-s)} \, dx \Big)^{(t-s)/t}.$$

Pelas imersões de Sobolev

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|v_n|^l W_n)^s \, dx \leq |W_n|_t^s ||v_n||_\lambda^l.$$

Usando o fato que as sequências são limitadas, então

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|v_n|^l W_n)^s \, dx \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

justificando o que queríamos. Agora, observe que

$$|v_n|^l(x) W_n(x) \to 0 \quad \text{q.t.p. em } \ \mathbb{R}^2.$$

Pelo Lema de Brázis & Lieb tem-se $|v_n|^l W_n \rightharpoonup 0$ em $L^s(\mathbb{R}^2)$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^l |u| W_n \, dx \to 0.$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{l+1} W_n \, dx \to \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{l+1} W \, dx.$$

Logo podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^2} Z_n \, dx \to \int_{\mathbb{R}^2} Z \, dx.$$

A prova de (a) segue da aplicação do Teorema da Convergência Dominada Generalizada de Lebesgue.

Justificativa (b): Pela hipótese (f_3) resulta em

$$|f(v_n + u) - f(v_n)| \leq \int_0^1 |f'(v_n + tu)u| \, dt \leq C|u| W_n.$$

Assim, para $s > 1$

$$|f(v_n + u) - f(v_n) - f(u)|^s \leq C|u|^s W_n^s C|u|W_n + C|f(u)|^s.$$

Definindo,

$$\widetilde{Z}_n := C|u|^s W_n^s + C|f(u)|^s$$

e

$$\widetilde{Z} := C|u|^s W^s + C|f(u)|^s$$

temos

$$\widetilde{Z}_n(x) \to \widetilde{Z}(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Mais uma vez, utilizando os argumentos encontrados no Lema 2.4.5, existem $\alpha > \alpha_0$ e $s,t > 1$ tais que $W^s, W_n^s \in L^t(\mathbb{R}^2)$ e (W_n^s) é limitada em $L^t(\mathbb{R}^2)$. Usando argumentos semelhantes que foi feito no item (a) é possível mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{Z}_n \, dx \to \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{Z} \, dx.$$

Portanto, o item (b) segue diretamente da aplicação do Teorema da Convergência Generalizada de Lebesgue. Vamos justificar o item (d), pois o item (c) é uma consequência imediata do item (a).

Justificativa (c): Seja $\phi \in E_\lambda / \{0\}$ dada arbitrariamente e realizando algumas manipulações algébricas segue que

$$\begin{aligned} |[I'_\lambda(v_n) - I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) + I'_{\lambda,\epsilon}(u)]\phi| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(u_n) - f(v_n) - f(u)||\phi| \, dx \\ &\leq C|f(u_n) - f(v_n) - f(u)|_s ||\phi||_\lambda. \end{aligned}$$

Pelo item (c) temos

$$|[I'_\lambda(v_n) - I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) + I'_{\lambda,\epsilon}(u)]\phi| \leq o_n(1)||\phi||_\lambda,$$

com isso mostramos o item (d), e portanto, mostramos que todas as afirmações são verdadeiras.

As afirmações (c) e (d) mostram que (v_n) é uma sequência $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon} - I_{\lambda,\epsilon}(u)}$ para o funcional I_λ considerado no Lema 2.4.4.

Observe que

$$||v_n||_\lambda^2 = I'_\lambda(v_n)v_n + \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n \, dx + o_n(1). \tag{2.69}$$

Afirmação 2.4.8 *A sequência (v_n) verifica*

$$||v_n||_\lambda \to 0.$$

A justificativa desta afirmação pode ser feita usando argumentos semelhantes aos que foram feitos na demonstração do Lema 2.3.11. Suponha por contradição que o limite acima não ocorra, então a menos de subsequência

$$||v_n||_\lambda^2 \to L_\lambda > 0. \tag{2.70}$$

Pela estimativa (2.50) com $l > 2$ segue

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n\, dx \le \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^2\, dx + C \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^l (e^{\alpha|v_n|^2} - 1)\, dx. \tag{2.71}$$

Como feito anteriormente, podemos escolher $s > 1$ e s suficientemente próximo de 1 tal que $\alpha m s < 4\pi$, logo, de (2.71) tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n\, dx \le \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^2\, dx + C|v_n|_{lt}^l \Big| e^{\alpha|v_n|^2} - 1 \Big|_s, \tag{2.72}$$

onde t e s são conjugados.

Usando algumas manipulações algébricas envolvendo a desigualdade de Trundiger-Moser como feito na demonstração do Lema 2.4.1 da primeira geometria do passo da montanha resulta em

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n\, dx \le C_1\epsilon ||v_n||_\lambda^2 + C_2|v_n|_{lt}^l. \tag{2.73}$$

Pelas imersões de Sobolev obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n\, dx \le C_1\epsilon ||v_n||_\lambda^2 + C_3||v_n||_\lambda^l. \tag{2.74}$$

De (2.69) e (2.74) segue que

$$(1 - C_1\epsilon)||v_n||_\lambda^2 \le o_n(1) + C_3||v_n||_\lambda^l. \tag{2.75}$$

Então segue de (2.70) e (2.75) que $L_\lambda > \delta_0 > 0$, independente de λ, onde $\delta_0 = \big(C_4/C_2\big)^{\frac{1}{l-2}}$ e $C_4 = 1 - C_1\epsilon$.

Agora observe que de (2.69) e (2.73)

$$C_4||v_n||_\lambda^2 \le o_n(1) + C_2|v_n|_{lt}^l. \tag{2.76}$$

Logo,

$$C_4/C_2 L_\lambda^2 \leq \limsup_{n\to+\infty} |v_n|_{lt}^{l},$$

ou ainda,

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^{lt}\, dx \geq \widetilde{\delta_0} > 0, \tag{2.77}$$

onde $\widetilde{\delta_0} = \left(\delta_0^2 C_4/C_2\right)^2 > 0$.

Por outro lado, pelo Lema 2.4.4, existem $\lambda^* > 0$ e $R > 0$ tais que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2/B_R(0)} |v_n|^{lt}\, dx < \widetilde{\delta_0}/2, \quad \lambda \geq \lambda_*. \tag{2.78}$$

Portanto, de (2.77) e (2.78) resulta em

$$\widetilde{\delta_0} \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^{lt}\, dx \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2/B_R(0)} |v_n|^{lt}\, dx + \limsup_{n\to+\infty} \int_{B_R(0)} |v_n|^{lt}\, dx < \widetilde{\delta_0}/2,$$

obtendo assim, um absurdo. Então podemos concluir que existe $\lambda_* > 0$ tal que $\lambda \geq \lambda_*$ a sequência (u_n) admite uma subsequência convergente.

■

Agora mostraremos que o problema penalizado (2.3) possui solução não trivial. Seja $c_{\lambda,\epsilon}$ o nível do passo da montanha. Pelo Lema 2.4.6 existe $\nu_* > 0$ tal que

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < \frac{(\theta-2)4\pi}{2\theta\alpha_0}, \quad \text{para} \;\; \nu \geq \nu_*, \;\; \forall\lambda > 0 \;\; \text{e} \;\; \forall\epsilon > 0.$$

Pela Proposição 2.4.7 existe λ_* tal que $\lambda \geq \lambda^*$ o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$ verifica a condição $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$. Usando o Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti & Rabinowitz [8], podemos concluir que existe $u_\epsilon \in E_\lambda$ tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_\epsilon) = c_{\lambda,\epsilon} > 0 \;\; \text{e} \;\; I'_{\lambda,\epsilon}(u_\epsilon) = 0$$

2.4.2 Finalização da demonstração do Teorema 2.1.1

Analogamente ao caso $N = 3$, para $\lambda \geq \lambda^*$ e $\nu \geq \nu_*$ existe uma solução $u_\epsilon \in E_\lambda$ não trivial do problema (2.3), ou seja, u_ϵ verifica

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u_\epsilon \nabla v + (1+\lambda V(x))u_\epsilon v]\, dx + \frac{1}{\epsilon}\langle P(u_\epsilon), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(u_\epsilon) v\, dx, \; \forall v \in E_\lambda.$$

Praticamente todo início desta seção é semelhante ao que foi feita no caso $N = 3$. Faremos as identificações:

$$\epsilon = 1/n, \quad u_n = u_{1/n} \quad I_{\lambda,\epsilon} = I_n, \quad I_n(u_n) = c_n,$$

onde $c_n = c_{\lambda,\epsilon}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que existe $u_n \in E_\lambda$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u_n \nabla v + (1 + \lambda V(x)) u_n v]\, dx + n\langle P(u_n), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) v\, dx,\ \forall v \in E_\lambda. \quad (2.79)$$

A sequência de soluções (u_n) é não negativa e cumpre

$$\limsup_{n\to+\infty} ||u_n||_\lambda^2 < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

Isso mostrar que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Logo, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H^1(\mathbb{R}^2),$$

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2$$

e

$$u_n \to u \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^2),\ 2 \le s < 2^*.$$

Fazendo os mesmos cálculos que foram feitos na demonstração do Lema 2.3.10 é possível mostrar que $P(u) = 0$, ou seja, $u \in \mathbb{K}$.

Observe que

$$\langle P(u_n), u_n - u\rangle = \langle P(u_n) - P(u), u_n - u\rangle \ge 0$$

Então usando este fato e escolhendo $v = u_n - u$ e substituindo em (2.79), ficamos

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u_n \nabla (u_n - u) + (1 + \lambda V(x)) u_n (u_n - u)]\, dx \le \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_n - u)\, dx. \quad (2.80)$$

Da mesma forma que foi feito para o caso $N = 3$, temos também

Lema 2.4.9 *Para $\lambda \approx +\infty$,*

$$u_n \to u \quad \textit{em} \quad H^1(\mathbb{R}^2).$$

Demonstração. Suponha por contradição

$$u_n \nrightarrow u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^2),$$

então a menos de subsequência

$$\lim_{n\to+\infty} ||u_n - u||^2 = L_\lambda > 0. \quad (2.81)$$

Utilizando os mesmos argumentos que foi feito no item (b) da Proposição 2.4.7 podemos concluir

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^2}[f(u_n)-f(v_n)-f(u)]v_n\,dx\right|=0,$$

onde $v_n=u_n-u$. Note que

$$\int_{\mathbb{R}^2}f(u_n)(u_n-u)\,dx=\int_{\mathbb{R}^2}[f(u_n)-f(u)](u_n-u)\,dx+\int_{\mathbb{R}^2}f(u)(u_n-u)\,dx$$

e usando o resultado anterior a expressão acima fica

$$\int_{\mathbb{R}^2}f(u_n)(u_n-u)\,dx=\int_{\mathbb{R}^2}f(v_n)v_n\,dx+\int_{\mathbb{R}^2}f(u)v_n\,dx+o_n(1). \tag{2.82}$$

Novamente, usando os mesmos argumentos encontrados na demonstração da Afirmação 2.3.12 é possível mostrar

$$\int_{\mathbb{R}^2}f(u)v_n\,dx\to 0.$$

Consequentemente, a expressão (2.82) fica

$$\int_{\mathbb{R}^2}f(u_n)(u_n-u)\,dx=\int_{\mathbb{R}^2}f(v_n)v_n\,dx+o_n(1). \tag{2.83}$$

Substituindo (2.83) em (2.80) tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^2}[\nabla u_n\nabla v_n+(1+\lambda V(x))u_nv_n]\,dx\le\int_{\mathbb{R}^2}f(v_n)v_n\;+o_n(1) \tag{2.84}$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^2}[\nabla u_n\nabla v_n+(1+\lambda V(x))u_nv_n]\,dx=\langle u_n,v_n\rangle_\lambda=||v_n||_\lambda^2+o_n(1). \tag{2.85}$$

Combinando (2.84) e (2.85) obtemos

$$||v_n||^2\le||v_n||_\lambda^2\le\int_{\mathbb{R}^2}f(v_n)v_n\,dx+o_n(1) \tag{2.86}$$

Neste momento usaremos os mesmos argumentos que foram feitos na demonstração da Proposição 2.4.7. Temos para algum $l>2$

$$\int_{\mathbb{R}^2}f(v_n)v_n\,dx\le\beta|v_n|_2^2+C_1|v_n|_l^l,$$

onde β é dado pela estimativa (2.50) e C_1 constante positiva. Pelas imersões de Sobolev temos

$$\int_{\mathbb{R}^2}f(v_n)v_n\,dx\le C_2\beta||v_n||^2+C_3||v_n||^l.$$

Com essas informações, a desigualdade (2.86) fica

$$(1 - C_2\beta)||v_n||^2 \leq C_3||v_n||^l + o_n(1).$$

Tomando o limite quando n tende ao infinito na última desigualdade, podemos concluir que $L_\lambda > \omega_0 > 0$, independente de λ, onde $\omega_0 = \big(C_4/C_3\big)^{\frac{1}{l-2}}$ e $C_4 = 1 - C_2\beta$.

Agora note que a desigualdade (2.86) implica

$$(1 - C_2\beta)||v_n||^2 \leq C_2|v_n|_l^l + o_n(1).$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima obtemos

$$C_4/C_2 L_\lambda \leq \limsup_{n\to+\infty} |v_n|_l^l,$$

ou ainda,

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^l \, dx \geq \widetilde{\omega_0} > 0, \tag{2.87}$$

onde $\widetilde{\omega_0} = \omega_0 C_4/C_2 > 0$.

Por outro lado, fazendo as mesmas manipulações algébricas que foi feito no Lema 2.4.4, é possível mostrar para a sequência (v_n) que existem $\lambda^* > 0$ e $R > 0$ tais que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2/B_R(0)} |v_n|^l \, dx < \widetilde{\omega_0}/2, \quad \lambda \geq \lambda_*. \tag{2.88}$$

Portanto, de (2.87) e (2.88)

$$\widetilde{\omega_0} \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^l \, dx \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2/B_R(0)} |v_n|^l \, dx + \limsup_{n\to+\infty} \int_{B_R(0)} |v_n|^l \, dx < \widetilde{\omega_0}/2,$$

obtendo assim, um absurdo. Então podemos concluir que existe λ_* tal que $\lambda \geq \lambda_*$ a sequência (u_n) converge para u em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

$\blacksquare$

Utilizando os mesmos passos feitos para o caso $N = 3$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (w - u) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u (w - u) \, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(w - u) \, dx \tag{2.89}$$

para todo $w \in \mathbb{K}$. Com isso mostramos que o Problema (2.1) tem uma solução não trivial. Para concluímos a demonstração do Teorema 2.1.1 para $N = 2$ falta mostrar a seguinte proposição.

Proposição 2.4.10 *Seja $\lambda_n \to +\infty$ e (u_n) uma solução de (2.89). Então, existe uma subsequência (u_n) e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \ \textit{em} \ H^1(\mathbb{R}^2).$$

Além disso,

(i) $u \equiv 0$ *em* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

(ii) $||u_n - u||^2_{\lambda_n} \to 0$.

(iii) Quando $\lambda_n \to \infty$ temos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned} &u_n \to u \quad em \quad H^1(\mathbb{R}^2), \\ &\lambda_n \int_{\mathbb{R}^2} V(x)\,|u_n|^2\,dx \to 0, \\ &||u_n||^2_{\lambda_n} \to \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\,dx = ||u||^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

(iv) Temos que u é uma solução da Desigualdade Variacional

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u)\,dx + \int_\Omega u(v-u)\,dx \geq \int_\Omega f(u)(v-u)\,dx, \tag{2.90}$$

para todo $v \in \tilde{\mathbb{K}}$, onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H^1_0(\Omega);\ v \geq \varphi \ q.t.p. \ em \ \Omega\}.$$

Demonstração. Do estudo feito até aqui podemos assumir

$$\limsup_{n \to +\infty} ||u_n||^2_\lambda < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

De tal informação, concluímos que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Consequentemente existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H^1(\mathbb{R}^2)$$

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2,$$

e

$$u_n \to u \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^2),\ 2 \leq s < 2^*.$$

A justificativa (i) segue das mesmas ideias encontradas na Proposição 1.3.10. Para mostrar (ii) utilizamos a mesma argumentação da demonstração da Proposição 2.3.13, isto é, garantimos a convergência

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^2), \tag{2.91}$$

onde exploramos as ideias contidas na demonstração do Lema 2.4.9. Em seguida, deduzimos

$$||v_n||_{\lambda_n}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(v_n)v_n\,dx + o_n(1), \tag{2.92}$$

como foi feito na demonstração do Lema 2.4.9, onde $v_n = u_n - u$. Assim, combinando (2.91) e (2.92) concluímos

$$||v_n||_{\lambda_n}^2 \to 0$$

finalizando (*ii*). Os demais itens (*iii*) e (*iv*) segue diretamente da demonstração da Proposição 2.3.13.

■

Capítulo 3

Existência de solução para uma classe de desigualdades variacionais com potencial Bartsch-Wang: Parte II

3.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a existência de soluções para a seguinte desigualdade variacional: encontrar $u \in \mathbb{K}$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v-u)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda V(x))u(v-u)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(v-u)\,dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (3.1)$$

onde

$$\mathbb{K} = \{v \in E;\ v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

$\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com parte positiva não trivial e $supp\,\varphi^+ \subset \Omega$, $\lambda > 0$ é um parâmetro e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando as seguintes condições:

(V_1) $V(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N$;

(V_2) $\Omega := int(V^{-1}(\{0\})) \neq \emptyset$ é um subconjunto aberto conexo limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave.

Assumimos as seguintes condições para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Se $N \geq 3$, f tem a forma

$$f(t) = \mu |t|^{q-2} t + |t|^{2^*-2} t, \quad (3.2)$$

onde $2^* = 2N/(N-2)$ e $2 < q < 2^*$.

Se $N = 2$, f é uma de classe de C^1 e tem crescimento crítico exponencial, isto é, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t^2}} = \begin{cases} 0, & \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \alpha < \alpha_0 \end{cases}$$

e verifica

(f_1) $\dfrac{f(t)}{t} \to 0$ quando $|t| \to 0$;

(f_2) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(t) := \theta \int_0^t f(s)\,ds \leq f(t)t, \ t \neq 0;$$

(f_3) Existem $C > 0$ tal que

$$|f'(t)| \leq Ce^{\alpha_0 t^2}, \ t \in \mathbb{R};$$

(f_4) Existem $p > 2$ e uma constante $\nu > 0$ tais que

$$f(t) \geq \nu t^p, \ \forall t \geq 0.$$

Supomos ainda sem perda de generalidade $f(t) = 0$, para $t \leq 0$. Como mencionamos na Introdução, fomos motivados pelo trabalho de Alves & Côrrea [5]. Os autores combinaram métodos variacionais em conjunto com Princípio Variacional de Ekeland [23] e uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais não diferenciáveis devido Szulkin [55]. Aqui além garantirmos uma solução não trivial do problema (3.1) em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, adotamos uma metodologia bastante diferente da abordada em [5]. No nosso estudo utilizamos o método de penalização.

O principal resultado do Capítulo 3 é o teorema que enunciaremos a seguir

Teorema 3.1.1 *Assuma que V satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e f satisfaz $(f_1) - (f_4)$ se $N = 2$. Então existem $\lambda_* > 0$, $\mu_* > 0$, $\nu_* > 0$ e $\rho > 0$ tais que se $||\varphi|| < \rho$, o problema (3.1) tem solução u_λ não trivial para $\lambda \geq \lambda_*$, $\mu \geq \mu_*$ e $\nu \geq \nu_*$. Além disso, a família $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda_*}$ tem a seguinte propriedade: para qualquer subsequência $\lambda_n \to +\infty$, podemos extrair uma subsequência (λ_n) tal que a sequência (u_{λ_n}) converge forte em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para uma função u que verifica $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e é solução da seguinte desigualdade variacional*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(v-u)\,dx + \int_\Omega u(v-u)\,dx \geq \int_\Omega f(u)u(v-u)\,dx,$$

para todo $v \in \tilde{\mathbb{K}}$, onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega);\ v \geq \varphi \ q.t.p.\ em\ \Omega\}$$

Na demonstração deste teorema utilizamos todo estudo dos capítulos anteriores, algumas ideias encontradas em Alves & Côrrea [3] e o Lema de Concentração e Compacidade de Lions, o qual é uma consequência imediata de um resultado devido a Lions [40, 41, 42], para mais detalhes ver [4].

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na primeira seção, introduzimos alguns resultados preliminares. Na Seção 3.2, demonstraremos o Teorema 3.1.1 para caso $N \geq 3$. Inicialmente, modificamos a desigualdade variacional (3.1), ou seja, realizamos um truncamento na não-linearidade. Em seguida penalizamos a desigualdade variacional modificada e iremos mostrar que o problema penalizado possui solução não trivial. Para isso, mostraremos que o funcional energia verifica a geometria do passo da montanha e também a condição $(PS)_c$ para alguns valores de c. Em seguida, trabalhamos com a sequência de soluções do problema penalizado combinado com o operador de penalização para obtermos, a menos de subsequência, uma convergência forte em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Através desta convergência, garantimos uma solução não trivial para a desigualdade variacional modificada. Além disso, estabelecemos um resultado de concentração para uma sequência de soluções (u_λ) da desigualdade variacional modificada. Logo após, mostramos que para λ suficientemente grande uma solução u_λ da desigualdade variacional modificada é solução da desigualdade variacional (3.1). Por fim, estabelecemos um resultado de concentração para uma sequência de soluções da desigualdade variacional (3.1) o que de fato demonstra o Teorema 3.1.1 para o caso $N \geq 3$. Na Seção 3.3, o objetivo é provar o Teorema 3.1.1 para o caso $N = 2$. Seguimos os mesmos passos da Seção 3.2 com os devidos ajustes e faremos uso de uma versão da desigualdade de Trundiger & Moser em todo $\mathbb{R}^2$, devido a Cao [17].

Lema 3.1.2 *Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada satisfazendo*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad L^{2^*}(\mathbb{R}^N),$$

$$|u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu \quad em \quad \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \xi \quad em \quad \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$$

onde ν *e* ξ *são medidas finitas não negativas em* $\mathbb{R}^N$. *Então existem sequências* $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ *e* $(\nu_n) \subset [0, \infty)$ *satisfazendo*

$$|u_n|^{2^*} \rightharpoonup |u|^{2^*} + \sum_{i=1}^{+\infty} \nu_i \delta_{x_i} = \nu,$$

com

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n^{2/2^*} < \infty \tag{3.3}$$

e

$$\xi(x_n) \geq S\nu_n^{2/2^*} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

onde δ_i *é a medida de Dirac e* S *é a melhor contante de Sobolev já conhecida dos capítulos anteriores.*

3.2 Demonstração do Teorema 3.1.1 para o caso $N \geq 3$

Nesta seção consideramos a existência de solução para a classe de desigualdades variacionais (3.1) da seguinte forma: encontrar $u \in \mathbb{K}$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v-u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda V(x)) u(v-u)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (\mu u^{q-1} + u^{2^*-1})(v-u)\, dx,\ \forall v \in \mathbb{K},$$

onde o conjunto $\mathbb{K}$ é o mesmo definido no Capítulo 2.

3.2.1 Desigualdade variacional modificada

Nesta seção adaptamos, para nosso caso, alguns argumentos encontrados em [3] e [21]. Fixando $k = \max\{q/(q-2), 2\}$, sem dificuldades podemos encontrar uma constante $a > 0$ verificando $f_+(a) = a/k$. Por razões técnicas definimos também as funções $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$h(t) = \begin{cases} f_+(t), & t \leq a \\ \dfrac{t}{k}, & t \geq a \end{cases}$$

e

$$H(t) = \int_0^t h(s) ds.$$

Seja Ω' um aberto conexo limitado com fronteira suave contento $\overline{\Omega}$. Usando a função característica de Ω', definimos as seguintes funções $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g(x,t) = \chi_{\Omega'}(x) f_+(t) + (1 - \chi_{\Omega'}(x))h(t)$$

e

$$G(x,t) = \chi_{\Omega'}(x) F_+(t) + (1 - \chi_{\Omega'}(x))H(t),$$

onde

$$F_+(t) = \int_0^t f_+(s)ds.$$

Nosso interesse nesse momento é estudar a existência de solução não trivial para a seguinte desigualdade variacional modificada: encontrar $u \in \mathbb{K}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (v-u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u (v-u)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)(v-u)\, dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}. \tag{3.5}$$

Observação 3.2.1 *Se u é uma solução de (3.5) não negativa verificando*

$$u(x) \leq a, \ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega'$$

então u é uma solução do problema (3.1).

De fato, se $x \in \Omega'$ temos $\chi_{\Omega'}(x) = 1$ e assim,

$$g(x, u(x)) = f(u(x)) = \mu u(x)^{q-1} - u(x)^{2^*-1}.$$

Se $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega'$, então $\chi_{\Omega'}(x) = 0$ e assim,

$$g(x, u(x)) = h(u(x)) = f(u(x)) = \mu u(x)^{q-1} - u(x)^{2^*-1},$$

pois $h(u(x)) = f(u(x))$, quando $0 \leq u(x) \leq a$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega'$.

Antes de continuarmos com nosso propósito, mostraremos algumas propriedades envolvendo a função g.

Afirmação 3.2.2 *Como $a > 0$, então as propriedades abaixo são verdadeiras:*

(g_1) *$g(x,t) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \leq 0$;*

(g_2) *$\dfrac{g(x,t)}{t} \to 0$ quando $t \to 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$;*

(g_3) *Dado* $\beta > 0$ *existe* $C_\beta > 0$ *tal que*

$$|g(x,t)| \leq \mu\beta|t| + C_\beta|t|^{2^*-1}, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

e consequentemente,

$$|G(x,t)| \leq \mu\frac{\beta}{2}|t|^2 + C_\beta|t|^{2^*}, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R};$$

(g_4) *Para todo* $x \in \Omega'$ *e* $t > 0$ *tem-se*

$$0 < qG(x,t) \leq g(x,t)t;$$

(g_5) *Para todo* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega'$ *e* $t > 0$ *tem-se*

$$0 < 2G(x,t) \leq g(x,t)t \leq \frac{1}{k}(1 + \lambda V(x))t^2.$$

Sem maiores dificuldades é possível mostrar as assertivas $(g_1) - (g_4)$, por isso vamos mostrar apenas (g_5). Inicialmente, observemos que

$$g(x,t) = h(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega'$$

e se $0 < t \leq a$ temos

$$g(x,t) = h(t) = f(t).$$

Agora, note que

$$2G(x,t) = 2\int_0^t f(s)\,ds \leq q\int_0^t f(s)\,ds \leq f(t)t = h(t)t.$$

Por outro lado,

$$h(t)t = f(t)t = \frac{f(t)}{t}t^2 \leq \frac{f(a)}{a}t^2 = \frac{1}{k}t^2 \leq \frac{1}{k}(1 + \lambda V(x))t^2.$$

Logo, para $0 < t \leq a$

$$0 < 2G(x,t) \leq g(x,t)t \leq \frac{1}{k}(1 + \lambda V(x))t^2. \tag{3.6}$$

Vamos agora considerar $t > a$. Neste caso $h(t) = t/k$ donde segue

$$2G(x,t) = 2\int_0^t h(s)\,ds = 2\int_0^t \frac{h(s)}{s}s\,ds = 2\left(\int_0^a \frac{h(s)}{s}s\,ds + \int_a^t \frac{h(s)}{s}s\,ds\right),$$

mas

$$\int_0^a \frac{h(s)}{s} s\,ds = \int_0^a \frac{f(s)}{s} s\,ds \le \int_0^a \frac{f(a)}{a} s\,ds$$

e

$$\int_a^t \frac{h(s)}{s} s\,ds = \int_a^t \frac{1}{k} s\,ds = \int_a^t \frac{f(a)}{a} s\,ds$$

então,

$$2G(x,t) \le 2\left(\int_0^a \frac{f(a)}{a} s\,ds + \int_a^t \frac{f(a)}{a} s\,ds\right) = 2\int_0^t \frac{f(a)}{a} s\,ds = \frac{f(a)}{a} t^2 = \Big(\frac{1}{k} t\Big) t = h(t)t.$$

Observe também

$$h(t)t = \frac{1}{k} t^2 \le \frac{1}{k}(1+\lambda V(x))t^2.$$

Portanto, se $t > a$

$$0 < 2G(x,t) \le g(x,t)t \le \frac{1}{k}(1+\lambda V(x))t^2. \tag{3.7}$$

De (3.6) e (3.7)

$$0 < 2G(x,t) \le g(x,t)t \le \frac{1}{k}(1+\lambda V(x))t^2 \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega' \ \text{ e } \ t > 0$$

com isso justificamos (g_5).

Como fizemos no Capítulo 2, aqui também utilizaremos o método de penalização, isto é, procuramos soluções não triviais para a seguinte classe de equações elípticas

$$-\Delta u + (1+\lambda V(x))u - \frac{1}{\epsilon}(\varphi - u)^+ \chi_\Omega = g(x,u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{3.8}$$

Recordamos que u é uma solução fraca de (3.8) se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + (1+\lambda V(x))uv]\,dx - \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u)^+ v\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v\,dx, \ \forall v \in E_\lambda, \tag{3.9}$$

onde $\epsilon > 0$ é o parâmetro de penalização, enquanto $\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u)^+ v\,dx$ é o termo de penalização.

As soluções fracas da equação penalizada (3.8) podem ser encontradas como pontos críticos do funcional $I_{\lambda,\epsilon} : E_\lambda \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) = \frac{1}{2}||u||_\lambda^2 + \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega [(\varphi - u)^+]^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,dx,$$

o qual está bem definido e é de classe C^1 sobre o espaço E_λ (é o mesmo do Capítulo 2) com

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u)v = \langle u, v\rangle_\lambda - \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u)^+ v\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v\,dx, \quad \forall u, v \in E_\lambda$$

ou equivalentemente,

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u)v = \int_{\mathbb{R}^N}[\nabla u\nabla v+(1+\lambda V(x))uv]\,dx - \frac{1}{\epsilon}\int_{\Omega}(\varphi-u)^+v\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v\,dx \ \ \forall u,v\in E_\lambda.$$

O próximo lema mostra que funcional $I_{\lambda,\epsilon}$ verifica a geometria do passo da montanha.

Lema 3.2.3 *(a) Existem contantes $r,\rho>0$, as quais são independentes de λ e ϵ, tais que*

$$I_{\lambda,\epsilon}(u)\geq\rho \quad \textit{para} \quad ||u||_\lambda = r;$$

(b) Existe $e\in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $||e||_\lambda > r$ e $I_{\lambda,\epsilon}(e)<0$.

Demonstração. De (g_3), fixado $\beta>0$ existe $C_\beta>0$ tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u)\geq \frac{1}{2}||u||^2_\lambda - \frac{\mu\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\,dx - C_\beta\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\,dx.$$

Utilizando as imersões de Sobolev existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u)\geq \frac{1}{2}||u||^2_\lambda - C_1\beta||u||^2_\lambda - C_2||u||^2_\lambda,$$

ou ainda,

$$I_{\lambda,\epsilon}(u)\geq \Big(\frac{1}{2}-C_1\beta\Big)||u||^2_\lambda - C_2||u||^2_\lambda.$$

Fixando β suficientemente pequeno de maneira que $1/2 - C_1\beta > 0$, existem r e ρ positivos tais que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u)\geq\rho>0, \quad \text{para} \quad ||u|| = r,$$

mostrando a primeira geometria. Agora, observe que

$$\int_\Omega[(\varphi-\varphi^+)^+]^2\,dx = 0 \quad \text{e} \quad ||\varphi^+||_\lambda = ||\varphi^+||.$$

Logo,

$$I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+)\leq ||\varphi^+||^2\leq||\varphi||^2.$$

Como tomamos $||\varphi||$ suficientemente pequena em relação ρ, por hipótese, então

$$I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+)<\rho.$$

Sabemos que $supp\,\varphi^+\subset\Omega$, assim, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}G(x,t\varphi^+)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}\tilde{F}(t\varphi^+)\,dx = \frac{\mu t^q}{q}\int_{\Omega'}|\varphi^+|^q\,dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega'}|\varphi^+|^{2^*}\,dx$$

para $t > 1$. Com essas informações asseguramos que

$$I_{\lambda,\epsilon}(t\varphi^+) = \frac{t^2}{2}||\varphi^+||_\lambda^2 - \frac{t^q\mu}{q}\int_{\Omega'}|\varphi^+|^q\,dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega'}|\varphi^+|^{2^*}\,dx.$$

Sendo $2 < q < 2^*$, obtemos $I_{\lambda,\epsilon}(t\varphi^+) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Assim, tomando t_* suficientemente grande e denotando $w = (1+t_*)\varphi^+$ tem-se

$$I_{\lambda,\epsilon}(w) < I_{\lambda,\epsilon}(\varphi^+) < \rho \leq I_{\lambda,\epsilon}(u), \quad \text{com} \quad ||u||_\lambda = r$$

e

$$||\varphi^+||_\lambda < r < ||w||_\lambda,$$

demonstrado o lema.

■

Aplicando o Teorema do Passo da Montanha devido Willem [60], garantimos a existência de uma sequência $(PS)c_{\lambda,\epsilon}$ para $I_{\lambda,\epsilon}$, isto é, uma sequência (u_n) verificando

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) \to c_{\lambda,\epsilon} \text{ e } I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) \to 0,$$

onde

$$c_{\lambda,\epsilon} = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\epsilon}(\gamma(t))$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],E);\ \gamma(0) = \varphi^+ \text{ e } \gamma(1) = w\}.$$

Lema 3.2.4 *Existem $\tau > 0$ e $\mu_* = \mu_*(\tau) > 0$ tais que*

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < \frac{q-2}{2q}S^{N/2} - \tau, \quad \forall\lambda > 0, \quad \forall\epsilon > 0 \quad e \quad \mu \geq \mu_*.$$

Omitiremos a demonstração do Lema 3.2.4, pois a mesma segue os mesmos procedimentos feitos na demonstração do Lema 2.3.2.

Lema 3.2.5 *Se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$, então (u_n) é limitada.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$. Antes de tudo, note que

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \tfrac{1}{q}I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)||u_n||_\lambda^2 + \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega [(\varphi-u_n)^+]^2\,dx \\ &+ \frac{1}{q\epsilon}\int_\Omega (\varphi-u_n)^+u_n\,dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}(g(x,u_n)u_n - qG(x,u_n))\,dx. \end{aligned}$$

Como argumentamos na demonstração do Lema 2.3.3,

$$\frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega [(\varphi-u_n)^+]^2\,dx + \frac{1}{q\epsilon}\int_\Omega (\varphi-u_n)^+u_n\,dx \geq \frac{1}{q\epsilon}\int_\Omega (\varphi-u_n)^+\varphi\,dx.$$

Observe também que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n\,dx \geq \int_{\Omega'} g(x,u_n)u_n\,dx$$

e pelas observações (g_4) e (g_5)

$$\frac{1}{q}\int_{\Omega'}(g(x,u_n)u_n - qG(x,u_n))\,dx \geq 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u_n)\,dx \leq \frac{1}{2k}\int_{\mathbb{R}^N}(1+\lambda V(x))|u_n|^2\,dx \leq \frac{1}{2k}||u_n||_\lambda^2.$$

Com essas informações e feitas manipulações algébricas podemos concluir que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q}I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \geq \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right) - \frac{1}{2k}\right]||u_n||_\lambda^2 + \frac{1}{q\epsilon}\int_\Omega (\varphi-u_n)^+\varphi\,dx.$$

Agora, utilizando a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev existe uma constante positiva C tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q}I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \geq \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right) - \frac{1}{2k}\right]||u_n||_\lambda^2 - \frac{1}{q\epsilon}|\varphi|_2^2 - \frac{C}{q\epsilon}|\varphi|_2^2||u_n||_\lambda. \tag{3.10}$$

Por outro lado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q}I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \leq c + o_n(1) + o_n(1)||u_n||_\lambda, \quad n \geq n_0. \tag{3.11}$$

Das condições (3.10), (3.11) e recordando que $k = \max\{q/(q-2), 2\}$ deduzimos

$$\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right) - \frac{1}{2k}\right]||u_n||_\lambda^2 \leq c + o_n(1) + \frac{1}{q\epsilon}|\varphi|_2^2 + \big(o_n(1) + \frac{C}{q\epsilon}|\varphi|_2^2\big)||u_n||_\lambda$$

para $n \geq n_0$, o que garante que a sequência (u_n) é limitada.

$\blacksquare$

Aqui, listamos todos os lemas encontrados no Capítulo 2 com relação ao comportamento das sequências $(PS)_c$.

Lema 3.2.6 *Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência (u_n) pode ser considerada como uma sequência de funções não negativas, ou seja, a (u_n^+) é uma sequência $(PS)_c$.*

Lema 3.2.7 *Sendo (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$ então a mesma verifica*

$$\limsup_{n\to+\infty} ||u_n||_\lambda^2 \leq \Big(\frac{2q}{q-2}\Big)c.$$

Lema 3.2.8 *Se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$, então dado $\delta > 0$ existe $R > 0$ tal que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \left(\int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2)\, dx \right) < \delta$$

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$, então a mesma é limitada. Assim, denotemos

$$M = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||u_n||_\lambda.$$

Fixemos um $R > 0$ tal que $\Omega' \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$ e seja $\eta \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ uma função satisfazendo

$$0 \leq \eta(x) \leq 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^N;\ \eta(x) = 0, \forall x \in \overline{B}_{\frac{R}{2}}(0);\ \eta(x) = 1,\ \forall x \in B_R^c(0) \text{ e } |\nabla\eta| \leq \frac{M}{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Sem maiores dificuldades, é possível mostrar que $(\eta u_n) \subset E_\lambda$ e que a mesma é limitada em E_λ. Desta forma, segue

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)(\eta u_n) = o_n(1)$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\eta u_n) + (1+\lambda V(x))\eta u_n^2]\, dx - \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u_n)^+ \eta u_n\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(\eta u_n)\, dx = o_n(1)$$

ou ainda,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\eta u_n) + (1 + \lambda V(x))\eta |u_n|^2]\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)\eta u_n\, dx = o_n(1)$$

pois

$$\int_{\Omega}(\varphi - u_n)^+\eta u_n\,dx = 0.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\eta|\nabla u_n|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}u_n\nabla\eta\nabla u_n\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}(1+\lambda V(x))\eta|u_n|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}g(x,u_n)\eta u_n\,dx+o_n(1)$$

Utilizando a desigualdade (g_5) e as propriedades da função η podemos concluir

$$\begin{aligned}\int_{B^c_R(0)}|\nabla u_n|^2\,dx + \int_{\overline{B}_R(0)}u_n\nabla\eta\nabla u_n\,dx \quad &+ \quad \int_{B^c_{R/2}(0)}(1+\lambda V(x))\eta|u_n|^2\,dx\\ &\leq \quad \frac{1}{k}\int_{B^c_{R/2}(0)}(1+\lambda V(x))\eta|u_n|^2\,dx + o_n(1).\end{aligned}$$

Sendo $k > 2$,

$$\int_{B^c_R(0)}|\nabla u_n|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{B^c_{R/2}(0)}(1+\lambda V(x))\eta|u_n|^2\,dx \leq \int_{\overline{B}_R(0)}|u_n||\nabla\eta||\nabla u_n|\,dx + o_n(1).$$

Mais uma vez, usando as propriedades da função η e após alguns cálculos segue-se que

$$\int_{B^c_R(0)}|\nabla u_n|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{B^c_R(0)}(1+\lambda V(x))\eta|u_n|^2\,dx \leq \frac{M}{R}\int_{\overline{B}_R(0)}|u_n||\nabla\eta||\nabla u_n|\,dx + o_n(1).$$

Agora, usaremos a desigualdade de Hölder para deduzimos

$$\int_{B^c_R(0)}|\nabla u_n|^2\,dx + \int_{B^c_R(0)}(1+\lambda V(x))|u_n|^2\,dx \leq C\frac{M}{R} + o_n(1),$$

onde C é uma constante positiva. Logo,

$$\int_{B^c_R(0)}|\nabla u_n|^2\,dx + \int_{B^c_R(0)}|u_n|^2\,dx \leq C\frac{M}{R} + o_n(1),$$

Tomando R suficientemente grande e o limite em n concluímos a demonstração.

■

Proposição 3.2.9 *Existe $\widehat{\lambda} = \widehat{\lambda}(\tau) > 0$ tal que $I_{\lambda,\epsilon}$ verifica a condição $(PS)c_{\lambda,\epsilon}$ para qualquer $c_{\lambda,\epsilon} \in \left(0, \frac{q-2}{2q}S^{N/2} - \tau\right)$ para todo $\lambda \geq \widehat{\lambda}$, onde τ foi dado no Lema 3.2.4.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$, isto é,

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) \to c_{\lambda,\epsilon} \text{ e } I'_{\lambda,\epsilon}(u_n) \to 0.$$

Suponha sem perda de generalidade que a sequência (u_n) é não negativa. Sabemos que a mesma é limitada. Então para alguma subsequência existe $u \in E_\lambda$ tal que podemos assumir os seguintes fatos:

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ E_\lambda,$$

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$u_n \to u \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^N), \ 2 \leq s < 2^*.$$

Com a realização de alguns cálculos é possível mostrar que $I'_{\lambda,\epsilon}(u) = 0$, e assim, $I'_{\lambda,\epsilon}(u)u = 0$.

Afirmação 3.2.10 *A sequência (ν_n) obtida aplicando o Lema 3.1.2 para a sequência (u_n) verifica $\nu_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

De fato, seja $\psi_\beta = \psi((x - x_j)/\beta)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e para todo $\beta > 0$, onde $\psi \in C_0^\infty(\Omega')$ tal que $\psi = 1$ em $B_1(0)$, $\psi = 0$ sobre $B_2^c(0)$ e $|\nabla \psi| \leq 2$, com $0 \leq \psi \leq 1$. Sem dificuldades, é possível mostrar que a sequência $(\psi_\beta u_n) \subset E_\lambda$ é limitada em E_λ. Assim,

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)(\psi_\beta u_n) = o_n(1)$$

ou também,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\psi_\beta u_n) + (1 + \lambda V(x))(\psi_\beta) u_n^2]\, dx - \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u_n)^+ \psi_\beta u_n \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)\psi_\beta u_n \, dx = o_n(1)$$

Pela definição da função ψ_β e da condição de crescimento da função g podemos observar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)\psi_\beta u_n \, dx \leq \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \psi_\beta \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \psi_\beta \, dx.$$

Desta desigualdade,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \psi_\beta u_n \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x))\psi_\beta u_n^2 \, dx \quad &\leq \quad \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \psi_\beta \, dx + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u_n)^+ \psi_\beta u_n \, dx \\ &+ \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \psi_\beta \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \psi_\beta \, dx. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ nesta última expressão e usando as definições das medidas ν e ξ segue que

$$\lim_{n\to\infty} \Big(L_n - M_n\Big) \leq \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \psi_\beta \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\beta \, d\nu - \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\beta \, d\xi - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x))\psi_\beta u^2 \, dx. \tag{3.12}$$

onde adotamos por simplicidade

$$L_n = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \psi_\beta u_n \, dx$$

e

$$M_n = \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega (\varphi - u_n)^+ \psi_\beta u_n \, dx.$$

Agora, vamos analisar o seguinte limite $\lim\limits_{n \to \infty} L_n$. Note que

$$L_n = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \psi_\beta u_n \, dx = \int_{B(x_j, 2\beta)} \nabla u_n \nabla \psi_\beta u_n \, dx,$$

logo

$$|L_n| \leq \int_{B(x_j,2\beta)} |\nabla u_n| |\nabla \psi_\beta| u_n \, dx.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder,

$$|L_n| \leq |\nabla u_n|_2 \left(\int_{B(x_j,2\beta)} |\nabla \psi_\beta|^2 u_n^2 \, dx \right)^{1/2} \leq ||u_n|| \left(\int_{B(x_j,2\beta)} |\nabla \psi_\beta|^2 u_n^2 \, dx \right)^{1/2},$$

ou seja,

$$|L_n| \leq M \left(\int_{B(x_j,2\beta)} |\nabla \psi_\beta|^2 u_n^2 \, dx \right)^{1/2},$$

onde $M = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} ||u_n||$, pois (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Tomando o limite quando $n \to \infty$, podemos concluir que

$$\lim_{n \to \infty} |L_n| \leq M \left(\int_{B(x_j,2\beta)} |\nabla \psi_\beta|^2 u^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Usando, mais uma vez, a desigualdade de Hölder com expoentes $N/(N-2)$ e $N/2$ segue

$$\lim_{n \to \infty} |L_n| \leq M \left(\int_{B(x_j,2\beta)} |u|^{2^*} \, dx \right)^{1/2^*} \left(\int_{B(x_j,2\beta)} |\nabla \psi_\beta|^N \, dx \right)^{1/N}.$$

Agora, observe por uma mudança de variável que

$$\int_{B(x_j,2\beta)} |\nabla \psi_\beta|^N (x) \, dx = \int_{B(0,2)} |\nabla \psi_\beta|^N (z\beta + x_j) \beta^N \, dz = \int_{B(0,2)} |\nabla \psi|^N (z) \, dz$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue é possível mostrar que

$$\lim_{\beta \to 0} \int_{B(x_j,2\beta)} |u|^{2^*} \, dx = 0.$$

De todo estudo feito, podemos garantir que

$$\lim_{\beta\to 0}\Big(\lim_{n\to\infty} L_n\Big) = 0.$$

É possível mostrar também,

$$\lim_{\beta\to 0}\Big(\lim_{n\to\infty} M_n\Big) = \lim_{\beta\to 0}\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\epsilon}\int_{\Omega}(\varphi - u_n)^{+}\psi_{\beta}u_n\,dx\Big) = 0.$$

Deste modo, tomando o limite quando $\beta \to 0$ em (3.12) temos

$$\xi(x_j) \leq \nu_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Pelo Lema 3.1.2, temos $\xi(x_j) \geq S\nu_i^{2/2^*}$ e por a desigualdade (3.13) segue que $\nu_j \geq S\nu_i^{2/2^*}$. Se $\nu_j > 0$, então temos

$$\nu_j \geq S^{N/2}, \quad \forall j \in \mathbb{N} \tag{3.14}$$

o que implica que (ν_j) é finita, pois (ν_j) verifica (3.3).

Provaremos, que $\nu_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Usando, mais uma vez, o fato que a sequência (u_n) é $(PS)c_{\lambda,\epsilon}$ temos

$$I_{\lambda,\epsilon}(u_n) - \frac{1}{q}I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n \leq c_{\lambda,\epsilon} + o_n(1),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\,dx + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}(1+\lambda V(x))u_n^2\,dx\\ &+\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}(g(x,u_n)u_n - qG(x,u_n))\,dx = o_n(1).\end{aligned}$$

Recordando os argumentos explorados na demonstração do Lema 3.10 podemos garantir que

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}(1+\lambda V(x))u_n^2\,dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}(g(x,u_n)u_n - qG(x,u_n))\,dx \geq 0,$$

logo,

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\,dx \leq c_{\lambda,\epsilon} + o_n(1).$$

Observe que

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\psi_\beta|\nabla u_n|^2\,dx \leq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\,dx.$$

Assim,

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\psi_\beta|\nabla u_n|^2\,dx \leq c_{\lambda,\epsilon}+o_n(1).$$

Passando ao limite quando $n\to+\infty$ na desigualdade acima ficamos

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\psi_\beta\,d\xi \leq c_{\lambda,\epsilon}.$$

Por fim, tomando o limite quando $\beta\to 0$ nesta última desigualdade, concluímos que

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\xi(x_j)\leq c_{\lambda,\epsilon},\quad \forall j\in\mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Sabemos $\xi(x_j)\geq S\nu_j^{2/2^*}$, se existe um ν_{j_0} para alguma $j_0\in\mathbb{N}$, então de (3.14) e (3.15) obtemos

$$c_{\lambda,\epsilon}\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\xi(x_{j_0})\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)S\nu_{j_0}^{2/2^*}\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)S\left(S^{N/2}\right)^{2/2^*}$$

ou ainda,

$$c_{\lambda,\epsilon}\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)S^{N/2}.$$

No entanto, por hipótese

$$c_{\lambda,\epsilon}\in\left(0,\frac{q-2}{2q}S^{N/2}-\tau\right)$$

o que é uma contradição, portanto $\nu_j=0$ para todo $j\in\mathbb{N}$ o que justifica a afirmação.

Da Afirmação 3.2.10 tem se $|u_n|^{2^*}\rightharpoonup|u|^{2^*}$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\psi|u_n|^{2^*}\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}\psi|u|^{2^*}\,dx,\quad \psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{3.16}$$

donde podemos concluir que

$$u_n\to u\ \text{ em }\ L^{2^*}_{loc}(\mathbb{R}^N). \tag{3.17}$$

Para justificarmos este resultado utilizaremos o Lema Brézis & Lieb, ver [38], e o limite (3.16). Dado um $\Theta\subset\mathbb{R}^N$ aberto limitado, nosso objetivo é mostrar que

$$u_n\to u\ \text{ em }\ L^{2^*}(\Theta).$$

Seja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ com $\psi = 1$ em Θ. Sabendo que

$$|u_n|^{2^*}\psi \to |u|^{2^*}\psi \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N$$

e por (3.16), $|u_n|^{2^*}\psi$ converge para $|u|^{2^*}\psi$ em norma no espaço $L^1(\mathbb{R}^N)$, garantimos

$$||u_n|^{2^*}\psi - |u|^{2^*}\psi|_1 \to 0. \tag{3.18}$$

Note que

$$\int_\Theta ||u_n|^{2^*} - |u_n|^{2^*}|\,dx = \int_\Theta ||u_n|^{2^*}\psi - |u_n|^{2^*}\psi|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} ||u_n|^{2^*}\psi - |u_n|^{2^*}\psi|\,dx$$

logo, por (3.18)

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Theta |u_n|^{2^*}\,dx = \int_\Theta |u|^{2^*}\,dx.$$

Por este limite e o fato que

$$u_n \to u \ \text{ q.t.p. em } \ \Theta$$

segue do Lema de Brézis & Lieb que

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^{2^*}(\Theta).$$

Enfim, mostraremos agora que $u_n \to u$ em E_λ. Observe que

$$||u_n - u||_\lambda^2 = \langle u_n - u, u_n - u\rangle_\lambda = ||u_n||_\lambda^2 - \langle u_n, u\rangle_\lambda + o_n(1).$$

Note que

$$||u_n||_\lambda^2 = I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u_n)^+ u_n\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n\,dx$$

e

$$-\langle u_n, u\rangle_\lambda = -I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u - \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u_n)^+ u\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u\,dx$$

Com estas informações e recordando a justificativa da Afirmação 2.3.5 podemos concluir que

$$||u_n - u||_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u\,dx + o_n(1).$$

Afirmação 3.2.11 *Vale os seguintes limites:*

(*i*) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)u\,dx;$

(*ii*) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)v\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v\,dx, \quad \forall v \in E_\lambda.$

Supondo verdadeira a Afirmação 3.2.11, obtemos

$$||u_n - u||_\lambda^2 = o_n(1)$$

logo, $u_n \to u$ em E_λ mostrando a condição (PS). Vamos justificar a Afirmação 3.2.11. Começamos por (i). Dado $\delta > 0$, considere $R > 0$ como no Lema 3.2.8 e

$$I_{n,1} = \int_{B_R(0)} |g(x,u_n)u_n - g(x,u)u|\,dx \quad \text{e} \quad I_{2,n} = \int_{B_R^c(0)} |g(x,u_n)u_n - g(x,u)u|\,dx$$

utilizamos estas notações para simplificar os cálculos na demonstração desta Afirmação. Da propriedade (g_3), obtemos

$$|g(x,t)t| \leq \mu|t|^2 + C_\beta|t|^{2^*}, \quad \forall(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Sabemos que a imersão $E_\lambda \hookrightarrow L^s(B_R(0))$, para $2 \leq s < 2^*$, é compacta. Assim, de (3.17) podemos concluir que a imersão

$$E_\lambda \hookrightarrow L^s(B_R(0)), \text{ para } 2 \leq s \leq 2^*,$$

é compacta. Desta forma, utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} I_{n,1} = 0. \tag{3.19}$$

Por outro lado, usando que $\Omega' \subset B_R(0)$, deduzimos

$$|g(x,t)t| \leq \frac{1}{k}|t|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_{n,2} &\leq \frac{1}{k}\int_{B_R^c(0)} |u_n|^2\,dx + \frac{1}{k}\int_{B_R^c(0)} |u|^2\,dx \\ &\leq \frac{1}{k}\int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2)\,dx + \frac{1}{k}\int_{B_R^c(0)} |u|^2\,dx. \end{aligned}$$

Como $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, para R suficientemente grande

$$\int_{B_R^c(0)} |u|^2\,dx < \frac{\delta}{2k}.$$

Pelo Lema 3.2.8, tomando o limite superior quando $n \to \infty$, ficamos com

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2)\,dx\right) < \frac{\delta}{2k}.$$

Consequentemente,

$$\limsup_{n\to\infty} I_{n,2} < \delta, \quad \forall \delta > 0.$$

isto implica

$$\lim_{n\to\infty} I_{n,1} = 0. \tag{3.20}$$

Desta forma, de (3.19) e (3.20) mostramos o que queríamos, ou seja, (i). A justificativa de (ii) segue os mesmos passos dados na demonstração de (i).

■

De Todo estudo feito até aqui, podemos concluir que o problema penalizado (3.8) possui solução não trivial. Este resultado segue diretamente do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti & Rabinowitz [8].

3.2.2 Existência de solução para a desigualdade variacional modificada

Para $\lambda \geq \lambda_*$ e $\mu \geq \mu_*$ fixados existe uma solução $u_\epsilon \in E_\lambda$ não trivial do problema (3.8), ou seja, u_ϵ verifica

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_\epsilon \nabla v + (1 + \lambda V(x)) u_\epsilon v]\, dx + \frac{1}{\epsilon}\langle P(u_\epsilon), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_\epsilon) v\, dx, \ \forall v \in E_\lambda.$$

Mais uma vez, faremos as identificações:

$$\epsilon = 1/n, \quad u_n = u_{1/n} \quad I_{\lambda,\epsilon} = I_n, \quad I_n(u_n) = c_n,$$

onde $c_n = c_{\lambda,\epsilon}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que existe $u_n \in E_\lambda$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla v + (1 + \lambda V(x)) u_n v]\, dx + n\langle P(u_n), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) v\, dx, \ \forall v \in E_\lambda. \tag{3.21}$$

Analogamente ao que foi feito no Lema 3.2.5, podemos supor que a sequência (u_n) de soluções é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Diante disso, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ E_\lambda,$$

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$u_n \to u \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^N), \ 2 \leq s < 2^*.$$

Afirmação 3.2.12 *A sequência de funções (u_n) é não negativa.*

De fato, considere $u_n^+ = \max\{u_n, 0\}$ e $u_n^- = \min\{u_n, 0\}$ temos que $u_n = u_n^+ + u_n^-$. Substituindo v por u_n^- em (3.21) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla u_n^- + (1 + \lambda V(x)) u_n u_n^-]\, dx + n\langle P(u_n), u_n^- \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u_n^-\, dx$$

Pela definição da g e algumas manipulações algébricas temos

$$||u_n^-||_\lambda^2 + n\langle P(u_n), u_n^- \rangle = 0$$

ou seja,

$$||u_n^-||_\lambda^2 = -n\langle P(u_n), u_n^- \rangle$$

mas

$$-n\langle P(u_n), u_n^- \rangle \leq 0$$

donde segue que

$$||u_n^-||_\lambda = 0.$$

Consequentemente,

$$||u_n||_\lambda = ||u_n^+||_\lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

mostrando que (u_n) é uma sequência de funções não negativas. Como

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

então segue $u \geq 0$.

Sem dificuldades (ver Lema 2.3.10), é possível mostrar que o operador de penalização associado ao problema (3.5) verifica $P(u) = 0$, isto é, $u \in \mathbb{K}$.

Lema 3.2.13 *A seguinte convergência é válida*

$$u_n \to u \quad em \quad E_\lambda.$$

Demonstração. A demonstração deste lema é semelhante a da Proposição 3.2.9, com pequenos ajustes. Primeiro de tudo, note que

$$||u_n - u||_\lambda^2 = \langle u_n - u, u_n - u \rangle_\lambda = ||u_n||_\lambda^2 - \langle u_n, u \rangle_\lambda + o_n(1). \tag{3.22}$$

Sabemos que

$$||u_n||_\lambda^2 = I_n'(u_n)u_n - n\langle P(u_n), u_n\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n\,dx \tag{3.23}$$

e

$$-\langle u_n, u\rangle_\lambda = -I_n'(u_n)u + n\langle P(u_n), u\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u\,dx. \tag{3.24}$$

Substituindo (3.23) e (3.24) em (3.22) deduzimos

$$||u_n - u||_\lambda^2 = n\langle P(u_n), u - u_n\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u\,dx + o_n(1). \tag{3.25}$$

Observe que

$$\langle P(u_n), u - u_n\rangle = \langle P(u_n) - P(u), u - u_n\rangle \leq 0.$$

Da observação acima e da expressão (3.25) obtemos

$$||u_n - u||_\lambda^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u\,dx + o_n(1). \tag{3.26}$$

Para garantirmos os seguintes limites:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)u\,dx \tag{3.27}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)v\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v\,dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \tag{3.28}$$

utilizaremos as mesmas ideias da justificativa da Afirmação 3.2.11. Para isso, precisamos que a sequência (u_n) verifique os mesmos resultados dados pelo Lema 3.2.8: dado $\delta > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2)\,dx \right) < \delta. \tag{3.29}$$

e pela Afirmação 3.2.10 garantimos:

$$u_n \to u \text{ em } L^{2^*}_{Loc}(\mathbb{R}^N). \tag{3.30}$$

A justificativa (3.29), basta repetir todos os passos dados na demonstração do Lema 3.2.8, e para (3.30), inicialmente, precisamos da seguinte afirmação

Afirmação 3.2.14 *Para toda $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\psi \geq 0$ q.t.p. em Ω, tem-se*

$$\langle P(u_n), \psi u_n - \psi\varphi^+\rangle \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Veja que

$$(\varphi - u_n)^+(x)(\varphi^+(x) - u_n(x)) \geq 0, \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

implica que

$$(\varphi - u_n)^+(x)\psi(x)(\varphi^+(x) - u_n(x)) \geq 0, \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.31}$$

pois, $\psi \geq 0$ q.t.p. em Ω. Assim, de (3.31) podemos concluir

$$-\int_\Omega (\varphi - u_n)^+(\psi u_n - \psi\varphi^+)\,dx = \int_\Omega (\varphi - u_n)^+\psi(\varphi^+ - u_n)\,dx \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\langle P(u_n), \psi u_n - \psi\varphi^+\rangle = -\int_\Omega (\varphi - u_n)^+(\psi u_n - \psi\varphi^+)\,dx \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

isso mostra a justificativa da Afirmação 3.2.14. Vejamos agora a justificativa da Afirmação 3.2.10 para a sequência (u_n) de soluções de (3.21). Mais uma vez, consideremos $\psi_\beta = \psi((x - x_j)/\beta)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e para todo $\beta > 0$, onde $\psi \in C_0^\infty(\Omega')$ tal que $\psi = 1$ em $B_1(0)$, $\psi = 0$ sobre $B_2^c(0)$ e $|\nabla\psi| \leq 2$, com $0 \leq \psi \leq 1$. Note que

$$I_n'(u_n)(\psi_\beta u_n - \psi_\beta\varphi^+) = 0$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\psi_\beta u_n - \psi_\beta\varphi^+) \quad &+ \quad (1 + \lambda V(x))u_n(\psi_\beta u_n - \psi_\beta\varphi^+)]\,dx \\ &+ \quad n\langle P(u_n), \psi u_n - \psi\varphi^+\rangle \\ &= \quad \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(\psi_\beta u_n - \psi_\beta\varphi^+)\,dx. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Da igualdade (3.32) e pela Afirmação 3.2.14 deduzimos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\psi_\beta u_n - \psi_\beta\varphi^+) \quad &+ \quad (1 + \lambda V(x))u_n(\psi_\beta u_n - \psi_\beta\varphi^+)]\,dx \\ &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(\psi_\beta u_n - \psi_\beta\varphi^+)\,dx. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Para simplificar denotaremos por

$$L_{n,\beta} = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\psi_\beta\varphi^+) + (1 + \lambda V(x))u_n\psi_\beta\varphi^+]\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)\psi_\beta\varphi^+$$

então, podemos reescrever (3.33) da seguinte forma

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\psi_\beta u_n) + (1 + \lambda V(x))u_n\psi_\beta u_n]\,dx - L_{n,\beta} \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)\psi_\beta u_n\,dx. \tag{3.34}$$

Sem dificuldades, é possível mostrar

$$\lim_{\beta \to 0} \left(\lim_{n \to \infty} L_{n,\beta} \right) = 0. \tag{3.35}$$

Realizando todas as etapas feitas na demonstração da Afirmação 3.2.10 garantimos que $\nu_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$u_n \to u \text{ em } L^{2^*}_{Loc}(\mathbb{R}^N). \tag{3.36}$$

Uma vez provado os limites (3.27) e (3.28), de (3.26) concluímos

$$||u_n - u||^2_\lambda = o_n(1)$$

o que demonstra o lema.

■

Observe que

$$\langle P(u_n), w - u_n \rangle = \langle P(u_n) - P(w), w - u_n \rangle \leq 0$$

para todo $w \in \mathbb{K}$. Então, escolhendo $v = w - u_n$ e substituindo em (3.21), ficamos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (w - u_n)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u_n (w - u_n)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(w - u_n)\, dx \tag{3.37}$$

Pelo Lema 3.2.13, tomando o limite quando $n \to +\infty$ em (3.37) encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (w - u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda V(x)) u (w - u)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u)(w - u)\, dx \tag{3.38}$$

para todo $w \in \mathbb{K}$. Com isso mostramos que o Problema (3.5) tem uma solução não negativa.

3.2.3 Demonstração do Teorema 3.1.1

Na seção anterior conseguimos uma solução u_λ para a desigualdade variacional modificada (3.5). Nosso objetivo é que a mesma verifique

$$u(x)_\lambda \leq a, \ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega' \tag{3.39}$$

pois pela Observação 3.2.1, segue que u_λ é uma solução da desigualdade variacional (3.1) e com isso finalizamos a demonstração do Teorema 3.1.1.

Daqui para frente, consideremos $u_n \in E_{\lambda_n}$ e $\lambda_n \to +\infty$. Cada $u_n \in \mathbb{K}$ e satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(v-u_n)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda_n V(x)) u_n (v-u_n)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)(v-u_n)\, dx \quad (3.40)$$

para todo $v \in \mathbb{K}$.

O próximo resultado foi motivado pela Proposição 1.3.10, vejamos

Proposição 3.2.15 *Seja (u_n) uma sequência soluções de (3.40). Então, existe uma subsequência (u_n) e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso,

(i) $u \equiv 0$ *em* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

(ii) $||u_n - u||^2_{\lambda_n} \to 0$.

(iii) Quando $\lambda_n \to \infty$ temos as seguintes convergências:

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N),$$
$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\, |u_n|^2\, dx \to 0,$$
$$||u_n||^2_{\lambda_n} \to \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, dx = ||u||^2_{H^1(\Omega)}.$$

(iv) Temos que u é uma solução da Desigualdade Variacional

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla(v-u)\, dx + \int_{\Omega} u(v-u)\, dx \geq \int_{\Omega} (\mu|u|^{q-2} + |u|^{2^*-2}) u(v-u)\, dx, \quad (3.41)$$

para todo $v \in \tilde{\mathbb{K}}$, onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H_0^1(\Omega);\ v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Demonstração. Sem dificuldades, é possível mostrar que

$$\limsup_{n \to +\infty} ||u_n||^2_{\lambda_n} \leq \frac{2qc}{q-2}, \quad (3.42)$$

implicando que $(||u_n||_{\lambda_n})$ é limitada em $\mathbb{R}$. Sendo

$$||u_n||_{\lambda_n} \geq ||u_n|| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(u_n) é também limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, e assim, existe uma subsequência de (u_n) e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Vamos mostrar (ii), pois para justificar (i) utilizaremos os mesmos passos dados na demonstração da Proposição 1.3.10. Primeiro de tudo, temos

$$||u_n - u||^2_{\lambda_n} = \langle u_n - u, u_n - u\rangle_{\lambda_n} = \langle u_n, u_n - u\rangle_{\lambda_n} - \langle u, u_n - u\rangle_{\lambda_n}. \tag{3.43}$$

Observe,

$$\langle u, u_n - u\rangle_{\lambda_n} = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla(u_n - u) + (1 + \lambda_n V(x))u(u_n - u)]\, dx$$

mas por (i) deduzimos

$$\langle u, u_n - u\rangle_{\lambda_n} = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla(u_n - u) + (1 + \lambda_n V(x))u(u_n - u)]\, dx = \int_{\Omega} [\nabla u \nabla(u_n - u) + u(u_n - u)]\, dx.$$

Assim, podemos concluir

$$\langle u, u_n - u\rangle_{\lambda_n} = o_n(1),$$

pois $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Dessa última informação, reescrevemos (3.43) da seguinte forma

$$||u_n - u||^2_{\lambda_n} = \langle u_n, u_n - u\rangle_{\lambda_n} + o_n(1). \tag{3.44}$$

Como sabemos que $u_n \geq \varphi$ q.t.p. em Ω para todo $n \in \mathbb{N}$, então $u \geq \varphi$ q.t.p. em Ω e, consequentemente $u \in \mathbb{K}$. Agora, substituindo u por v em (3.40) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(u - u_n)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda_n V(x))u_n(u - u_n)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(u - u_n)\, dx \tag{3.45}$$

ou ainda,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(u_n - u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda_n V(x))u_n(u_n - u)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(u_n - u)\, dx \tag{3.46}$$

ou melhor,

$$\langle u_n, u_n - u\rangle_{\lambda_n} \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(u_n - u)\, dx. \tag{3.47}$$

Combinando (3.44) e (3.47) concluímos

$$||u_n - u||^2_{\lambda_n} \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(u_n - u)\, dx + o_n(1). \tag{3.48}$$

Para concluímos a demonstração de (ii) precisamos, mais uma vez, dos seguintes limites

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u)u\, dx \tag{3.49}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)v\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v\,dx, \quad \forall v\in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.50}$$

Na verdade, precisamos deste resultado

$$u_n \to u \text{ em } L^{2^*}_{Loc}(\mathbb{R}^N) \tag{3.51}$$

e também que a sequência de soluções (u_n) da desigualdade variacional (3.40) verifique os mesmos resultados dados pelo Lema 3.2.8: dado $\delta>0$ existe $R>0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{B^c_R(0)}(|\nabla u_n|^2+|u_n|^2)\,dx\right)<\delta. \tag{3.52}$$

Como vimos na demonstração da Proposição 3.1, esses resultados (3.51) e (3.52) são fundamentais para justificar os limites (3.49) e (3.50). Para justificarmos (3.52) procedemos de forma análoga os passos dados na demonstração do Lema 3.2.8. A dificuldade de justificar (3.51) é justamente provar que $\nu_i=0$ para todo $j\in\mathbb{N}$. Precisamos escolher uma função teste adequada para substituirmos em (3.40), e com isso estabelecer uma desigualdade semelhante a (3.33). Para isso, novamente, consideremos $\psi_\beta=\psi((x-x_j)/\beta)$, para todo $x\in\mathbb{R}^N$ e para todo $\beta>0$, onde $\psi\in C_0^\infty(\Omega')$ tal que $\psi=1$ em $B_1(0)$, $\psi=0$ sobre $B^c_2(0)$ e $|\nabla\psi|\le 2$, com $0\le\psi\le 1$. Afirmamos

Afirmação 3.2.16 *Seja* $v_n=u_n-\psi_\beta(u_n-\varphi^+)\in\mathbb{K}$.

De fato, sabemos que $u_n\ge\varphi^+\ge\varphi$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Note que $\psi_\beta=0$, temos $v_n=u_n$ e consequentemente $v_n\in\mathbb{K}$. Da mesma forma, se $\psi_\beta=1$ temos $v_n=\varphi^+$ e logo $v_n\in\mathbb{K}$. Agora, suponha $0<\psi_\beta<1$ e observe

$$u_n-\psi_\beta u_n=u_n(1-\psi_\beta)\ge\varphi^+(1-\psi_\beta)=\varphi^+-\varphi^+\psi_\beta,$$

assim,

$$v_n=u_n-\psi_\beta u_n+\varphi^+\psi_\beta\ge\varphi^+.$$

isso mostra que $v_n\in\mathbb{K}$ e, portanto, justificamos a Afirmação 3.2.16.

Pela Afirmação 3.2.16 podemos substituir v_n por v em (3.40), então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}[\nabla u_n\nabla(\psi_\beta u_n-\psi_\beta\varphi^+) \quad &+ \quad (1+\lambda_n V(x))u_n(\psi_\beta u_n-\psi_\beta\varphi^+)]\,dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)(\psi_\beta u_n-\psi_\beta\varphi^+)\,dx.\end{aligned} \tag{3.53}$$

Observe que a desigualdade acima é idêntica a (3.33). Então realizando as mesmas etapas exploradas na demonstração da Afirmação 3.2.10 garantimos que $\nu_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e consequentemente concluímos (3.51). Portanto, usando (3.52) e (3.51) como na demonstração do Lema 3.2.13, podemos concluir

$$||u_n - u||^2_{\lambda_n} = o_n(1)$$

e consequentemente está mostrado o item (ii).

Para demonstrar (iii), note que

$$||u_n - u||^2 \leq ||u_n - u||^2_{\lambda_n}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x)|u_n|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x)|u_n - u|^2 \, dx \leq C||u_n - u||^2_{\lambda_n}$$

o que implica, pelo item (ii), em

$$||u_n - u||^2 \to 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x)|u_n|^2 \, dx \to 0.$$

Falta mostrar (iv), ou seja, que u é solução do problema (3.41). Escolhendo $v \in \tilde{\mathbb{K}}$, arbitraria, e substituindo em (3.40) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(v - u_n) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_n v - \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda_n V(x))u_n^2 \, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)(v - u_n) \, dx$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ e usando $(i) - (iii)$, concluímos que

$$\int_{\Omega} [\nabla u \nabla(v - u) + u(v - u)] \, dx \geq \int_{\Omega} g(x, u)(v - u) \, dx, \ \forall v \in \tilde{\mathbb{K}}$$

Recordando a definição da função g, segue

$$\int_{\Omega} [\nabla u \nabla(v - u) + u(v - u)] \, dx \geq \int_{\Omega} (\mu|u|^{q-2} + |u|^{2^*-2})u(v - u) \, dx, \ \forall v \in \tilde{\mathbb{K}}.$$

Portanto, a proposição está provada.

$\blacksquare$

Demonstração do Teorema 3.1.1 Nesta demonstração, usamos o método de Iteração de Moser [51] baseado no trabalho de Gongbao [32] e adaptamos argumentos contidos em Alves [1] e Figueiredo [26].

Sabemos que cada u_n verifica (3.40). Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para $L \geq 1$, definimos

$$u_{n,L}(x) = \begin{cases} u_n, \text{ se } \ u_n \leq L \\ \\ L, \text{ se } \ u_n \geq L \end{cases}$$

Considere $d = \text{distância}(\overline{\Omega}, \partial\Omega')$ e seja $0 < R < d$. Dado $x_0 \in \overline{\Omega'}^c$, fixamos uma sequência $(r_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $R < r_j < d$, $\forall \in \mathbb{N}$ e $r_j \downarrow R$.

Considere também,

$$v_{n,L}(x) = v_{n,L,j}(x) = \Big(u_n - u_n\eta^2\Big(\frac{u_{n,L}}{L}\Big)^{2(\beta-1)}\Big)(x),$$

onde, $\eta = \eta_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ verificando $0 \leq \eta \leq 1$, $|\nabla\eta| \leq \dfrac{1}{r_j}$ e

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } \ x \in B_{r_{j+1}}(x_0) \\ \\ 0, \text{ se } \ x \in B^c_{r_j}(x_0) \end{cases}$$

e o número $\beta > 1$ a ser fixado.

Afirmação 3.2.17 *A função $v_{n,L} \geq \varphi$ em $\mathbb{R}^N$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

De fato, no conjunto $B^c_{r_j}(x_0)$ temos $\eta = \eta_j = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ então

$$v_{n,L} = u_n \geq \varphi.$$

Recordemos que em Θ^c temos $\varphi \leq 0$. Como $B^c_{r_j}(x_0) \subset \Theta^c$, para todo $j \in \mathbb{N}$ segue que $\varphi \leq 0$ em $B^c_{r_j}(x_0)$.

Observe que

$$-u_n\eta^2\Big(\frac{u_{n,L}}{L}\Big)^{2(\beta-1)} \geq -u_n\Big(\frac{u_{n,L}}{L}\Big)^{2(\beta-1)},$$

pois $u_{n,L}, u_{n,L}^{\beta-1} > 0$ e $-\eta^2 \geq -1$, assim

$$v_{n,L} = u_n - u_n\eta^2\Big(\frac{u_{n,L}}{L}\Big)^{2(\beta-1)} \geq u_n\Big[1 - \Big(\frac{u_{n,L}}{L}\Big)^{2(\beta-1)}\Big] \geq 0,$$

donde segue que $v_{n,L} \geq 0 \geq \varphi$ em $B^c_{r_j}(x_0)$. Portanto, $v_{n,L} \in \mathbb{K}$.

Pela Afirmação 3.2.17, segue que $v_{n,L} \in \mathbb{K}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Substituindo a função $v_{n,L}$ como função teste obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{L^{2(\beta-1)}}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)})\, dx\Big) &+ \frac{1}{L^{2(\beta-1)}}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda_n V(x)) u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx\Big)\\ &\leq \frac{1}{L^{2(\beta-1)}}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n) u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx\Big)\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)})\, dx &\leq -\int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda_n V(x)) u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n) u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx.\end{aligned} \tag{3.54}$$

Sabemos que $\lambda_n V(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)})\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n) u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx. \tag{3.55}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla (u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)})\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx\\ &+2(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u_{n,L} u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)-1}\, dx.\end{aligned} \tag{3.56}$$

Note também que

$$2(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_{n,L} u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)-1}\, dx = 2(\beta-1)\int_{u_n \leq L} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx \geq 0. \tag{3.57}$$

Substituindo (3.56) em (3.55) e usando a igualdade (3.57)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n) u_n \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx\\ &- \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx\end{aligned} \tag{3.58}$$

Da condição de crescimento da função g dada em (g_3) a última desigualdade fica

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx &\leq C_\beta \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx\\ &+ (\mu\beta - 1)\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx\end{aligned} \tag{3.59}$$

Fixando $0 < \beta < 1/\mu$ temos $\mu\beta - 1 < 0$ e consequentemente a última expressão fica

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx + 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx \leq C\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx, \tag{3.60}$$

onde C constante positiva a qual mudaremos sempre que necessário. Recordando a definição da função η temos

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx + 2\int_{B_{r_j}(x_0)} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx \leq C\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*} \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx, \tag{3.61}$$

Agora definimos a função

$$U_{n,L} = u_n \eta u_{n,L}^{\beta-1},$$

onde a função η é a mesma que foi definida anteriormente. Desde que

$$\begin{aligned} \nabla U_{n,L} &= \nabla(\eta u_n u_{n,L}^{\beta-1}) \\ &= \nabla \eta u_n u_{n,L}^{\beta-1} + \nabla u_n \eta u_{n,L}^{\beta-1} + (\beta-1)\eta u_n u_{n,L}^{\beta-2} \nabla u_{n,L} \end{aligned} \tag{3.62}$$

tem-se

$$\begin{aligned} |\nabla U_{n,L}|^2 &= |\nabla \eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}) + \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)})|\nabla u_n|^2 \\ &+ (\beta-1)^2 \eta^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-2)} |\nabla u_{n,L}|^2 \\ &+ 2(\beta-1)\eta u_n^2 u_{n,L}^{2\beta-3} \nabla u_{n,L} \nabla \eta \\ &+ 2(\beta-1)\eta^2 u_n u_{n,L}^{2\beta-3} \nabla u_{n,L} \nabla u_n \\ &+ 2\eta u_n u_{n,L}^{2(\beta-1)} \nabla u_n \nabla \eta. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Percebemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla U_{n,L}|^2 \leq & \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla \eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx + 3\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx \\ & +6\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Substituindo (3.61) em (3.64) obtemos

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla U_{n,L}|^2 \leq C\beta^2 \Big(\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla \eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx + \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*} \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx \Big). \tag{3.65}$$

Pela desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Niremberg, ver [33], tem-se

$$|U_{n,L}|^2_{L^{2^*}(B_{r_j}(x_0))} \leq C \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla U_{n,L}|^2\, dx.$$

Assim, por (3.65) segue que

$$|U_{n,L}|^2_{L^{2^*}(B_{r_j}(x_0))} \leq C\beta^2 \Big(\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla \eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx + \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*} \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx \Big),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\Big(\int_{B_{r_j}(x_0)} (u_n \eta u_{n,L}^{(\beta-1)})^{2^*}\,dx\Big)^{\frac{2}{2^*}} &\leq C\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla\eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\,dx \\ &+ C\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*}\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\,dx.\end{aligned} \tag{3.66}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder para expoentes $2^*/2$ e $2^*/(2^*-2)$, obtemos

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*}\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\,dx \leq \Big(\int_{B_{r_j}(x_0)} (u_n \eta u_{n,L}^{(\beta-1)})^{2^*}\,dx\Big)^{\frac{2}{2^*}} \Big(\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*}\,dx\Big)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \tag{3.67}$$

Seja $\epsilon > 0$ tal que $1 - \epsilon^{\frac{2^*-2}{2^*}} C\beta^2 > 0$. Como sabemos

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n|_{L^{2^*}(\Omega^c)} = 0,$$

pela Proposição 3.2.15, então para cada $j \in \mathbb{N}$ existe K_j tal que

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*}\,dx < \epsilon, \quad \forall n \geq K_j.$$

Sendo $r_{j+1} < r_j$, sem perda de generalidade $K_j = K_1$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Substituindo (3.67) em (3.66), usando a última desigualdade e fazendo uma reindexação na variável n se necessário temos

$$\Big(\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*}\eta^{2^*} u_{n,L}^{2^*(\beta-1)}\,dx\Big)^{\frac{2}{2^*}} \leq C\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla\eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\,dx.$$

Tomando $\beta = \frac{2^*}{2}$ e usando o fato que $|\nabla\eta| < \frac{1}{R}$ da última desigualdade obtemos

$$\Big(\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*}\eta^{2^*} u_{n,L}^{2^*(\frac{2^*}{2}-1)}\,dx\Big)^{\frac{2}{2^*}} \leq C\int_{\mathbb{R}} u_n^{2^*}\,dx, \quad \forall j, n \in \mathbb{N}$$

Sabendo que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e usando as imersões contínuas de Sobolev segue da última desigualdade que

$$\Big(\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2^*}\eta^{2^*} u_{n,L}^{2^*(\frac{2^*}{2}-1)}\,dx\Big)^{\frac{2}{2^*}} \leq C < +\infty, \quad \forall j, n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Lema de Fatou na variável L segue

$$\Big(\int_{B_{r_j}(x_0)} \eta^{2^*} u_n^{\frac{2^{*2}}{2}}\,dx\Big)^{\frac{2}{2^*}} \leq C < +\infty, \quad \forall j, n \in \mathbb{N}. \tag{3.68}$$

Afirmação 3.2.18 *Vale a seguinte fórmula*

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+1}s}(B_{r_{k+1}}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^k}+\cdots+\frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{k}{\chi^k}+\cdots+\frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad k = 1, 2, ... \tag{3.69}$$

onde C independe de n e

$$\chi = \frac{2^*(t-1)}{2t}, \quad s = \frac{2t}{t-1}, \quad t = \frac{2^{*^2}}{2(2^*-2)}.$$

De fato, utilizando (3.66) com $\beta = \chi$ e $j = 1$ temos

$$u_n \in L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_1}(x_0))$$

e

$$\Big(\int_{B_{r_1}(x_0)} (u_n \eta u_{n,L}^{(\beta-1)})^{2^*}\, dx\Big)^{\frac{2}{2^*}} \leq C\beta^2\Big(\int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{2\beta}\, dx + \int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{2^*-2}\eta^{2(\frac{2^*-2}{2^*})} u_n^{2\beta}\, dx\Big). \tag{3.70}$$

Agora utilizando Hölder na segunda parcela do segundo membro da desigualdade acima com expoentes t e $\frac{t}{t-1}$ segue

$$\int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{2^*-2}\eta^{2\frac{2^*-2}{2^*}} u_n^{2\beta}\, dx \leq \Big(\int_{B_{r_1}(x_0)} \eta^{2t(\frac{2^*-2}{2^*})} u_n^{(2^*-2)t}\, dx\Big)^{\frac{1}{t}} \Big(\int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{\frac{2\beta t}{t-1}}\, dx\Big)^{\frac{t-1}{t}}.$$

Por (3.68) segue que

$$\int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{2^*-2}\eta^{2\frac{2^*-2}{2^*}} u_n^{2\beta}\, dx \leq C\Big(\int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{\frac{2\beta t}{t-1}}\, dx\Big)^{\frac{t-1}{t}}.$$

Da mesma forma usando Hölder na primeira parcela temos

$$\int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{2\beta}\, dx \leq \Big(\int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{\frac{2\beta t}{t-1}}\, dx\Big)^{\frac{t-1}{t}} |B_{r_1}(x_0)|^{\frac{1}{t}}$$

Assim, a desigualdade (3.70) fica

$$\Big(\int_{B_{r_1}(x_0)} (u_n \eta u_{n,L}^{(\beta-1)})^{2^*}\, dx\Big)^{\frac{2}{2^*}} \leq C\beta^2\Big(\int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{\frac{2\beta t}{t-1}}\, dx\Big)^{\frac{t-1}{t}}, \quad \forall n, j \in \mathbb{N}.$$

Note que

$$|u_{n,L}|^{2\beta}_{L^{2^*\beta}(B_{r_2}(x_0))} \leq \Big(\int_{B_{r_1}(x_0)} (u_n \eta u_{n,L}^{(\beta-1)})^{2^*}\, dx\Big)^{\frac{2}{2^*}}$$

e

$$\Big(\int_{B_{r_1}(x_0)} (u_n \eta u_{n,L}^{(\beta-1)})^{2^*}\, dx\Big)^{\frac{2}{2^*}} \leq C\beta^2\Big(\int_{B_{r_1}(x_0)} u_n^{\frac{2\beta t}{t-1}}\, dx\Big)^{\frac{t-1}{t}} = C\beta^2 |u_n|^{2\beta}_{L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_1}(x_0))}.$$

Consequentemente,

$$|u_{n,L}|^{2\beta}_{L^{2^*\beta}(B_{r_2}(x_0))} \leq C\beta^2 |u_n|^{2\beta}_{L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Utilizando o Lema de Fatou na variável L na última desigualdade segue

$$|u_n|^{2\beta}_{L^{2^*\beta}(B_{r_2}(x_0))} \leq C\beta^2 |u_n|^{2\beta}_{L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\beta = \chi$ e $2^* = \chi s$ então

$$|u_n|^{2\beta}_{L^{\chi^2 s}(B_{r_2}(x_0))} \leq C\beta^2 |u_n|^{2\beta}_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

isto implica

$$|u_n|_{L^{\chi^2 s}(B_{r_2}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.71}$$

isso mostra que a fórmula (3.69) é válida para $k = 1$.

Agora mostraremos que a mesma é válida para $k = 2$. Em (3.66) consideremos $\beta = \chi^2$ e $j = 2$ temos

$$u_n \in L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_2}(x_0)).$$

Repetindo os cálculos anteriores obtemos

$$|u_n|^{2\beta}_{L^{2^*\beta}(B_{r_3}(x_0))} \leq C\beta^2 |u_n|^{2\beta}_{L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_2}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sendo $\beta = \chi^2$ e $2^* = \chi s$ segue

$$|u_n|^{2\beta}_{L^{\chi^3 s}(B_{r_3}(x_0))} \leq C(\chi^2)^2 |u_n|^{2\beta}_{L^{\chi^2 s}(B_{r_2}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

implicando

$$|u_n|_{L^{\chi^3 s}(B_{r_3}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^2}} \chi^{\frac{2}{\chi^2}} |u_n|_{L^{\chi^2 s}(B_{r_2}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Utilizando (3.71) a última desigualdade fica

$$|u_n|_{L^{\chi^3 s}(B_{r_3}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{2}{\chi^2}+\frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.72}$$

mostrando a validade da fórmula (3.69) para $k = 2$.

Suponhamos que a fórmula (3.69) seja verdadeira para algum $k \geq 1$. Mais uma vez usando (3.66) com $\beta = \chi^{k+1}$ e $j = k+1$, temos

$$u_n \in L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_{k+1}}(x_0)).$$

Repetindo o mesmo procedimentos de cálculos anteriormente, obtemos

$$|u_n|^{2\beta}_{L^{2^*\beta}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C\beta^2 |u_n|^{2\beta}_{L^{\frac{2\beta t}{t-1}}(B_{r_{k+1}}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\beta = \chi^{k+1}$ e $2^* = \chi s$ então

$$|u_n|^{2\beta}_{L^{\chi^{k+2} s}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C(\chi^{k+1})^2 |u_n|^{2\beta}_{L^{\chi^{k+1} s}(B_{r_{k+1}}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

implicando

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2}s}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^{k+1}}} \chi^{\frac{k+1}{\chi^{k+1}}} |u_n|_{L^{\chi^{k+1}s}(B_{r_{k+1}}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pela hipótese de indução segue que

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2}s}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{k+1}{\chi^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

portanto, a fórmula (3.69) é válida.

Observe as séries que aparecem na fórmula (3.69)

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\chi^i} = \frac{1}{\chi - 1}$$

e

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{\chi^i} = \frac{\chi^2}{(\chi-1)^2}$$

são ambas convergentes, assim, existe $C > 0$ independente de n tal que

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+1}s}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C |u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

Pela definição da sequência (r_j) deduzimos

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+1}s}(B_R(x_0))} \leq |u_n|_{L^{\chi^{k+1}s}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C |u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $u_n \in L^p(B_R(x_0))$, para todo $p \geq \chi^k s$ por interpolação. Nesse momento, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.2.19 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^N$ um aberto qualquer, $p \geq 1$ e $u \in L^s(A)$, $\forall s \in [p, +\infty)$. Se existe $C > 0$ tal que*

$$|u|_s \leq C, \quad \forall s \in [p, +\infty),$$

então $u \in L^\infty(A)$ e

$$|u|_\infty \leq C.$$

Demonstração. Iniciamos fixando $\delta > 0$ arbitrário e consideramos o conjunto

$$\Sigma = \{x \in A; |u(x)| \geq C + \delta\}.$$

Nosso objetivo é provar que

$$|\Sigma| = 0.$$

Primeiramente, note que $|\Sigma| < \infty$. De fato,

$$(C+\delta)^s|\Sigma| \leq \int_\Sigma |u|^s\,dx \leq |u|_s^s \leq C^s < +\infty.$$

Deduzimos da expressão acima

$$(C+\delta)|\Sigma|^{\frac{1}{s}} \leq C.$$

Se $|\Sigma| > 0$, passando ao limite quando $s \to +\infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$C+\delta = \lim_{s\to+\infty}(C+\delta)|\Sigma|^{\frac{1}{s}} \leq C,$$

ou seja,

$$C+\delta \leq C,$$

o que um absurdo. Logo,

$$|\Sigma| = 0.$$

■

Utilizando o Lema 3.2.19 concluímos que $u_n \in L^\infty(B_R(x_0))$ e

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(x_0))} \leq C|u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.73}$$

onde C independe de n. Temos também,

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(x_0))} \leq C|u_n|_{L^{2^*}(B_{r_1}(x_0))} \leq C|u_n|_{L^{2^*}(\Omega^c)}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pois $B_{r_1}(x_0) \subset \Omega^c$. Agora, usamos fato que

$$u_n = u_{n,\lambda_n} \to 0 \text{ em } H^1(\Omega^c) \text{ quando } \lambda_n \to +\infty$$

e a imersão contínua de Sobolev dado $\kappa > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(x_0))} < \kappa, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Como tomamos $x_0 \in \Omega'^c$ arbitrário então

$$|u_n|_{L^\infty(\Omega'^c)} < \kappa.$$

Portanto, do estudo feito até aqui podemos concluir que existe $\lambda^* > 0$ de maneira que a solução u_λ verifica

$$u_\lambda(x) \leq a, \, \forall x \in \Omega^c \text{ e } \lambda \geq \lambda^*.$$

Temos, por (3.38)

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla(v-u)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda V(x))u(v-u)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)(v-u)\,dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}.$$

Então para $\lambda \geq \lambda^*$ e pela Observação 3.2.1 segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla(v-u)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1+\lambda V(x))u(v-u)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (\mu u^{q-1} + u^{2^*-1})(v-u)\,dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \tag{3.74}$$

A proposição a seguir completa a demonstração do Teorema 3.1.1.

Proposição 3.2.20 *Seja $\lambda_n \to +\infty$ e (u_n) uma solução de (3.74). Então, existe uma subsequência (u_n) e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso,

(i) $u \equiv 0$ *em* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

(ii) $||u_n - u||^2_{\lambda_n} \to 0$.

(iii) Quando $\lambda_n \to \infty$ temos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned}
&u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N),\\
&\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|u_n|^2\,dx \to 0,\\
&||u_n||^2_{\lambda_n} \to \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\,dx = ||u||^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

(iv) Temos que u é uma solução da Desigualdade Variacional

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(v-u)\,dx + \int_\Omega u(v-u)\,dx \geq \int_\Omega (\mu|u|^{q-2} + |u|^{2^*-2})u(v-u)\,dx, \tag{3.75}$$

para todo $v \in \tilde{\mathbb{K}}$, onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H^1_0(\Omega);\ v \geq \varphi \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

A demonstração segue os mesmos passos dados na demonstração da Proposição 3.2.15, por este motivo omitimos.

3.3 Demonstração do Teorema 3.1.1 para o caso $N = 2$

Seguiremos a mesma metodologia abordada na subseção 3.1.1. Neste sentido, tomamos $k' = \max\{\theta/(\theta-2), 2\}$ e $a' > 0$ verificando $f(a') = a'/k'$.

Definimos as seguintes funções

$$\widetilde{h}(t) = \begin{cases} f(t), & t \leq a \\ \dfrac{t}{k}, & t \geq a \end{cases}$$

e

$$\widetilde{H}(t) = \int_0^t h(s)ds.$$

Seja Ω' um aberto conexo limitado com fronteira suave contendo $\overline{\Omega}$. Definimos as seguintes funções $\widetilde{g} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\widetilde{G} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\widetilde{g}(x,t) = \chi_{\Omega'}(x)\tilde{f}(t) + (1 - \chi_{\Omega'}(x))h(t)$$

e

$$\widetilde{G}(x,t) = \chi_{\Omega'}(x)\tilde{F}(t) + (1 - \chi_{\Omega'}(x))H(t),$$

onde

$$\tilde{F}(t) = \int_0^t \tilde{f}(s)ds.$$

O objetivo, agora, é estabelecer a existência de solução para a seguinte desigualdade variacional modificado: encontrar $u \in \mathbb{K}$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla(v-u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} (1+\lambda V(x))u(v-u)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{g}(x,u)(v-u)\, dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}. \tag{3.76}$$

O problema (3.76) está intimamente relacionado com (3.1), pois se u_λ é uma solução de (3.76) verificando

$$u(x) \leq a, \ \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'$$

então u é uma solução da desigualdade variacional original (3.1), como vimos na Observação 3.2.1.

Aqui relacionamos algumas propriedades da função $\widetilde{g}$. Sendo $a' > 0$, então segue

($\widetilde{g}_1$) $\widetilde{g}(x,t) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e $t \leq 0$;

$(\widetilde{g}_2)$ $\dfrac{\widetilde{g}(x,t)}{t} \to 0$ quando $t \to 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$;

$(\widetilde{g}_3)$ Fixados $\kappa > 0$, $l \geq 0$ e $\alpha \geq \alpha_0$ existe $C_\kappa > 0$ tal que

$$|\widetilde{g}(x,t)| \leq \kappa|t| + C_\kappa |t|^l \Big(e^{\alpha|t|^2 - 1}\Big), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

$(\widetilde{g}_4)$ Para todo $x \in \Omega'$ e $t > 0$ tem-se

$$0 < \theta \widetilde{G}(x,t) \leq \widetilde{g}(x,t)t;$$

$(\widetilde{g}_5)$ Para todo $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'$ e $t > 0$ tem-se

$$0 < 2\widetilde{G}(x,t) \leq \widetilde{g}(x,t)t \leq \frac{1}{k}(1 + \lambda V(x))t^2.$$

Mais uma vez, utilizaremos o método de penalização, ou seja, procuramos soluções para a seguinte classe de problemas elípticos

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u - \frac{1}{\epsilon}(\varphi - u)^+ \chi_\Omega = \widetilde{g}(x,u), \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \tag{3.77}$$

As soluções fracas do problema (3.77) são pontos críticos do funcional $I_{\lambda,\epsilon} : E_\lambda \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) = \frac{1}{2}||u||_\lambda^2 + \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega [(\varphi - u)^+]^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{G}(x,u)\, dx$$

o qual está bem definido e é de classe C^1 sobre o espaço E_λ (o mesmo do Capítulo 2) com

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u)v = \langle u, v\rangle_\lambda - \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u)^+ v\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{g}(x,u)v\, dx,$$

$\forall u, v \in E_\lambda$, ou equivalente,

$$I'_{\lambda,\epsilon}(u)v = \int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u \nabla v + (1 + \lambda V(x))uv]\, dx - \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\varphi - u)^+ v\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{g}(x,u)v\, dx$$

$\forall u, v \in E_\lambda$.

Nesse momento, enunciaremos alguns lemas os quais omitiremos suas demonstrações. Isto deve-se ao fato que as mesmas seguem com argumentos explorados em demonstrações anteriores apresentadas aqui.

Lema 3.3.1 *O funcional $I_{\lambda,\epsilon}$ verifica a geometria do passo da montanha.*

Lema 3.3.2 *Se (u_n) é uma sequência $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$, então (u_n) é limitada.*

Observação 3.3.3 *Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência (u_n) dada pelo Lema 3.3.2 pode ser considerada como uma sequência de funções não negativas e que cumpre*

$$\limsup_{n\to\infty} ||u_n||_\lambda^2 \leq \Big(\frac{2\theta}{\theta-2}\Big)c_{\lambda,\epsilon}.$$

Lema 3.3.4 *Se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$, então dado $\delta > 0$ existe $R > 0$ tal que*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2)\,dx\right) < \delta$$

Lema 3.3.5 *Seja $c_{\lambda,\epsilon}$ o nível do passo da montanha para $I_{\lambda,\epsilon}$. Então existe uma constante $A > 0$, independente de ν, de maneira que*

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < A/\nu^{\frac{2}{p-1}}.$$

O próximo lema que enunciaremos a seguir é uma consequência da Desigualdade de Trundinger-Moser devida a Cao (2.52).

Lema 3.3.6 *Seja (u_n) uma família em $H^1(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{||u_n||^2\} \leq m < 4\pi$. Para cada $\alpha > \alpha_0$ e $q > 1$ verificando $qm\alpha < 4\pi$, existe uma constante $C = C(q,m,\alpha) > 0$ tal que $b_\alpha(u_n) = (e^{\alpha u_n^2} - 1)$ pertence a $L^q(\mathbb{R}^2)$ e*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|b_\alpha(u_n)|_q\} < \infty.$$

Demonstração. Sabemos que $||u_n|| \leq m$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Escolhendo $\alpha > \alpha_0$ e $q > 1$ verificando $qm\alpha < 4\pi$ é possível encontrar $q' > q$ e suficientemente próximo de q tal que $q'm\alpha < 4\pi$ e, desta forma, pela a desigualdade (2.51) garantimos

$$\begin{aligned}
|b_\alpha(u_n)|_q^q = \int_{\mathbb{R}^2} |b_\alpha(u_n)|^q\,dx &= \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha|u_n|^2} - 1)^q\,dx \\
&\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^2} (e^{q'\alpha|u_n|^2} - 1)\,dx \\
&= C_2 \int_{\mathbb{R}^2} (e^{q'\alpha||u_n||_\lambda\left(\frac{|u_n|}{||u_n||_\lambda}\right)^2} - 1)\,dx \\
&\leq C_3 \int_{\mathbb{R}^2} (e^{q'\alpha m\left(\frac{|u_n|}{||u_n||_\lambda}\right)^2} - 1)\,dx.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade (2.52) de Trudinger-Moser devido a Cao [17] existe $C = C(q, m, \alpha) > 0$ tal que

$$|b_\alpha(u_n)|_q^q = \int_{\mathbb{R}^2} |b_\alpha(u_n)|^q \, dx \leq C$$

donde segue a demonstração.

$\blacksquare$

Proposição 3.3.7 *Para $\lambda \geq 1$, toda (u_n) sequência $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$ com*

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < \frac{2(\theta - 2)\pi}{\theta \alpha_0}$$

admite uma subsequência convergente.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$ para o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$ verificando a hipótese da proposição acima. Sabemos que (u_n) é uma sequência limitada, logo, existe $u \in E_\lambda$ e a menos de subsequência tem-se

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } E_\lambda,$$

$$u_n(x) \to u \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2$$

e

$$u_n \to u \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^2), \forall s \geq 2.$$

Observe que

$$||u_n - u||_\lambda^2 = \langle u_n - u, u_n - u \rangle_\lambda = ||u_n||_\lambda^2 - \langle u_n, u \rangle_\lambda + o_n(1).$$

Sabemos que

$$||u_n||_\lambda^2 = I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u_n + \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega (\varphi - u_n)^+ u_n \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u_n \, dx$$

e

$$-\langle u_n, u \rangle_\lambda = -I'_{\lambda,\epsilon}(u_n)u - \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega (\varphi - u_n)^+ u \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u \, dx.$$

Repetindo os argumentos explorados na justificativa da afirmação (2.3.5) garantimos

$$\int_\Omega (\varphi - u_n)^+ u_n \, dx - \int_\Omega (\varphi - u_n)^+ u \, dx = o_n(1).$$

Assim, reescrevemos

$$||u_n - u||_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_n) u_n \, dx - \int_{\mathbb{R}^2} g(x, u_n) u \, dx + o_n(1).$$

Afirmação 3.3.8 *Vale os seguintes limites:*

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{g}(x,u_n)u_n\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{g}(x,u)u\,dx;$$

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{g}(x,u_n)v\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{g}(x,u)v\,dx,\quad \forall v\in E_\lambda.$$

Vamos iniciar justificando por (i). Temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{g}(x,u_n)u_n\,dx-\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{g}(x,u)u\,dx\right|\le\int_{\mathbb{R}^2}|g(x,u_n)u_n-g(x,u)u|\,dx.$$

Dado $\delta>0$, considere $R>0$ como no Lema 3.3.4 e

$$I_{n,1}=\int_{B_R(0)}|\widetilde{g}(x,u_n)u_n-\widetilde{g}(x,u)u|\,dx\quad\text{e}\quad I_{n,2}=\int_{B_R^c(0)}|\widetilde{g}(x,u_n)u_n-\widetilde{g}(x,u)u|\,dx.$$

De $(\widetilde{g}_5)$ tem-se

$$|\widetilde{g}(x,u_n)|\le|u_n|^2+C|u_n|b_\alpha(u_n),\quad\forall x\in\mathbb{R}^2\ \text{ e }\ n\in\mathbb{N}.$$

Nosso objetivo inicialmente é mostrar que $I_{n,1}\to 0$. Para isso, definimos definimos as seguintes funções

$$w_n:=|u_n|^2+C|u_n|b_\alpha(u_n)\quad\text{e}\quad w:=|u|^2+C|u|b_\alpha(u_n)$$

Como

$$u_n(x)\to u\text{ q.t.p. em }\mathbb{R}^2;$$

então

$$\widetilde{g}(x,u_n)\to\widetilde{g}(x,u)\text{ q.t.p. em }B_R(0)$$

e

$$w_n(x)\to w(x)\text{ q.t.p. em }B_R(0).$$

Podemos observar que para concluir nosso objetivo falta mostrar

$$w_n\to w\text{ em }L^1(B_R(0)).$$

Sabemos

$$\limsup_{n\to\infty}||u_n||_\lambda^2<\frac{4\pi}{\alpha_0},$$

então fixemos $0<m<4\pi/\alpha_0$ de tal maneira que

$$||u_n||_\lambda^2\le m.$$

De acordo com a escolha de m temos $m\alpha_0 < 4\pi$. Logo, para $\alpha > \alpha_0$ e $q > 1$ suficientemente próximo de α_0 e q próximo de 1, respectivamente, devemos ter $qm\alpha < 4\pi$. Pelo Lema 3.3.6 existe $C > 0$ tal que $b_\alpha(u_n) = (e^{\alpha u_n^2} - 1)$ pertence a $L^q(\mathbb{R}^2)$ e

$$|b_\alpha(u_n)|_q \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, concluímos que a sequência $(b_\alpha(u_n))$ é limitada em $L^q(B_R(0))$. Pelo Lema de Brézis & Lieb temos

$$b_\alpha(u_n) \rightharpoonup b_\alpha(u) \text{ em } L^q(B_R(0)).$$

Como

$$u_n \to u_n \text{ em } L^{q'}(B_R(0)), \quad \text{onde } \ 1/q + 1/q' = 1$$

então

$$u_n b_\alpha(u_n) \to u b_\alpha(u) \text{ em } L^1(B_R(0)).$$

Consequentemente, garantimos

$$w_n \to w \text{ em } L^1(B_R(0)).$$

Portanto, Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} I_{n,1} = 0. \tag{3.78}$$

Por outro lado, sendo $\Omega' \subset B_R(0)$, deduzimos

$$|\widetilde{g}(x,t)t| \leq \frac{1}{k}|t|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_{n,2} &\leq \frac{1}{k}\int_{B_R^c(0)} |u_n|^2\,dx + \frac{1}{k}\int_{B_R^c(0)} |u|^2\,dx \\ &\leq \frac{1}{k}\int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2)\,dx + \frac{1}{k}\int_{B_R^c(0)} |u|^2\,dx. \end{aligned}$$

Como $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, então para R suficientemente grande, garantimos

$$\int_{B_R^c(0)} |u|^2\,dx < \frac{\delta}{2k}.$$

Pelo Lema 3.3.4, tomando o limite superior quando $n \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{B_R^c(0)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2)\,dx\right) < \frac{\delta}{2k}.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} I_{n,2} < \delta, \quad \forall \delta > 0.$$

isto implica

$$\lim_{n\to\infty} I_{n,2} = 0. \tag{3.79}$$

De (3.78) e (3.79),

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{g}(x, u_n)u_n \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{g}(x, u)u \, dx.$$

A justificativa de (ii) segue os mesmos passos anteriores.

$\blacksquare$

Agora vamos mostrar que o problema penalizado (3.77) possui solução não trivial. Seja $c_{\lambda,\epsilon}$ o nível do passo da montanha. Pelo Lema 3.3.5 existe $\nu_* > 0$ tal que

$$0 < c_{\lambda,\epsilon} < \frac{(\theta - 2)4\pi}{2\theta\alpha_0}, \quad \text{para} \quad \nu \geq \nu_*, \quad \forall \lambda > 0 \;\; \text{e} \;\; \forall \epsilon > 0.$$

Pela Proposição 3.3.7 o funcional $I_{\lambda,\epsilon}$ verifica a condição $(PS)_{c_{\lambda,\epsilon}}$. Usando o Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti & Rabinowitz [8], podemos concluir que existe $u \in E_\lambda$ tal que

$$I_{\lambda,\epsilon}(u) = c_{\lambda,\epsilon} > 0 \;\; \text{e} \;\; I'_{\lambda,\epsilon}(u) = 0$$

3.3.1 Existência de solução para a desigualdade variacional modificada

Do estudo feito na seção anterior, obtemos uma solução $u_\epsilon \in E_\lambda$ não trivial do problema (3.77), ou seja, u_ϵ verifica

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u_\epsilon \nabla v + (1 + \lambda V(x))u_\epsilon v] \, dx + \frac{1}{\epsilon}\langle P(u_\epsilon), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{g}(x, u_\epsilon)v \, dx, \quad \forall v \in E_\lambda.$$

Como sempre, faremos as identificações:

$$\epsilon = 1/n, \quad u_n = u_{1/n} \quad I_{\lambda,\epsilon} = I_n, \quad I_n(u_n) = c_n,$$

onde $c_n = c_{\lambda,\epsilon}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que existe $u_n \in E_\lambda$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u_n \nabla v + (1 + \lambda V(x))u_n v] \, dx + n\langle P(u_n), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{g}(x, u_n)v \, dx, \quad \forall v \in E_\lambda. \tag{3.80}$$

De forma análoga que foi feito anteriormente, podemos supor que a sequência (u_n) de soluções verifica

$$\limsup_{n\to\infty} ||u_n||_\lambda < \frac{4\pi}{\alpha_0}$$

de onde segue que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Assim, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u \;\text{ em }\; H^1(\mathbb{R}^2),$$

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2$$

e

$$u_n \to u \text{ em } L^s_{Loc}(\mathbb{R}^2),\; s \geq 2.$$

Repetindo os argumentos explorados no Lema 2.3.10 é possível mostrar que $P(u) = 0$, ou seja, $u \in \mathbb{K}$. Com isso, garantimos u é não nula.

Lema 3.3.9 *A seguinte convergência é válida*

$$u_n \to u \quad \textit{em} \quad E_\lambda.$$

Demonstração. Inicialmente, percebemos que

$$||u_n - u||^2_\lambda = \langle u_n - u, u_n - u\rangle_\lambda = ||u_n||^2_\lambda - \langle u_n, u\rangle_\lambda + o_n(1), \tag{3.81}$$

ou ainda,

$$||u_n - u||^2_\lambda = n\langle P(u_n), u - u_n\rangle + \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{g}(x, u_n)u_n\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{g}(x, u_n)u\, dx + o_n(1), \tag{3.82}$$

pois

$$||u_n||^2_\lambda = I'_n(u_n)u_n - n\langle P(u_n), u_n\rangle + \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{g}(x, u_n)u_n\, dx \tag{3.83}$$

e

$$-\langle u_n, u\rangle_\lambda = -I'_n(u_n)u + n\langle P(u_n), u\rangle - \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{g}(x, u_n)u\, dx. \tag{3.84}$$

Observe que

$$\langle P(u_n), u - u_n\rangle = \langle P(u_n) - P(u), u - u_n\rangle \leq 0.$$

Da observação acima e da expressão (3.82) obtemos

$$||u_n - u||^2_\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{g}(x, u_n)u_n\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{g}(x, u_n)u\, dx + o_n(1). \tag{3.85}$$

Mais uma vez, precisamos seguintes limites:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{g}(x,u_n)u_n\,dx=\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{g}(x,u)u\,dx \tag{3.86}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{g}(x,u_n)v\,dx=\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{g}(x,u)v\,dx,\quad \forall v\in H^1(\mathbb{R}^2) \tag{3.87}$$

para finalizarmos a demonstração. Observando as ideias explorada na demonstração da Proposição 3.3.7, percebemos que as mesmas podem ser aplicadas na justificativa dos limites acima, com pequenos ajustes. A sequência (u_n) verifica o mesmo resultado do Lema 3.3.4, isto é, dado $\delta>0$ existe $R>0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{B_R^c(0)}(|\nabla u_n|^2+|u_n|^2)\,dx\right)<\delta.$$

Usando a Desigualdade (2.52) de Trudinger-Moser devido a Cao [17], podemos mostrar que $b_\alpha(u_n)=(e^{\alpha u_n^2}-1)$ pertence a $L^q(\mathbb{R}^2)$ e

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|b_\alpha(u_n)|_q\}<\infty$$

este resultado é descrito pelo Lema 3.3.4. Agora, é realizar as mesmas manipulações algébricas descritas na demonstração da Proposição 3.3.7 para justificarmos tais limites.

■

Relembrando as propriedades do operador de penalização obtemos

$$\langle P(u_n),w-u_n\rangle=\langle P(u_n)-P(w),w-u_n\rangle\le 0$$

para todo $w\in\mathbb{K}$. Fixando $v=w-u_n$ e substituindo em (3.80), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u_n\nabla(w-u_n)\,dx+\int_{\mathbb{R}^2}(1+\lambda V(x))u_n(w-u_n)\,dx\ge\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{g}(x,u_n)(w-u_n)\,dx \tag{3.88}$$

Pelo Lema 3.3.9, passando ao limite quando $n\to+\infty$ em (3.88) encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u\nabla(w-u)\,dx+\int_{\mathbb{R}^2}(1+\lambda V(x))u(w-u)\,dx\ge\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{g}(x,u)(w-u)\,dx \tag{3.89}$$

para todo $w\in\mathbb{K}$. Com isso mostramos que o Problema (3.76) tem uma solução não trivial e não negativa.

3.3.2 Demonstração do Teorema 3.1.1

Nesta seção mostraremos que as soluções que encontramos para o Problema (3.76) são também soluções de (3.1), para λ suficientemente grande. Seja $u_n \in E_{\lambda_n}$ e $\lambda_n \to +\infty$. Sabemos que cada $u_n \in \mathbb{K}$ e verifica

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla (v - u_n)\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \lambda_n V(x)) u_n (v - u_n)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{g}(x, u_n)(v - u_n)\, dx \quad (3.90)$$

para todo $v \in \mathbb{K}$.

A próxima proposição refere ao comportamento da sequências (u_n) de soluções da desigualdade (3.90).

Proposição 3.3.10 *Seja (u_n) uma sequência de soluções de (3.90). Então, existe uma subsequência (u_n) e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{em} \ H^1(\mathbb{R}^2).$$

Além disso,

(i) $u \equiv 0$ *em* $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

(ii) $||u_n - u||^2_{\lambda_n} \to 0$.

(iii) Quando $\lambda_n \to \infty$ temos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned}
&u_n \to u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^2),\\
&\lambda_n \int_{\mathbb{R}^2} V(x)\, |u_n|^2\, dx \to 0,\\
&||u_n||^2_{\lambda_n} \to \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, dx = ||u||^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

(iv) Temos que u é uma solução da desigualdade variacional

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u)\, dx + \int_{\Omega} u(v - u)\, dx \geq \int_{\Omega} f(u)(v - u)\, dx, \qquad (3.91)$$

para todo $v \in \tilde{\mathbb{K}}$, onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H^1_0(\Omega);\ v \geq \varphi \ q.t.p. \ \text{em} \ \Omega\}$$

A dificuldade de provar a Proposição 3.3.10 aparece no item (ii), pois precisamos que a sequência (u_n) verifique os resultados dos Lemas 3.3.4 e 3.3.6. No entanto, analisando todo estudo feito neste seção, percebemos que asseguramos estes resultados e com isso garantimos (ii). O item (i) segue mesmos passos dados na demonstração da Proposição 1.3.10 e os itens restantes (iii) e (iv) é uma consequência imediata do item (i) como podemos ver na demonstração da Proposição 3.2.15. Por esta razão, omitimos a demonstração.

Finalização da demonstração do Teorema 3.1.1

Agora mostraremos que existe $\lambda^* > 0$ tal que se $\lambda \geq \lambda^*$ uma solução u_λ do Problema (3.76) satisfaz

$$u(x)_\lambda \leq a, \ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega' \tag{3.92}$$

então, segue que u_λ é uma solução do problema da desigualdade variacional (3.1). Este resultado é fundamental para finalizarmos a demonstração do Teorema 3.1.1. Nesta demonstração, usamos o método de Iteração de Moser [51] baseado no trabalho de Gongbao [32] e adaptamos as idéias contidas em Alves & Souto [9] e ver também Alves & Pereira [7].

Iniciamos, da mesma forma como começamos na demonstração do Teorema 3.1.1 para o caso $N \geq 3$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para $L \geq 1$, definimos

$$u_{n,L}(x) = \begin{cases} u_n, \text{ se } \ u_n \leq L \\ \\ L, \text{ se } \ u_n \geq L \end{cases}$$

Considere $d = \text{distância}(\overline{\Omega}, \partial\Omega')$ e seja $0 < R < d$. Dado $x_0 \in \Omega'^c$, fixamos uma sequência $(r_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $R < r_j < d$, $\forall \in \mathbb{N}$ e $r_j \downarrow R$.

Considere também,

$$v_{n,L}(x) = v_{n,L,j}(x) = \Big(u_n - u_n\eta^2\Big(\frac{u_{n,L}}{L}\Big)^{2(\beta-1)}\Big)(x),$$

e

$$U_{n,L}(x) = U_{n,L,j}(x) = u_n\eta u_{n,L}^{\beta-1}(x)$$

onde, $\eta = \eta_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ verificando $0 \leq \eta_j \leq 1$, $|\nabla\eta_j| \leq \dfrac{1}{r_j}$ e

$$\eta_j(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } \ x \in B_{r_{j+1}}(x_0) \\ \\ 0, \text{ se } \ x \in B^c_{r_j}(x_0) \end{cases}$$

e o número $\beta > 1$ a ser fixado.

Sem dificuldade, é possível mostrar como foi feito na Afirmação 3.2.17 que $v_{n,L} \in \mathbb{K}$ para cada $n \in \mathbb{K}$. Substituindo a função $v_{n,L}$ como função teste em (3.90) deduzimos

$$\frac{1}{L^{2(\beta-1)}}\Big\{\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla(u_n\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}) + \int_{\mathbb{R}^2}(1+\lambda_n V(x))u_n^2\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\Big\} \leq \frac{1}{L^{2(\beta-1)}}\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{g}(x,u_n)u_n\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla(u_n\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}) &\leq -\int_{\mathbb{R}^2}(1+\lambda_n V(x))u_n^2\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{g}(x,u_n)u_n\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}.\end{aligned} \tag{3.93}$$

Desde que $\lambda_n V(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tem se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla(u_n\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}) &\leq -\int_{\mathbb{R}^2} u_n^2\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{g}(x,u_n)u_n\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}.\end{aligned} \tag{3.94}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla(u_n\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}) &= \int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u_n|^2\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} + 2\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u_n\nabla\eta u_n\eta u_{n,L}^{2(\beta-1)} \\ &\quad +2(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u_n\nabla u_{n,L}u_n\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)-1}.\end{aligned} \tag{3.95}$$

Observe que

$$2(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla u_{n,L}u_n\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)-1} = 2(\beta-1)\int_{u_n\leq L}|\nabla u_n|^2\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} \geq 0. \tag{3.96}$$

Substituindo (3.95) e (3.94) e usando a informação da igualdade (3.96) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u_n|^2\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} + 2\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u_n\nabla\eta u_n\eta u_{n,L}^{2(\beta-1)} &\leq -\int_{\mathbb{R}^2} u_n^2\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{g}(x,u_n)u_n\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}.\end{aligned} \tag{3.97}$$

Recordemos que a função $\widetilde{g}$ verifica $(\widetilde{g}_3)$, ou seja, fixado $\alpha \geq \alpha_0$ existe $C > 0$ tal que

$$|\widetilde{g}(x,t)| \leq |t| + C|t|b_\alpha(t), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

Logo, podemos reescrever (3.97) da seguinte forma

$$\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u_n|^2\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} + 2\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u_n\nabla\eta u_n\eta u_{n,L}^{2(\beta-1)} \leq C\int_{\mathbb{R}^2} b_\alpha(u_n)u_n^2\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}, \tag{3.98}$$

onde C mudaremos sempre que necessário. Recordando a função η temos

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx + 2\int_{B_{r_j}(x_0)} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)} \leq C\int_{B_{r_j}(x_0)} b_\alpha(u_n)\eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}. \tag{3.99}$$

Por outro lado, pelas imersões contínuas de Sobolev temos

$$|U_{n,L}|^2_{L^\gamma(B_{r_j}(x_0))} \leq C_\gamma \int_{B_{r_j}(x_0)} \left(|\nabla U_{n,L}|^2 + |U_{n,L}|^2\right) dx \tag{3.100}$$

para qualquer $\gamma \geq 2$. Note que

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla U_{n,L}|^2 \;\leq\; & \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla \eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} + 3\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla u_n|^2 \eta^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)} \\ & +6\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} \nabla u_n \nabla \eta u_n \eta u_{n,L}^{2(\beta-1)}.\end{aligned} \tag{3.101}$$

Substituindo (3.99) em (3.101)

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla U_{n,L}|^2\, dx \leq \int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla \eta|^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx + 3\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} b_\alpha(u_n)\eta^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx.$$

Usando as propriedades de η segue que

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla U_{n,L}|^2\, dx \leq C\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx + 3\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} b_\alpha(u_n)\eta^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx.$$

ou ainda,

$$\int_{B_{r_j}(x_0)} |\nabla U_{n,L}|^2\, dx \leq C\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx + 3\beta^2 \int_{B_{r_j}(x_0)} b_\alpha(u_n)\eta^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx \tag{3.102}$$

Substituindo (3.102) em (3.100) e realizando algumas manipulações algébricas obtemos

$$|U_{n,L}|^2_{L^\gamma(B_{r_j}(x_0))} \leq C\beta^2 \left[\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx + \int_{B_{r_j}(x_0)} b_\alpha(u_n)\eta^2 u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)}\, dx\right] \tag{3.103}$$

Sabemos pelo Lema 3.3.6 que $b_\alpha(u_n) \in L^q(\mathbb{R}^2)$ para algum $q > 1$ e $q \approx 1$. Ademais, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|b_\alpha(u_n)|_q^q \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com essa informação, utilizaremos a desigualdade de Hölder em (3.103) com expoentes q e q' para concluímos que

$$\begin{aligned}|U_{n,L}|_{L^\gamma(B_{r_j}(x_0))} \;\leq\; & C\beta^2 \Big[\int_{B_{r_j}(x_0)} (u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)})^{q'}\, dx\Big]^{1/q'} |B_{r_j}(x_0)|^{1/q} \\ +\; & C\beta^2 \Big[\int_{B_{r_j}(x_0)} (b_\alpha(u_n))^q\, dx\Big]^{1/q} \Big[\int_{B_{r_j}(x_0)} (u_n^2 u_{n,L}^{2(\beta-1)})^{q'}\, dx\Big]^{1/q'}\end{aligned} \tag{3.104}$$

Sendo $r_{j+1} < r_{j+1} < \cdots < r_1$ para todo $\forall j \in \mathbb{N}$ e pela informação sobre $b_\alpha(u_n)$ temos

$$|U_{n,L}|_{L^\gamma(B_{r_j}(x_0))} \leq C\beta^2 \Big[\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2q'} u_{n,L}^{2q'(\beta-1)}\, dx \Big]^{1/q'} \tag{3.105}$$

Consequentemente,

$$\Big(\int_{B_{r_{j+1}}(x_0)} u_{n,L}^{\gamma\beta}\, dx \Big)^{2/\gamma} \leq C\beta^2 \Big[\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2q'} u_{n,L}^{2q'(\beta-1)}\, dx \Big]^{1/q'}, \tag{3.106}$$

ou seja,

$$\Big(\int_{B_{r_{j+1}}(x_0)} u_{n,L}^{\gamma\beta}\, dx \Big)^{2/\gamma} \leq C\beta^2 \Big(\int_{B_{r_j}(x_0)} u_n^{2q'\beta}\, dx \Big)^{1/q'}. \tag{3.107}$$

Logo,

$$|u_{n,L}|^{2\beta}_{L^{\gamma\beta}(B_{r_{j+1}}(x_0))} \leq C\beta^2 |u_n|^{2\beta}_{L^{2q'\beta}(B_{r_j}(x_0))} < \infty \tag{3.108}$$

pois (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Utilizando o Lema de Fatou em (3.108) na variável L deduzimos

$$|u_n|_{L^{\gamma\beta}(B_{r_{j+1}}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} |u_n|_{L^{2q'\beta}(B_{r_j}(x_0))} \tag{3.109}$$

para todo $j, n \in \mathbb{N}$ e C depende de γ.

Afirmação 3.3.11 *Vale a seguinte fórmula*

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+1}2q'}(B_{r_{k+1}}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^k}+\cdots+\frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{k}{\chi^k}+\cdots+\frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad k = 1, 2, ... \tag{3.110}$$

onde C independe de n e

$$\chi = \frac{\gamma}{2q'}$$

com $\gamma > 2q'$ fixado.

Com efeito, utilizando (3.109) com $\beta = \chi = \frac{\gamma}{2q'}$ e $j = 1$ temos

$$u_n^\beta \in L^{2q'}(B_{r_1}(x_0))$$

e

$$|u_n|_{L^{\gamma\beta}(B_{r_2}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} |u_n|_{L^{2q'\beta}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.111}$$

ou ainda,

$$|u_n|_{L^{\chi^2 2q'}(B_{r_2}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.112}$$

De (3.112) garantimos

$$u_n^{\chi^2} \in L^{2q'}(B_{r_2}(x_0)). \tag{3.113}$$

O próximo passo é considerar $\beta = \chi^2$ e $j = 1$, por (3.113) temos

$$u_n^\beta \in L^{2q'}(B_{r_2}(x_0)).$$

Usando (3.109) segue que

$$|u_n|_{L^{\chi^3 2q'}(B_{r_3}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^2}}(\chi^2)^{\frac{1}{\chi^2}}|u_n|_{L^{\chi^2 2q'}(B_{r_2}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.114}$$

Agora substituindo (3.112) em (3.114) obtemos

$$|u_n|_{L^{\chi^3 2q'}(B_{r_3}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^2}}(\chi^2)^{\frac{1}{\chi^2}}C^{\frac{1}{\chi}}\chi^{\frac{1}{\chi}}|u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.115}$$

ou melhor,

$$|u_n|_{L^{\chi^3 2q'}(B_{r_3}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}\chi^{\frac{1}{\chi}+\frac{2}{\chi^2}}|u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.116}$$

Segue de (3.116)

$$u_n^{\chi^3} \in L^{2q'}(B_{r_3}(x_0)). \tag{3.117}$$

Agora suponhamos que a fórmula (3.3.11) é válida para algum $k > 1$ e queremos mostrar que é válida para $k+1$. Para isso, considerando $\beta = (\gamma/2q')^{k+1}$ e $j = k+1$. Como supomos válida para k, temos

$$u_n^\beta \in L^{2q'}(B_{r_{k+1}}(x_0)).$$

Substituindo $\beta = \chi^{k+1}$ e $j = k+1$ em (3.109) deduzimos

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2} 2q'}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^{k+1}}}(\chi^{k+1})^{\frac{1}{\chi^{k+1}}}|u_n|_{L^{\chi^{k+1} 2q'}(B_{r_{k+1}}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.118}$$

Pela hipótese de indução temos

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+1} 2q'}(B_{r_{k+1}}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^k}+\cdots+\frac{1}{\chi}}\chi^{\frac{k}{\chi^k}+\cdots+\frac{1}{\chi}}|u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.119}$$

Substituindo (3.119) em (3.118) concluímos

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2} 2q'}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C^{\frac{1}{\chi^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{\chi}}\chi^{\frac{k+1}{\chi^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{\chi}}|u_n|_{L^\gamma(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.120}$$

Portanto, pelo princípio de indução finita podemos concluir que a Afirmação 3.3.11 é válida.

Observe que as séries que aparecem em (3.3.11) são convergentes

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\chi^i} = \frac{1}{\chi - 1}$$

e

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{\chi^i} = \frac{\chi^2}{(\chi-1)^2}$$

assim, existe $C > 0$ tal que

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2}2q'}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C|u_n|_{L^{\gamma}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

Sendo $R < r_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$ então

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2}2q'}(B_R(x_0))} \leq |u_n|_{L^{\chi^{k+2}2q'}(B_{r_{k+2}}(x_0))} \leq C|u_n|_{L^{\gamma}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

É possível mostrar que $u_n \in L^p(B_R(x_0))$, para todo $p \geq \chi^k 2q'$ por interpolação. Utilizando o Lema 3.2.19 concluímos que $u_n \in L^\infty(B_R(x_0))$ e

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(x_0))} \leq C|u_n|_{L^{\gamma}(B_{r_1}(x_0))}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.121}$$

onde C independe de n. Note que $B_{r_1}(x_0) \subset \Omega^c$ e portanto

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(x_0))} \leq C|u_n|_{L^{\gamma}(B_{r_1}(x_0))} \leq C|u_n|_{L^{\gamma}(\Omega^c)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.122}$$

Usando a Proposição 3.3.10 temos que

$$u_n = u_{n,\lambda_n} \to 0 \text{ em } H^1(\Omega^c) \text{ quando } \lambda_n \to +\infty$$

e a imersão contínua de Sobolev dado $\kappa > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_n|_{L^\infty(B_R(x_0))} < \kappa, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Sendo $x_0 \in \Omega'^c$ arbitrário então

$$|u_n|_{L^\infty(\Omega'^c)} < \kappa.$$

Dessa forma, garantimos a existência de um $\lambda^* > 0$ tal que a solução u_λ verifica

$$u_\lambda(x) \leq a, \forall x \in \Omega'^c \text{ e } \lambda \geq \lambda^*.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla(v-u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} (1+\lambda V(x))u(v-u)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{g}(x,u)(v-u)\, dx, \quad \forall v \in \mathbb{K}.$$

Então para $\lambda \geq \lambda^*$ e pela Observação 3.92 segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla(v-u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} (1+\lambda V(x))u(v-u)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} f(u)(v-u)\, dx, \quad \forall v \in \mathbb{K} \tag{3.123}$$

Para finalizarmos a demonstração do Teorema 3.1.1 precisamos mostrar a seguinte proposição.

Proposição 3.3.12 *Seja $\lambda_n \to +\infty$ e (u_n) uma solução de (3.123). Então, existe uma subsequência (u_n) e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2).$$

Além disso,

(i) $u \equiv 0$ *em* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

(ii) $||u_n - u||^2_{\lambda_n} \to 0$.

(iii) Quando $\lambda_n \to \infty$ *temos as seguintes convergências:*

$$\begin{aligned}
&u_n \to u \quad em \quad H^1(\mathbb{R}^2),\\
&\lambda_n \int_{\mathbb{R}^2} V(x)\,|u_n|^2\,dx \to 0,\\
&||u_n||^2_{\lambda_n} \to \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\,dx = ||u||^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

(iv) Temos que u é uma solução da Desigualdade Variacional

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u)\,dx + \int_\Omega u(v-u)\,dx \geq \int_\Omega f(u)(v-u)\,dx, \tag{3.124}$$

para todo $v \in \tilde{\mathbb{K}}$, onde

$$\tilde{\mathbb{K}} = \{v \in H^1_0(\Omega);\ v \geq \varphi \ q.t.p. \ em \ \Omega\}.$$

Conforme omitimos a demonstração da Proposição 3.3.10, aqui segue a mesma justificativa de tal omissão.

Referências Bibliográficas

[1] C.O. Alves, *Existência de solução do tipo multi-bump para uma classe de problemas quasilineares em* $\mathbb{R}^N$, Tese de Professor Titular (2005).

[2] C.O. Alves and L.M. Barros, *Existence and multiplicity of solutions for a class of elliptic problem with critical growth*, to appear in Monatsh.Math.

[3] C.O. Alves and F.J.S.A. Côrrea, *Multiplicity of positive solutions for an obstacle problem in* $\mathbb{R}$, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol.**85** (2010), 23-28.

[4] C.O. Alves, D.C. De Morais Filho and M.A.S. Souto, *Multiplicity of positive solutions for a class of problems with critical growth in* $\mathbb{R}^N$, Proc. Edinb. Math. Soc. **52** (2009), 1-21.

[5] C.O. Alves and Y.H. Ding, *Multiplicity of positive solutions to a p-Laplacian equation involving critical nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003) 508-521.

[6] C.O. Alves, A.B. Nóbrega and M. Yang, *Multi-bump solutions for Choquard equation with deepening potential well*, Calc. Var. Partial Differential Equations **55** (2016), 28 pp.

[7] C.O. Alves and D.S. Pereira, *Multiplicity of Multi-Bump type nodal solutions for a class of elliptic problems with exponential critical growth in* $\mathbb{R}^2$, Proc. Edinb. Math. Soc. (2), v. 60, p. 273-297, 2017.

[8] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications,* J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[9] C.O. Alves and M.A.S. Souto, *Multiplicity of positive solutions for a class of problems with exponential critical growth in* $\mathbb{R}^2$*,* J. Differential Equations, 244 1502-1520, 2008.

[10] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Editura Academiei. Bucarest and Nordhoff, Leyden, 1976.

[11] T. Bartsch, A. Pankov and Z.Q. Wang, *Nonlinear Schrödinger equations with steep potential well*, Commun. Contemp. Math. **3** (2001), 549-569.

[12] T. Bartsch and Z. Tang, *Multibump solutions of nonlinear Schrödinger equations with steep potential well and indefinite potential*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **33** (2013), 7-26.

[13] T. Bartsch and Z-Q. Wang, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations **20** (1995), 1725-1741.

[14] T. Bartsch and Z-Q. Wang, *Multiple positive solutions for a nonlinear Schrödinger equation*, Z. Angew. Math. Phys. **51** (2000), 366-384.

[15] A. Bensoussan and K. Chandrasekharan, J. Turi, *Optimal control of variational inequalities*, Commun. Inf. Syst., 10 (2010), 203-220.

[16] A. Bensoussan and J-L. Lions, *Applications des inéquations variationelles en contrôle stochastique*, Dunod, Paris, 1978.

[17] D. M. Cao, *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, Comm. Partial Differential Equations 17 (1992), 407-435.

[18] S. Carl, V.K. Le and D. Motreanu, *Nonsmooth variational problems and their inequalities, comparison principles and applications*, Springer, New York (2007).

[19] M. Chipot and K. Yeressian, *On Some Variational Inequalities in Unbounded Domains*, Boll. del UMI, (9), V, (2012), 243-262.

[20] M. Clapp and Y.H. Ding, *Positive solutions for a nonlinear Schrödinger equation with critical nonlinearity*, Z. Angew. Math. Phys. **55** (2004), 592-605.

[21] M. Del Pino and P.L. Felmer, *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. 4(1996), 121-137.

[22] Y.H. Ding and K.Tanaka, *Multiplicity of Positive Solutions of a Nonlinear Schrödinger Equation,* Manuscripta Math. **112** (2003), 109-135.

[23] I. Ekeland, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 1, 1979, 443-474.

[24] M. Fang, *Degenerate elliptic inequalities with critical growth*, J. Differential Equations 232 (2007), no. 2, 441-467.

[25] G. Fichera, *Sul problema elastostatico di Signorini con ambigue condizioni al contorno.* Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 34, 138-142 (1963).

[26] G.M. Figueiredo, *Multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas quasilineares*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 2004.

[27] G.M. Figueiredo, M. Furtado and M. Montenegro *An obstacle problem in a plane domain with two solutions*, Adv. Nonlinear Stud. 14 (2014), 327-337.

[28] D.G. Figueiredo, O.H. Miyagaki and B. Ruf, *Elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearity in the critical growth range*, Calc. Var. Partial Differential Equations 3 (1995), 139-153.

[29] A. Friedman, *Free Boundary Problems in Science and Techonology.* Notice of the AMS, 2000.

[30] L.R. Freitas, *Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quasilineares com crescimento crítico exponencial*, in: Tese de doutorado USP-São Carlos, 2010.

[31] O. Frites, T. Moussaoui and D. ÓRegan, *Existence of solutions for a variational inequality on the half-line*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, Vol. 43 (2017), No. 1, pp. 223-237.

[32] L. Gongbao, *Some properties of weak solutions of nonlinearscalar field equations*, Annlaes Academic Scientiarum Fennica, Serie A, Vol. 14, (1989), 27-36.

[33] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* 2nd ed., Springer-Verlag, New York/Berlin, 1983.

[34] C. Gui, *Existence of multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations via variational methods*, Comm. Partial Differential Equations **21** (1996), 787-820.

[35] Y. Guo and Z. Tang, *Multi-bump solutions for Schrödinger equation involving critical growth and potential wells*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **35** (2015), 3393-3415.

[36] Y. Jianfu, *Positive solutions of quasilinear elliptic obstacle problems with critical exponents*, Nonlinear Anal. , Vol. 25, N. 12, (1995), 1283-1306.

[37] Y. Jianfu, *Positive solution of an obstacle problems*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., $6^{\text{ème}}$ Série, tome. 4, N. 2, 339-366 (1995).

[38] O. Kavian, *Introduction à la théorie de points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[39] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, 1980.

[40] P.L. Lions, *The concentration−compactness principle in the calculus of variations*, the limit case, I, Rev. Mat. Ibero. 1 (1985), 46-20.

[41] P.L. Lions, *The concentration−compactness principle in the calculus of variations*, the limit case, II, Rev. Mat. Ibero. 1 (1985), 145-201.

[42] P.L. Lions, *La méthode de concentration−compacité en calculs des variations*, (ICTP, Trieste, 1988).

[43] G. Mancini and R. Musina, *Holes and obstacles*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, Section C, tome 5, N. 4 (1988) 323-345.

[44] P. Magrone and R. Servadei, *A stability result for mountain pass type solutions of semilinear elliptic variational inequalities*, Adv. Nonlinear Stud. 9 (4) (2002), 387-405.

[45] M. Matzeu and R. Servadei, *A Linking type method to solve a class of semilinear elliptic variational inequalities*, Adv. Nonlinear Stud. 2 (1) (2002) 1-17

[46] M. Matzeu and R. Servadei, *Semilinear elliptic variational inequalities with dependence on the gradient via mountain pass techniques*, Nonlinear Anal. 72 (2010) 4347-4359.

[47] M. Matzeu and R. Servadei, *Stability for semilinear elliptic variational inequalities depending on the gradient*, Nonlinear Anal., 74, (2011) 5161-5170.

[48] O.H. Miyagaki, *On a class of semilinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth*, Nonl. Anal. TMA 29 (1997) 773-781.

[49] R. Monneau. *A brief overview on the obstacle problem.* In European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000), volume 202 of Progr. Math., pages 303-312. Birkhäuser, Basel, 2001.

[50] J.A. Moser, *Sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. 20 (1971), 1077-1092.

[51] J.A. Moser, *A new proof de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Partial Differential Equations, 13 (1960),457-468.

[52] J.F. Rodrigues, *Obstacle problems in mathematical physics*, Mathematics Studies 134, Elsevier, 1987.

[53] X. Ros-Oton, *Obstacle problems and free boundaries: an overview*, 2017.

[54] G. Stampacchia, *Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes*, C.R. Acud. Sci. Paris Sér L Math. 258 (1964) 4413-4416.

[55] A. Szulkin, *Minimax principles for lower semicontinuous functions and applications to nonlinear boundary value problems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, vol. 3, 1986, 77-109.

[56] K.H. Teka, *The obstacle problem for second order elliptic operators in nondivergence form*, Thesis(Ph.D.)-Kansas States University, 2012.

[57] G.M. Troianiello, *Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems*, The University Series in Mathematics, Springer, 1987.

[58] N. Trudinger, *On imbedding into Orlicz space and some applications*, J. Math. Mech. 17 (1967), 473-484.

[59] Z-Q. Wang, *Existence and symmetry of multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations*, J. Differential Equations, 159 (1999), 102-137.

[60] M. Willem, *Minimax Theorems, Birkhauser,* 1996.