Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Doutorado em Matemática

Um índice de somabilidade para operadores entre espaços de Banach

Mariana de Brito Maia

2017

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Doutorado em Matemática

Um índice de somabilidade para operadores entre espaços de Banach

por

Mariana de Brito Maia

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

sob co-orientação do

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

2017

João Pessoa - PB

Um índice de somabilidade para operadores entre espaços de Banach

por

Mariana de Brito Maia

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos - UFPB (Co-orientador)

Profa. Dra. Maria Pilar Rueda Segado

Prof. Dr. Daniel Nuñez Alarcón

Prof. Dr. Felipe Wallison Chaves Silva

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo

Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos(Suplente)

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (Suplente)

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus em primeiro lugar.

A meus pais, Antônio e Tânia, e minha irmã, Heloisa, pela dedicação e compreensão por todos os momentos em que eu não pude estar lá.

A minha família. Meus avós: Antônio, Humberto, Inês e Lindalva. Meus tios: Josinaldo, Maria, Conceição, Helder, Gorete, José Wilson, Graça, Lindeberto, Zileide, Graça. Meus primos: Catarina, Júnior, Vitória, Silas, Thiago, Helder Neto, Lorena, William, Leandro, Naldinho... A todos enfim pelo amor e cuidado.

A Tony, a melhor coisa que a matemática me deu.

A minha família Pedregal, sem a qual eu não teria conseguido terminar este trabalho, seja pela ajuda acadêmica de fato ou só pelas risadas nas horas mais difíceis: Eudes, Gérsica, Mylenna, D. Vanusa, Laura, Rafa, Mônica, Wanderson, Lili, Ginaldo, Renato, Deiviana, Rafinha.

Um agradecimento muito especial aos meus orientadores, Daniel e Joedson, que contrariando todo o senso comum acreditaram em mim e me acolheram nesta nova área, onde eu realmente me encontrei.

Aos demais colegas do doutorado, pelas correntes de união e fé durante as disciplinas: Júnior, Ricardo, Nacib, Esteban, Marcius, Ronaldo, Marcus, Gustavo, Rayssa, Eudes, Yane, Luis, Lis, Diego, Ricardo...

A meus professores que tanto fizeram pelo meu crescimento, em especial para Cleto por todo o conhecimento compartilhado.

A meus amigos da graduação: Wanderley, Sérgio, Carlinha, Will... Em especial meu orientador, Falcão, que me fez acreditar que tudo isso era possível.

A Socorro Trindade e toda a equipe da foco pelos ótimos momentos e o suporte no começo de tudo.

A seu Mariano, pelo combustível.

Enfim a todos que contribuíram de alguma forma pra que eu chegasse aqui.

Resumo

Neste trabalho introduzimos um índice de somabilidade que mede quão longe alguns operadores multilineares e polinômios estão de ser absolutamente somantes. Definimos ainda um ideal de operadores relacionado a esse índice; propriedades básicas são apresentadas. O índice de somabilidade exato é obtido em alguns casos especiais e, em outros casos, apresentamos estimativas inferiores e superiores.

Palavras-Chave: Espaços de Banach, Polinômios, Operadores multilineares, Operadores múltiplo somantes, Índice de somabilidade.

Abstract

In this work we introduce a summability index that indicates how far some multilinear and polynomial operators are from being absolutely summing. We also define a new ideal of operators related to this index; basic properties of this ideal are presented. The precise index of summability is obtained in some special cases and, in other cases, we provide some lower and upper estimates for it.

Key-Words: Banach spaces, Polynomials, Multilinear mappings, Multiple summing operators, Index of summability.

Sumário

1 Preliminares **1**

1.1 Operadores Absolutamente Somantes 1

1.2 Polinômios absolutamente somantes. 4

1.3 Operadores múltiplos somantes 5

1.4 Espaço com cotipo finito e Funções de Rademacher 6

2 Índice de Somabilidade **8**

2.1 Existência do índice 8

2.2 Operadores Lineares $(p, q) - s - somantes$ 18

2.3 Teoria Multilinear 25

2.4 Lineabilidade 31

3 Estimativas para o índice de somabilidade **36**

3.1 Estimativas inferiores para o índice de somabilidade polinomial 36

3.1.1 Ferramentas técnicas 36

3.1.2 Caso Vetorial 38

3.1.3 Caso Escalar 47

3.2 Estimando o índice de somabilidade via resultados de coincidência 54

3.2.1 Índice de Somabilidade vs. Resultados de Coincidência 54

3.2.2 Estimativas Ótimas 61

Introdução

Os trabalhos relacionados a convergência absoluta e a convergência incondicional ganharam notoriedade quando, em 1837, Dirichlet provou que ambas coincidem para séries de números reais. Um novo grande avanço nesta teoria só veio a surgir em 1922, quando, em sua tese, Banach provou que, dado um espaço E, toda série absolutamente convergente em E é incondicionalmente convergente se, e somente se, E for um espaço completo (posteriormente chamado Espaço de Banach). Banach continuou interessado no estudo da convergência de séries, incluindo o tópico em sua famosa roda de discussões matemáticas no bar Scottish Café, onde Mazur e Orlicz propuseram o problema 122 do livro *The Scottish book* [35], também mencionado em [7], o problema visava caracterizar dimensão infinita por meio da existência de séries incondicionalmente convergentes que não são absolutamente convergentes. Esse problema só obeteve uma primeira solução parcial em 1947, quando Macphail, em seu artigo *Absolute and unconditional convergence* [31], provou que convergência incondicional não implica convergência absoluta em ℓ_1. Este resultado inspirou a solução geral deste problema dada por Dvoretzky e Rogers, no seu artigo *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces* [21], em 1950, o resultado ficou conhecido como Teorema de Dvoretzky-Rogers, hoje um dos pilares da teoria dos operadores absolutamente somantes. Sua importância não reside apenas no resultado em si, mas também no fato de sua demonstração, que trazia uma abordagem nova e ampla sobre o assunto, ter aberto um leque de outros problemas a serem investigados, o que despertou o interesse de Grothendieck.

O estudo dos operadores absolutamente somantes tem início com os trabalhos de

Grothendiek. Em 1953, durante o período em que trabalhou no Brasil, Grothendieck publicou o Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques [25], onde trata, essencialmente, dos espaços Π_1 e Π_2. O principal resultado da teoria de operadores absolutamente somantes, continua sendo, até hoje, o Teorema de Grothendieck, que estabelece que todo operador linear de ℓ_1 em ℓ_2 é absolutamente somante, isto é, leva sequências incodicionalmente somáveis em sequências absolutamente somáveis. Em 1955, Grothendieck apresentou uma nova demonstração para o Teorema de Dvoretzky-Rogers (Veja [26]), mostrando quão profícua foi a sua contribuição na teoria dos operadores absolutamente somantes. No entanto essa teoria só foi instituída, de fato, em 1967, quando Pietsch introduziu a classe dos operadores $p-$somantes, no seu artigo Absolut $p-$summierende Abbildungen in normierten Räumen [43], muitas de suas propriedades são devidas a ele. Mais tarde, Mitiagin e Pełczyński, expandem a noção de Pietsch, para operadores $(p, q)-$somantes, em [37]. Porém a grande contribuição Pełczyński, se deu quando, juntamente com Lindenstrauss, publicaram, em 1968, Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p-$spaces and their applications [30], que, ao traduzir os trabalhos de Grothendieck da linguagem tensorial, tornou acessível à comunidade científica a teoria de operadores somantes, além de conter muitos resultados clássicos e que até hoje inspiram novos trabalhos.

O desdobramento natural seria a investigação dos operadores multilineares, menos natural é a adaptação das técnicas conhecidas para operadores lineares para um contexto mais geral, o que produziu um novo ramo de estudo muito frutífero a teoria de operadores não-lineares. As primeiras generalizações, neste sentido, foram idealizadas por Pietsch. Em 1983, nos artigos [45] e [46] são introduzidos os operadores multilineares absolutamente somantes e os polinômios $m-$homogêneos.

Dentre a extensões para a teoria multilinear, uma vem ganhando espaço por combinar boas propriedades e generalizações não triviais, esses atributos estão atraindo a atenção de muitos pesquisadores, que consideram esta a mais completa generalização do ideal de operadores absolutamente somantes. Os operadores múltiplo somantes foram introduzido por Mário Carvalho de Matos, em 1992, no seu trabalho intitulado Strictly absolutely summing multilinear mappings [33], que no entanto não foi publicado, um versão melhorada deste relatório de pesquisa foi publicada em 2003, sob novo título Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings [34]. A motivação deste trabalho foi uma questão de Pietsch sobre a coincidência dos funcionais $m-$lineares de Hilbert-Schmidt e o espaço dos funcionais $m-$lineares absolutamente $(s; r_1, \cdots, r_m)-$somantes para certos valores de s e $r_k,\ k = 1, \cdots, m$. Também em 2003 Fernando Bombal, David Pérez-García e Ignacio Villanueva publicaram Multilinear extensions of Grothendieck's theorem [11] e Multiple summing operators on Banach spaces [41], onde, de forma independente, definiram e mostraram muitas propriedades dessa classe de operadores.

Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e $E_1, \cdots, E_m, F$ espaços de Banach. Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$ é múltiplo $(p, q)-$somante se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{k_1, \cdots, k_m = 1}^{n} \| T(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)}) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{i=1}^{m} \| \left(x_{k_i}^{(i)} \right)_{k_i = 1}^{n} \|_{w,q}. \tag{1}$$

para todos $x_{k_i}^{(i)} \in E_i,\ k = 1, \cdots, n,\ i = 1, \cdots, m.$

É bem sabido que nem todos os operadores $m-$lineares satisfazem a desigualdade, por exemplo, uma versão fraca do teorema de Dvoretzky-Rogers diz que a identidade sobre um espaço de Banach E será absolutamente $p-$somante se, e somente se, E tem dimensão finita.

É claro que, quando (1) não é válida, isto siginifica que tal constante C não existe. Não tão óbvio é o fato de existir uma constante C_n dependendo de n satisfazendo (1), já que poderia acontecer que variando os vetores $x_1, \cdots, x_n$ a constante poderia tender ao infinito. No entanto vamos provar que não é este o caso e quando (1) falha existirá uma constante C_n que torna a desigualdade verdadeira. Mais ainda, esta constante será da forma $C_n = Cn^s$ para certo s dependendo de p, q, m. Note que o número s funciona como um tipo de índece de (não) somabilidade: quando $s = 0$ o operador é múltiplo (p, q)-somante e quando s não pode ser escolhido como sendo zero, o operador não é múltiplo (p, q)-somante e os "ótimos" valores de s podem ser naturalmente identificados como um índice de (não) somabilidade. Neste caso, quanto mais o "ótimo" valor de s cresce, mais "longe" o operador estará de ser múltiplo (p,q)-somante. Assim, nosso objetivo é definir o índice de somabilidade do par $(E_1 \times \cdots \times E_m, F)$ e trazer a tona algumas propriedades interessantes deste índice, bem como investigar os valores ótimos do índice para certos espaços. Temos

O $m-$índice multilinear de $(p,q)-$somabilidade do par de espaços de Banach $(E_1 \times \cdots \times E_m, F)$ é definido como

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \cdots, E_m; F) = \inf s_{m,p,q}$$

tal que, para todo $T \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$, existe uma constante $C > 0$ (não dependendo de n) satisfazendo

$$\left(\sum_{k_1, \cdots, k_m = 1}^{n} \|T(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C n^{s_{m,p,q}} \prod_{i=1}^{m} \| \left(x_{k_i}^{(i)} \right)_{k_i=1}^{n} \|_{w,q}. \tag{2}$$

para todo inteiro positivo n e todo $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$ com $1 \leq k_i \leq n$ e $1 \leq i \leq m$.

Esta definição foi inspirada nas ideias de [4], onde um tipo de índice de somabilidade foi investigado para desigualdades do tipo Hardy–Littlewood. Outros resultados recentes, nesta linha das desigualdades clássicas pode ser encontrado em [22] de Galicer, Mansilla e Muro.

Veja que em certo sentido o índice de somabilidade mede quão distantes estão os espaços $\Pi_{(p,q)}^{mult}(E_1, \ldots, E_m; F)$ e o espaço dos operadores m-lineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F, denotado por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$. Quando esses espaços coincidem temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \cdots, E_m; F) = 0.$$

Este trabalho foi dividido da seguinte forma:

1. No primeiro capítulo temos uma breve revisão da Teoria de operadores absolutamente somantes, operadores múltiplo somantes, polinômios homogêneos e cotipo;

2. No segundo capítulo provamos a existência do índice de somabilidade, para o caso múltiplo somante e polinomial, isto é feito obtendo estimativas superiores para este índice em espaços de Banach quaisquer. Além disso, definimos um novo ideal de

operadores, que veremos ter boas propriedades, como por exemplo, ser um ideal de Banach injetivo. Neste capítulo, incluímos ainda um resultado sobre lineabilidade.

3. No último capítulo buscamos estimativas melhores para o índice de somabilidade de certos espaços de Banach. Para isto, vamos calcular estimativas inferiores para o índice e também faremos a ponte entre índice de somabilidade e resultados de coincidência. Ao final deste capítulos obteremos o índice ótimo para determinados espaços de Banach.

Parte deste trabalho pode ser encontrada em nosso artigo:

M. Maia, D. Pellegrino, J. Santos, *An index of summability for pairs of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **441** (2016), 702–722.

Notação e Terminologia

- $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou dos complexos $\mathbb{C}$. Todos os espaços vetoriais serão considerados sobre $\mathbb{K}$.

- Em geral, $X, Y, E, E_i, F, F_i, ...$ denotarão espaço normados. A norma de um espaço X será usualmente denotada por $\|\cdot\|_X$ ou $\|\cdot\|$ caso esteja claro o espaço em questão. A bola unitária fechada $\{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ do espaço X será denotada por B_X. O dual topológico de X, será denotado por X^*.

- $\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$ será o espaço de todas as aplicações $m-$lineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F. Quando $E_1 = \cdots = E_m = E$, escreveremos apenas $\mathcal{L}(^m E; F)$. Diremos que $T \in \mathcal{L}(E; F)$ é de posto finito quando a dimensão da sua imagem $T(F)$ for finita.

- Dado o número real $p \in (1, \infty)$ O conjugado de p será o número $p^* \in (1, \infty)$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Para $p = 1$, teremos $p^* = \infty$.

- Trabalharemos os seguintes espaços de sequências

i) Se $1 \leq p < \infty$, $\ell_p(X) := \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}; \sum_n \|x_n\|^p < \infty\right\}$. Se $X = \mathbb{K}$, escreveremos simplesmente ℓ_p.

ii) $\ell_\infty(X)$ é o espaço das sequências limitadas de X. Mais uma vez, se $X = \mathbb{K}$, escrevemos ℓ_∞.

iii) c_0 é o espaço das sequências de $\mathbb{K}$ que convergem para 0.

iv) $\ell_p^N := \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p; x_n = 0, \text{ para todo } n \geq N+1\}$.

v) Denotaremos $X_p := \begin{cases} \ell_p, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ c_0, & \text{se } p = \infty \end{cases}$.

vi) $\ell_p(\mathbb{N}^m; X) := \{(x_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}=1}^{\infty} \text{ onde } \mathbf{i} := (i_1, \cdots, i_m) \text{ e cada } x_{\mathbf{i}} \in X; \sum_{\mathbf{i}} \|x_{\mathbf{i}}\|^p < \infty\}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo temos uma breve revisão da teoria de operadores absolutamente somantes, operadores múltiplo somantes, polinômios homogêneos e cotipo de um espaço de Banach.

1.1 Operadores Absolutamente Somantes

Nesta seção faremos uma pequena compilação de resultados sobre operadores absolutamente $p-$somantes. Para um estudo mais detalhado veja [18].

Definição 1.1.1 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $u : X \to Y$ um operador entre espaços de Banach. Dizemos que u é $p-$somante se existe uma constante $c \geq 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e qualquer escolha de $x_1, \cdots, x_n \in X$ temos*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Denotamos por $\Pi_p(X,Y)$ o conjunto de todos os operadores $p-$somantes de X em Y. É fácil ver que $\Pi_p(X,Y)$ é um subespaço linear do espaço dos operadores lineares limitados entre X e Y, $\mathcal{L}(X,Y)$. O ínfimo dos c que satisfaz a desigualdade (1.1), denotado por $\pi_p(u)$, define uma norma em $\Pi_p(X,Y)$ tal que, para todo $u \in \Pi_p(X,Y)$, temos

$$\|u\| \leq \pi_p(u).$$

Além disso, $(\Pi_p(X,Y), \pi_p(\cdot))$ é um espaço de Banach.

Teorema 1.1.2 (Teorema da Inclusão) *Se* $1 \leq p < q < \infty$, *então* $\Pi_p(X,Y) \subset \Pi_q(X,Y)$. *Além disso, para* $u \in \Pi_p(X,Y)$, *temos* $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$.

Demonstração: Veja [18, Teorema 2.8]. ■

Podemos generalizar os conceitos estabelecidos aqui e obter a noção de operadores absolutamente $(p,q)-$somantes.

Definição 1.1.3 *Sejam* $1 \leq p, q < \infty$ *e* $u : X \to Y$ *um operador entre espaços de Banach. Dizemos que* u *é* $(p,q)-$*somante se existe uma constante* $c \geq 0$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e qualquer escolha de* $x_1, \cdots, x_n \in X$ *temos*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.2}$$

O espaço formado por esses operadores vai ter norma e propriedades semelhantes, inclusive $(\Pi_{p,q}(X,Y), \pi_{p,q}(\cdot))$ será um espaço de Banach. O próximo resultado fornece uma caracterização deste espaço e sua prova pode ser vista também em [50].

Proposição 1.1.4 *Seja* $u \in \mathcal{L}(X,Y)$. *São equivalentes:*

1. u *é* $(p,q)-$*somante;*

2. *Existe* $c > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.3}$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$;

3. $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$ *sempre que* $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$.

Um fato interessante é que se $p < q$, então, apenas o operador nulo será $(p,q)-$somante.

Teorema 1.1.5 (Teorema da Inclusão generalizado) *Suponha que* $1 \leq q_j \leq p_j < \infty$ $(j = 1, 2)$ *satisfazem*

$$q_1 \leq q_2, \ p_1 \leq p_2 \ e \ \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2}. \tag{1.4}$$

Então

$$\Pi_{p_1,q_1}(E;F) \subset \Pi_{p_2,q_2}(E;F)$$

para quaisquer espaços de Banach E *e* F*. Mais ainda, para* $u \in \Pi_{p_1,p_2}(E;F)$ *temos*

$$\pi_{p_2,q_2}(u) \leq \pi_{p_1,q_1}(u).$$

Demonstração: Veja [18, Teorema 10.4]. ■

Os próximos resultados dizem respeito à teoria de ideais e suas demonstrações podem ser encontradas em [9].

Definição 1.1.6 *Um ideal de operadores* $\mathcal{I}$ *é uma subclasse da classe* $\mathcal{L}$ *de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para quaisquer espaços* E *e* F*, as componentes* $\mathcal{I}(E;F) = \mathcal{L}(E;F) \cap \mathcal{I}$ *satisfazem:*

i) $\mathcal{I}(E;F)$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{L}(E;F)$;

ii) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(E;F),\ v \in \mathcal{I}(F;G)$ *e* $t \in \mathcal{L}(G;H)$*, então* $tvu \in \mathcal{I}(E;H)$.

Definição 1.1.7 *Um ideal normado de operadores* $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ *é um ideal de operadores* $\mathcal{I}$ *munido da função* $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to [0,\infty)$ *tal que:*

i) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ *restrita a* $\mathcal{I}(E;F)$ *é uma norma para quaisquer espaços de Banach* E *e* F;

ii) $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$, *com* $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *dada por* $id_{\mathbb{K}}(x) = x$;

iii) Se $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \mathcal{I}(F;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$, então $\|tvu\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\|\|v\|_{\mathcal{I}}\|u\|$.

Teorema 1.1.8 *Se $1 \leq q \leq p < \infty$, então $(\Pi_{p,q}, \pi_{p,q})$ é um ideal normado de operadores lineares.*

Definição 1.1.9 *Se as componentes $\mathcal{I}(E;F)$ são completas com respeito a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ dizemos que $\mathcal{I}$ é um ideal de Banach.*

Definição 1.1.10 *Um ideal de Banach $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é injetivo se, para quaisquer espaços de Banach E, F, G, $\|u \circ v\|_{\mathcal{I}} = \|v\|_{\mathcal{I}}$ sempre que $u \in \mathcal{L}(F;G)$ é uma isometria sobre a imagem e $v \in \mathcal{I}(E;F)$.*

Proposição 1.1.11 *Se $1 \leq q \leq p < \infty$, então $\left(\Pi_{p,q}^{mult}, \pi_{p,q}\right)$ é um ideal de Banach. Mais ainda, é um ideal injetivo.*

O progressão natural de nosso estudo nos levaria aos operadores multilineares absolutamente $(p,q)-$somantes. Apesar de trata-se de uma classe, a primeira vista, muito próxima aos operadores absolutamente $(p,q)-$somantes, esta classe detém algumas propriedades que mostram que, na verdade, as duas são bem diferentes. Como esta generalização, em particular, não é o nosso foco, vamos prosseguir com polinômios absolutamente somantes.

1.2 Polinômios absolutamente somantes.

Nosso objetivo agora é rever o conceito de polinômios homogêneos absolutamente somantes entre espaços de Banach. Como veremos, este conceito é uma consequência natural da noção de operadores multilineares absolutamente somantes.

Definição 1.2.1 *Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Um aplicação $P : E \to F$ é um polinômio $m-$homogêneo contínuo se existe $A \in \mathcal{L}(^mE;F)$ tal que $P(x) = A(x, \cdots, x)$, para todo $x \in E$. Dizemos que P é o polinômio $m-$homogêneo contínuo associado a A. O conjunto* *de todos os polinômios $m-$homogêneos contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{P}(^mE;F)$, este conjunto será um espaço vetorial completo quando munido com a norma*

$$\|P\| = \sup_{\|x\|=1} \|P(x)\|.$$

A definição acima torma natural a definição de polinômios absolutamente $(p,q)-$somantes.

Definição 1.2.2 *Sejam E e F espaços de Banach e $1 \leq p,q < \infty$, com $p \geq \frac{q}{m}$. Um polinômio m-homogêneo $P: E \to F$ é absolutamente (p,q)-somante se existe uma constante, $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}^m \tag{1.5}$$

para todo inteiro positivo n.

Denotamos por $\mathcal{P}_{(p,q)}(^mE;F)$ o conjunto dos polinômios $m-$homogêneos absolutamente $(p,q)-$somantes de E em F. Esse conjunto será um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^mE;F)$. Mais uma vez o ínfimo dos C que satisfaz a desigualdade (1.5), define uma norma em $\mathcal{P}_{(p,q)}(^mE;F)$, a qual denotaremos por $\|\cdot\|_{(p,q)}^{pol}$.

1.3 Operadores múltiplos somantes

Esta seção tem por objetivo relembrar resultados importantes da teoria de operadores múltiplo somantes.

Definição 1.3.1 *Sejam $1 \leq p, q_1, \cdots, q_m < \infty$ e $E_1, \cdots, E_m, F$ espaços de Banach. Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$ é múltiplo $(p, q_1, \cdots, q_m)-$somante se existe um $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|T(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{i=1}^{m} \| \left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k=1}^{n} \|_{w,q_i} \tag{1.6}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, todo $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$, com $k_i = 1, \ldots, n$ e $i = 1, \cdots, m$.

Denotaremos por $\Pi^{mult}_{p,q_1,\cdots q_m}(E_1,\cdots,E_m;F)$ o conjunto formado por tais operadores. Se $q_1 = \cdots = q_m = q$ ou $p = q_1 = \cdots = q_m$ escrevemos $\Pi^{mult}_{p,q}(E_1,\cdots,E_m;F)$ ou $\Pi^{mult}_{p}(E_1,\cdots,E_m;F)$, respectivamente, e quando $E_1 = \cdots = E_m$, nossa notação será $\Pi^{mult}_{p,q}({}^mE;F)$.

Vamos focar no caso $\Pi^{mult}_{p,q}(E_1,\cdots,E_m;F)$ o conjunto dos operadores $m-$lineares múltiplo $(p,q)-$somantes de $E_1\times\cdots\times E_m$ em F. Esse conjunto é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1,\cdots,E_m;F)$.

É fácil ver que ínfimo dos C que satisfaz a desigualdade (1.6), define uma norma em $\Pi^{mult}_{p,q}(E_1,\cdots,E_m;F)$, a qual denotaremos por $\pi^{mult}_{p,q}(\cdot)$. Além disso, o espaço dos operadores $m-$lineares múltiplo $(p,q)-$somantes de $E_1\times\cdots\times E_m$ em F munido com a norma $\pi^{mult}_{p,q}(\cdot)$ será um espaço de Banach. Aqui também teremos uma importante caracterização, via sequências, para sua prova veja [50].

Proposição 1.3.2 *Sejam* $1 \leq q_1,\cdots,q_m \leq p < \infty$ *e* $T \in \mathcal{L}(E_1,\cdots,E_m;F)$. *São equivalentes:*

1. *T é múltiplo $(p,q_1,\cdots,q_m)-$somante;*

2. $(T(x^{(1)}_{k_1},\cdots,x^{(m)}_{k_m}))^{\infty}_{k_1,\cdots,k_m=1} \in \ell_p(\mathbb{N}^m;F)$ *sempre que* $(x^{(i)}_{k_i})^{\infty}_{k_i=1} \in \ell_{q_i,w}(E_i)$.

Nesta classe de operadores, no entanto, não temos um teorema de inclusão semelhante aos que já vimos para as classes anteriores, existem, todavia, resultados parciais, que não serão abordados neste trabalho.

1.4 Espaço com cotipo finito e Funções de Rademacher

Relembremos que, para $2 \leq q \leq \infty$, um espaço E *tem cotipo* q se existe uma constante $C \geq 0$ tal que, para qualquer escolha de um número finito de vetores $x_1,\cdots,x_n$ de E, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^1\left\|\sum_{k=1}^{n} r_k(t)x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde r_k denota a k-ésima função de Rademacher, isto é, para $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,1]$, são dadas por $r_k(t) = \operatorname{sign}\left[\sin\left(2^k \pi t\right)\right]$. Quando $q = \infty$ substituímos $(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^q)^{\frac{1}{q}}$ por $\max_{k \le n} \|x_k\|$. É claro que se $q_1 \le q_2$, então E ter cotipo q_1 implica que E tem cotipo q_2; portanto, daqui em diante, denotaremos $\inf\{q : E \text{ tem cotipo } q\}$ por $\cot(E)$.

Definição 1.4.1 *Se $2 \le q < \infty$, então dizemos que o espaço de Banach X fatora finitamente a inclusão formal $\ell_q \hookrightarrow \ell_\infty$, para $0 < \delta < 1$, se, para todo $n \in \mathbb{N}$, existirem $x_1, \cdots, x_n \in X$ tais que*

$$(1-\delta)\|a\|_\infty \le \|\sum_{k \le n} a_k x_k\| \le \|a\|_q$$

para todo $a = (a_k)_{k=1}^n \in \ell_q^n$.

Dado um espaço de Banach X definiremos por

$$\begin{aligned} r_X &:= \sup\left\{2 \le q \le \infty : X \text{ fatora finitamente a inclusão formal } \ell_q \hookrightarrow \ell_\infty\right\}; \\ s_X &:= \inf\left\{2 \le q \le \infty : id_X \in \Pi_{q,1}(X)\right\}. \end{aligned}$$

Teorema 1.4.1 *Para todo espaço de Banach de dimensão infinita X, temos*

$$\cot(X) = r_X = s_X.$$

Demonstração: [18, Teorema 14.5]. ■

Capítulo 2

Índice de Somabilidade

Neste capítulo provamos a existência do índice de somabilidade, para o caso múltiplo somante e polinomial, isto é feito obtendo estimativas superiores para este índice. Além disso, definimos um novo ideal de operadores que veremos ter boas propriedades, como por exemplo, ser um ideal de Banach injetivo. Também definiremos o espaço $\left(\Pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}, \pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}\right)$ e mostraremos um resultado dentro da teoria de lineabilidade.

2.1 Existência do índice

Nesta seção provaremos que existe uma constante C_n dependendo de n que satisfaz (1.6) para toda aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$, e mais, esta constante é da forma $C_n = Cn^s$, com $s \geq 0$. Veja que este s pode ser visto como um índice de somabilidade. De fato, quando podemos tomar $s = 0$ recaímos na definição de operadores múltiplos $(p, q)-$ somantes, quando não, podemos nos perguntar sobre qual seria o índice ótimo, ou seja, o menor s para o qual teríamos a desigualdade válida para todo operador $m-$linear contínuo de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F. Tendo isso em mente definimos o índice de somabilidade para o par de espaços $(E_1 \times \cdots \times E_m, F)$, onde m um inteiro positivo, como segue:

Definição 2.1.1 *O $m-$índice multilinear de $(p, q)-$somabilidade do par de espaços de*

Banach $(E_1 \times \cdots \times E_m, F)$ *é definido como*

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \cdots, E_m; F) = \inf s_{m,p,q}$$

tal que, para todo $T \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$, *existe uma constante* $C > 0$ *(não dependendo de* n*) satisfazendo*

$$\left(\sum_{k_1, \cdots, k_m = 1}^{n} \| T(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)}) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C n^{s_{m,p,q}} \prod_{i=1}^{m} \| \left(x_{k_i}^{(i)} \right)_{k_i=1}^{n} \|_{w,q} \qquad (2.1)$$

para todo inteiro positivo n *e todo* $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$ *com* $1 \leq k \leq n$ *e* $1 \leq i \leq m$.

Quando $E_1 = \cdots = E_m = E$, escrevemos $\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E; F)$ no lugar de $\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E, \cdots, E; F)$.

De maneira similar definimos o $m-$índice polinomial de $(p, q)-$somabilidade do par de espaços de Banach (E, F), da seguinte maneira:

Definição 2.1.2 *O* $m-$*índice polinomial de* $(p, q)-$*somabilidade do par de espaços de Banach* (E, F) *é definido como*

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E; F) = \inf s_{m,p,q}$$

tal que, para todo $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$, *existe uma constante* $C > 0$ *(não dependendo de* n*) satisfazendo*

$$\left(\sum_{k}^{n} \| P(x_k) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C n^{s_{m,p,q}} \| (x_k)_{k=1}^{n} \|_{w,q}^{m} \qquad (2.2)$$

para todo inteiro positivo n *e todo* $x_k \in E$ *com* $1 \leq k \leq n$.

Quando $m = 1$, temos $\Pi_{p,q}^{mult}(^1 E; F) = \mathcal{P}_{(p,q)}(^1 E; F) = \Pi_{p,q}(E; F)$ e, neste caso, escrevemos simplesmente $\eta_{(p,q)}(E; F)$.

A seguir vamos mostrar que este índice existe e é sempre finito.

Um dos resultados fundamentais da teoria de operadores $p-$abosulatemente somantes é o já mencionado Teorema de Dvoretzky-Rogers que garante a existência de uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável em qualquer espaço de dimensão infinita. Uma versão fraca desse teorema diz que o operador identidade sobre o espaço de Banach E, dado por $id_E(x) = x,$ para todo $x \in E$, será absolutamente $p-$somante se, e somente se, E for de dimensão finita, neste caso, a norma $p-$somante pode ser calculada. O primeiro resultado que enunciaremos a este respeito foi provado inicialmente, em [24], por Garling e Gordon, em 1971.

Teorema 2.1.1 *Se E é um espaço de Banach e* $\dim E = n$, *então* $\pi_2(id_E) = \sqrt{n}$.

Estimativas para essa norma serão fundamentais ao longo deste trabalho, assim prosseguimos com um corolário deste resultado. A partir de agora vamos extrapolar a noção de operador absolutamente $p-$somante para $p > 0$.

Corolário 2.1.2 *Seja $0 < p < \infty$. Se E é um espaço de Banach e* $\dim E = n$, *então*

$$\pi_p(id_E) \leq n^{max\left\{\frac{1}{p},\frac{1}{2}\right\}}. \tag{2.3}$$

Demonstração: Seja $0 < p < 2$ e $r > 0$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{r}$. Dados $x_1, \cdots, x_n \in E$ e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_E(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|id_E(x_j)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |1|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \pi_2(id_E) \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,2} n^{\frac{1}{r}} \\ &\overset{\text{Teorema 2.1.1}}{\leq} n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{r}} \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,p}.\end{aligned}$$

Logo

$$\pi_p(id_E) \leq n^{\frac{1}{p}}.$$

Para o caso $p \geq 2$ usamos o Teorema da Inclusão (1.1.2) para obter

$$\pi_p(id_E) \leq \pi_2(id_E) = n^{\frac{1}{2}}.$$

■

Do corolário acima, se X é um subespaço de um espaço $n-$dimensional normado E, então

$$\pi_p(id_X) \leq (\dim X)^{\max\left\{\frac{1}{p},\frac{1}{2}\right\}} \leq n^{\max\left\{\frac{1}{p},\frac{1}{2}\right\}}.$$

Proposição 2.1.3 *Sejam $0 < p < \infty$ e $E_1, \cdots, E_m, F$ espaços de Banach. Então*

$$\begin{aligned} \eta_{(p,p)}^{m-mult}(E_1, \cdots, E_m; F) &\leq \frac{m}{p} \text{ se } 0 < p \leq 2; \\ \eta_{(p,p)}^{m-mult}(E_1, \cdots, E_m; F) &\leq \frac{m}{2} \text{ se } p \geq 2. \end{aligned}$$

Demonstração: Sejam $T \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$, $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$ e $X_i = span\left\{x_{1_i}^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)}\right\} \subset E_i$ com $k_i = 1, \ldots, n$ e $i = 1, \ldots, m$. Então

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \left\|T\left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|T\| \left(\sum_{k_1=1}^{n} \left\|x_{k_1}^{(1)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\sum_{k_m=1}^{n} \left\|x_{k_m}^{(m)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|T\| \left(\sum_{k_1=1}^{n} \left\|id_{X_1}\left(x_{k_1}^{(1)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\sum_{k_m=1}^{n} \left\|id_{X_m}\left(x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Como id_{X_i} é absolutamente p-somante, para cada $i = 1, \cdots, m$, temos

$$\left(\sum_{k_i=1}^{n} \left\|id_{X_i}\left(x_{k_i}^{(i)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(id_{X_i}) \sup_{\psi \in B_{X_i^*}} \left(\sum_{k_i=1}^{n} \left|\psi\left(x_{k_i}^{(i)}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pelo Teorema de Hahn–Banach, para cada $\psi \in X_i^*$ existe uma extensão $\bar{\psi} \in E_i^*$ tal que $\|\psi\| = \left\|\bar{\psi}\right\|$. Portanto

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k_i=1}^{n}\left\|id_{X_i}\left(x_{k_i}^{(i)}\right)\right\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(id_{X_i})\sup_{\bar{\psi}\in B_{E_i^*}}\left(\sum_{k_i=1}^{n}\left|\bar{\psi}\left(x_{k_i}^{(i)}\right)\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \pi_p(id_{X_i})\sup_{\varphi\in B_{E_i^*}}\left(\sum_{k_i=1}^{n}\left|\varphi\left(x_{k_i}^{(i)}\right)\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \pi_p(id_{X_i})\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,p},\end{aligned}$$

e assim

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\left\|T\left(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|T\|\,\pi_p(id_{X_1})\left\|\left(x_{k_1}^{(1)}\right)_{k_1=1}^{n}\right\|_{w,p}\cdots\pi_p(id_{X_m})\left\|\left(x_{k_m}^{(m)}\right)_{k_m=1}^{n}\right\|_{w,p}.$$

Pelo corolário anterior, temos:

1) Se $0 < p \leq 2$, então

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\left\|T\left(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} &\overset{(2.3)}{\leq} \|T\|\left(n^{\frac{1}{p}}\right)^{m}\prod_{i=1}^{m}\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,p}\\ &= \|T\|\,n^{\frac{m}{p}}\prod_{i=1}^{m}\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,p},\end{aligned}$$

e

$$\eta_{(p,p)}^{m-mult}\left(E_1,\cdots,E_m;F\right) \leq \frac{m}{p}.$$

2) Se $p \geq 2$, então, analogamente,

$$\eta_{(p,p)}^{m-mult}\left(E_1,\cdots,E_m;F\right) \leq \frac{m}{2}.$$

■

O resultado acima suscita a pergunta: Será que esses valores podem ser melhorados? O próximo corolário mostra que essa estimativa é ótima para alguns espaços, não podendo ser universalmente melhorada.

Corolário 2.1.4 $\eta_{(2,2)}^{m-mult}(\ell_2; c_0) = \frac{m}{2}$.

Demonstração: Seja t um número real positivo tal que para cada $T \in \mathcal{L}(^m\ell_2; c_0)$ existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Cn^t \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,2} \tag{2.4}$$

para todo inteiro positivo n e todo $x_{k_i}^{(i)} \in \ell_2$, com $1 \leq k_i \leq n$.

Agora, seja $T \in \mathcal{L}(^m\ell_2; c_0)$ definido por

$$T\left(x^{(1)}, \cdots, x^{(m)}\right) = \left(x_{j_1}^{(1)} \cdots x_{j_m}^{(m)}\right)_{j_1,\cdots,j_m=1}^{n}.$$

Claro que $\|T\| = 1$ e

$$\left(\sum_{j_1,\cdots,j_m=1}^{n} \|T(e_{j_1}, \cdots, e_{j_m})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{m}{2}}.$$

Como $\left\|(e_{j_i})_{j_i=1}^{n}\right\|_{w,2} = 1$, a última condição juntamente com (2.4) implica

$$n^{\frac{m}{2}} \leq Cn^t$$

e portanto $t \geq \frac{m}{2}$. A desigualdade inversa é dada pela proposição anterior o que conclui a prova. ■

Note que se $q < p$, é evidente que usando a inclusão para norma fraca, vale

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \cdots, E_m; F) \leq \eta_{(p,p)}^{m-mult}(E_1, \cdots, E_m; F).$$

No entanto conseguimos melhorar essa estimativa pelo menos quando $q \geq 2$. É o que nos mostra a próxima proposição, mas antes de demonstrá-la vamos enunciar um resultado que será necessário (para sua demonstração veja [23, Corolário 16.3.1]).

Proposição 2.1.3 *Sejam E e F espaços de Banach e $1 \leq q \leq p_1 \leq p_2$. Se $T \in \Pi_{(p_1,q)}(E,F)$, então*

$$\pi_{p_2,q}(T) \leq \|T\|^{1-\frac{p_1}{p_2}} \left(\pi_{p_1,q}(T)\right)^{\frac{p_1}{p_2}}.$$

Proposição 2.1.5 *Sejam $1 \leq q \leq p < \infty$ e $E_1, \cdots, E_m, F$ espaços de Banach. Então*

$$\begin{aligned}
\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \cdots, E_m; F) &\leq \frac{m}{p} \text{ se } 1 \leq q \leq 2; \\
\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \cdots, E_m; F) &\leq \frac{mq}{2p} \text{ se } q \geq 2.
\end{aligned}$$

Demonstração: Note que

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \left\|T\left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|T\| \left(\sum_{k_1=1}^{n} \left\|x_{k_1}^{(1)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\sum_{k_m=1}^{n} \left\|x_{k_m}^{(m)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x_{k_i}^{(i)} \in E_i,\ 1 \leq k_i \leq n,\ 1 \leq i \leq m$.

Seja $X_i := span\left\{x_{1_i}^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)}\right\} \subset E_i$ com $i = 1, \cdots, m$. Como X_i é um espaço de Banach de dimensão finita, segue que id_{X_i} é absolutamente q-somante. Logo, pela Proposição 2.1.3 temos

$$\pi_{p,q}(id_{X_i}) \leq \pi_q(id_{X_i})^{\frac{q}{p}}. \tag{2.5}$$

Portanto, para cada $i = 1, \cdots, m$, obtemos

$$\left(\sum_{k_i=1}^{n} \left\|x_{k_i}^{(i)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(id_{X_i}) \left\|(x_{k_i})_{k_i=1}^n\right\|_{w,q} \overset{(2.5)}{\leq} \pi_q(id_{X_i})^{\frac{q}{p}} \left\|(x_{k_i})_{k_i=1}^n\right\|_{w,q}$$

e, se $q \geq 2$, temos

$$\left(\sum_{k_i=1}^{n} \left\| x_{k_i}^{(i)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(n^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{q}{p}} \left\| (x_{k_i})_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q} = n^{\frac{q}{2p}} \left\| (x_{k_i})_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q}.$$

Logo

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult} \left(E_1, \cdots, E_m; F \right) \leq \frac{mq}{2p}.$$

Analogamente, quando $1 \leq q \leq 2$ concluímos que

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \left\| T \left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)} \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|T\| \, n^{\frac{m}{p}} \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)} \right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q}$$

e

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult} \left(E_1, \cdots, E_m; F \right) \leq \frac{m}{p}.$$

■

A noção de operadores múltiplo $(p,q)-$somantes não se aplica quando $p < q$, pois neste caso apenas o operador nulo pode ser múltiplo $(p,q)-$somante. No entanto, nesse contexto, é de particular interesse investigar o caso em que $p < q$, já que neste caso sabemos que o índice é sempre diferente de zero.

Proposição 2.1.6 *Sejam $0 < p < q < \infty$ e $E_1, \cdots, E_m, F$ espaços de Banach. Então*

$$\begin{aligned} \eta_{(p,q)}^{m-mult} \left(E_1, \cdots, E_m; F \right) &\leq \frac{m}{p} \text{ se } 0 < q \leq 2; \\ \eta_{(p,q)}^{m-mult} \left(E_1, \cdots, E_m; F \right) &\leq \frac{(qp - 2p + 2q)m}{2qp} \text{ se } q \geq 2. \end{aligned}$$

Demonstração: Note que

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \left\| T \left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)} \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|T\| \left(\sum_{k_1=1}^{n} \left\| x_{k_1}^{(1)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\sum_{k_m=1}^{n} \left\| x_{k_m}^{(m)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para todo $i = 1, \cdots, m$, da desigualdade de Hölder temos

$$\left(\sum_{k_i=1}^{n}\left\|x_{k_i}^{(i)}\right\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k_i=1}^{n}\left\|x_{k_i}^{(i)}\right\|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k_m=1}^{n}|1|^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}$$
$$\leq \left(\sum_{k_i=1}^{n}\left\|x_{k_i}^{(i)}\right\|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} n^{\frac{q-p}{qp}}.$$

Assim, para $q \geq 2$, temos

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\left\|T\left(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\overset{(2.3)}{\leq} \|T\|\left(n^{\frac{1}{2}}\left\|\left(x_{k_1}^{(1)}\right)_{k_1=1}^{n}\right\|_{w,q} n^{\frac{q-p}{qp}}\right)\cdots\left(n^{\frac{1}{2}}\left\|\left(x_{k_m}^{(m)}\right)_{k_m=1}^{n}\right\|_{w,q} n^{\frac{q-p}{qp}}\right)$$
$$= \|T\|\, n^{\frac{(qp-2p+2q)m}{2qp}}\prod_{i=1}^{m}\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q}$$

e, se $0 < q \leq 2$, obtemos

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\left\|T\left(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\overset{(2.3)}{\leq} \|T\|\left(n^{\frac{1}{q}}\left\|\left(x_{k_1}^{(1)}\right)_{k_1=1}^{n}\right\|_{w,q} n^{\frac{q-p}{qp}}\right)\cdots\left(n^{\frac{1}{q}}\left\|\left(x_{k_m}^{(m)}\right)_{k_m=1}^{n}\right\|_{w,q} n^{\frac{q-p}{qp}}\right)$$
$$= \|T\|\, n^{\frac{m}{p}}\prod_{i=1}^{m}\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q}.$$

■

Note que o $m-$índice polinomial de $(p,q)-$somabilidade pode ser estimado usando as estimativas para $m-$índice multilinear de $(p,q)-$somabilidade, nosso próximo resultado melhora essas estimativas.

Proposição 2.1.7 *Sejam E, F espaços de Banach, m um número natural, $q > 0$ e $p < \frac{q}{m}$. Então*

$$\begin{aligned} \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) &\leq \frac{1}{p} \text{ se } 0 < q \leq 2; \\ \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) &\leq \frac{1}{p} + \frac{m(q-2)}{2q} \text{ se } q \geq 2. \end{aligned}$$

Demonstração: Para qualquer $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$, pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} \|P(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|P\| \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^{mp}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|P\| \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\|x_k\|^{mp}\right)^{\frac{q}{mp}}\right)^{\frac{mp}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |1|^{\left(\frac{q}{mp}\right)^*}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{q}{mp}\right)^*}}\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|P\| \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q\right)^{\frac{m}{q}} n^{\frac{q-mp}{qp}}. \end{aligned}$$

Assim, para $0 < q \leq 2$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} \|P(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|P\| \, n^{\frac{m}{q}} n^{\frac{q-mp}{qp}} \, \|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q}^m \\ &= \|P\| \, n^{\frac{1}{p}} \, \|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q}^m, \end{aligned}$$

e

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) \leq \frac{1}{p}.$$

Para $q \geq 2$ obtemos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} \|P(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|P\| \, n^{\frac{m}{2}} n^{\frac{q-mp}{qp}} \, \|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q}^m \\ &= \|P\| \, n^{\frac{mpq+2q-2pm}{2pq}} \, \|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q}^m \end{aligned}$$

e portanto

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) \leq \frac{1}{p} + \frac{m(q-2)}{2q}.$$

■

2.2 Operadores Lineares $(p,q) - s - somantes$

Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e E, F espaços de Banach. Considere os operadores lineares contínuos $u : E \longrightarrow F$ que satisfazem, para cada $n \in \mathbb{N}$, e para quaisquer $x_1, \cdots, x_n \in E$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq Cn^s \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.6}$$

onde $s \geq 0$ é fixo e C constante.

Denotaremos por $\Pi_{p,q}^s(E;F)$ o conjunto formado por tais operadores.

Veja que $\Pi_{p,q}^s(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$. De fato, sejam $u, v \in \Pi_{p,q}^s$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 n^s \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

e

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|v(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 n^s \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Agora, pela desigualdade triangular e pela desigualdade de Minkowski,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n}\|(u+\lambda v)(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n}(\|u(x_k)\|+\|\lambda v(x_k)\|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |\lambda|\left(\sum_{k=1}^{n}\|v(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (C_1+|\lambda|C_2)n^s \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Logo $u+\lambda v \in \Pi_{p,q}^s(E;F)$.

Observe que, se $u \in \Pi_{p,q}^0(E;F)$, então

$$
\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}
$$

assim u será um operador absolutamente $(p,q)-$somante, e mais, desde que $n^s \geq 1$, para todo $s \geq 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$
\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq Cn^s \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}
$$

e portanto $u \in \Pi_{p,q}^s(E;F)$, para todo s.

Proposição 2.2.1 *O ínfimo dos C que verificam a desigualdade (2.6), define uma norma em $\Pi_{p,q}^s(E;F)$, que denotaremos por $\pi_{p,q}^s(u)$. E ainda $\|u\| \leq \pi_{p,q}^s(u) \leq \pi_{p,q}(u)$.*

Demonstração: Primeiramente, note que

$$
\pi_{p,q}^s(u) \geq 0, \text{ para todo } u \in \Pi_{p,q}^s(E;F).
$$

Além disso, para $n=1$, se $\pi_{p,q}^s(u)=0$, então $\|u(x)\|=0$, para todo $x \in E$. Assim, $u=0$, e

$$
\pi_{p,q}^s(u) = 0 \text{ se, e somente se, } u = 0.
$$

Agora, para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|\lambda u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq |\lambda| \pi_{p,q}^s(u) n^s \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

como $\pi_{p,q}^s(\lambda u)$ é o ínfimo que satisfaz a desigualdade temos

$$\pi_{p,q}^s(\lambda u) \leq |\lambda| \pi_{p,q}^s(u). \tag{2.7}$$

Por outro lado,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|\lambda u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}^s(\lambda u) n^s \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}^s(\lambda u) n^s \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\pi_{p,q}^s(\lambda u)}{|\lambda|} n^s \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow \pi_{p,q}^s(u) \leq \frac{\pi_{p,q}^s(\lambda u)}{|\lambda|},$$

assim

$$|\lambda| \pi_{p,q}^s(u) \leq \pi_{p,q}^s(\lambda u). \tag{2.8}$$

Então, de (2.7) e (2.8) temos

$$\pi_{p,q}^s(\lambda u) = |\lambda| \pi_{p,q}^s(u).$$

Novamente, sejam $u, v \in \Pi_{p,q}^s(E; F)$ então

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}^s(u) n^s \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|v(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}^s(v)n^s \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

Logo, usando desigualdade triangular e Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|(u+v)(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(\|u(x_k)\|)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}(\|v(x_k)\|)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq (\pi_{p,q}^s(u)+\pi_{p,q}^s(v))n^s \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

assim

$$\pi_{p,q}^s(u+v) \leq \pi_{p,q}^s(u)+\pi_{p,q}^s(v).$$

Portanto $\pi_{p,q}^s(\cdot)$ é uma norma para $\Pi_{p,q}^s(E;F)$. Por último para mostrar a desigualdade das normas é suficiente tomar $n=1$ e um $x\in E$ qualquer. Daí, usando o corolário do Teorema de Hahn-Banach

$$\|u(x)\| \leq \pi_{p,q}^s(u)\|x\|.$$

Como

$$\|u\| = \inf\{c\,;\ \|u(x)\|\leq c\|x\|\},$$

$$\|u\| \leq \pi_{p,q}^s(u).$$

A última desigualdade decorre da observação anterior.

■

Denotaremos de por $\Pi_{p,q}^s$ a subclasse de todos os operadores lineares entre espaços de Banach que são absolutamente $(p,q)-s-$somantes.

Teorema 2.2.2 *Se $1\leq q\leq p<\infty$, então $\left(\Pi_{p,q}^s,\pi_{p,q}^s\right)$ é um ideal normado de operadores lineares.*

Demonstração: Sejam E,F espaços de Banach. Já mostramos que $\Pi_{p,q}^s(E;F)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(E;F)$. Além disso, sabemos que $\Pi_{p,q}^0(E;F)\subseteq\Pi_{p,q}^s(E;F)$ e de [9, Teorema 3.1.6] $\Pi_{p,q}^{s}$ contém os operadores de posto finito. Agora sejam $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $v \in \Pi_{p,q}^{s}(F;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$, para $x_1, \cdots, x_k \in E$ temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|t \circ v \circ u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|t\|^p \|(v \circ u)(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|t\| \left(\sum_{k=1}^{n} \|(v \circ u)(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|t\| \pi_{p,q}^{s}(v) n^s \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(u(x_k))|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \|t\| \pi_{p,q}^{s}(v) n^s \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\|u\|^q |\varphi(u(x_k))|^q}{\|u\|^q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Como $\|\varphi u\| \leq \|\varphi\| \|u\| \leq \|u\|$, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|t \circ v \circ u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|t\| \pi_{p,q}^{s}(v) \|u\| n^s \sup_{\psi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\psi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Logo,

$$t \circ v \circ u \in \Pi_{p,q}^{s}(E,H)$$

e mais

$$\pi_{p,q}^{s}(t \circ v \circ u) \leq \|t\| \pi_{p,q}^{s}(v) \|u\|.$$

Resta calcular a norma da identidade. Já sabemos que $1 = \|id\| \leq \pi_{p,q}^{s}(id)$. Sejam $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$. Então

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|id(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|id(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq n^s \sup_{\varphi \in B_{\mathbb{K}'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Assim $\pi_{p,q}^{s}(id) = 1$. ■

Proposição 2.2.3 *Se $1 \leq q \leq p < \infty$, então $\left(\Pi_{p,q}^{s}, \pi_{p,q}^{s}\right)$ é um ideal de Banach. Mais ainda, é um ideal injetivo.*

Demonstração: Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\left(\Pi_{p,q}^{s}(E;F), \pi_{p,q}^{s}(\cdot)\right)$. Como

$\|\cdot\| \leq \pi^s_{p,q}(\cdot)$, temos $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(E;F)$ que é Banach, logo $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para um $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Vamos mostrar que $u \in \Pi^s_{p,q}(E;F)$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m_1, m_2 \geq m_0$,

$$\pi^s_{p,q}(u_{m_1} - u_{m_2}) \leq \epsilon.$$

Logo

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u_{m_1}(x_k) - u_{m_2}(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon n^s \|\, (x_k)_{k=1}^{n} \,\|_{w,q}.$$

Fazendo $m_2 \to \infty$, como o segundo lado da desigualdade não depende de m_2, temos

$$\lim_{m_2 \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \|u_{m_1}(x_k) - u_{m_2}(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon n^s \|\, (x_k)_{k=1}^{n} \,\|_{w,q}.$$

Daí

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u_{m_1}(x_k) - u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon n^s \|\, (x_k)_{k=1}^{n} \,\|_{w,q}.$$

Assim $u_1 - u \in \Pi^s_{p,q}(E;F)$ e como $\Pi^s_{p,q}(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$, u é $(p,q)-s-$somante, e portanto $\left(\Pi^s_{p,q}, \pi^s_{p,q}\right)$ é um ideal de Banach.

Agora vamos mostrar que $\left(\Pi^s_{p,q}, \pi^s_{p,q}\right)$ é injetivo. Sejam $u \in \Pi^s_{p,q}(E;F)$ e $v \in \mathcal{L}(F;G)$ um isomorfismo isométrico sobre a imagem. Então

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \|v(u(x_k))\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi^s_{p,q}(v \circ u) n^s \|\, (x_k)_{k=1}^{n} \,\|_{w,q}$$

e

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|v(u(x_k))\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi^s_{p,q}(u) n^s \|\, (x_k)_{k=1}^{n} \,\|_{w,q}.$$

Daí segue que $\pi^s_{p,q}(u) \leq \pi^s_{p,q}(v \circ u) \leq \pi^s_{p,q}(u)$. ∎

Teorema 2.2.4 (Teorema da Inclusão) *Suponha que* $1 \leq q_j \leq p_j < \infty$ $(j = 1, 2)$

satisfazem

$$q_1 \leq q_2, \; p_1 \leq p_2 \; e \; \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{q_2} - \frac{1}{p^2}. \tag{2.9}$$

Então

$$\Pi^s_{p_1,q_1}(E;F) \subset \Pi^s_{p_2,q_2}(E;F)$$

para quaisquer espaços de Banach E e F. Mais ainda, para $u \in \Pi^s_{p_1,p_2}(E;F)$ temos

$$\pi^s_{p_2,q_2}(u) \leq \pi^s_{p_1,q_1}(u).$$

Demonstração: Note que, se $q_1 = q_2 = q$, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \pi^s_{p_1,q}(u) n^s \| \left(x_k\right)_{k=1}^{n} \|_{w,q}.$$

Assim podemos supor que $q_1 < q_2$, neste caso temos também que $p_1 < p_2$ por 2.9, defina

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \text{ e } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}.$$

Sejam $u \in \Pi^s_{p_1,q_1}(E;F)$ e $x_1, \cdots, x_n \in E$. Então, para cada $k = 1, \cdots, n$, defina $\lambda_k = \|u(x_k)\|^{\frac{p_2}{p}}$, daí

$$\|u(\lambda_k x_k)\|^{p_1} = \|u(\|u(x_k)\|^{\frac{p_2}{p}} x_k)\|^{p_1} = \left(\|u(x_k)\| \|u(x_k)\|^{\frac{p_2}{p}}\right)^{p_1} = \|u(x_k)\|^{p_2}.$$

Como u é $(p_1, q_1) - s-$somante, então

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(\lambda_k x_k)\|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \pi^s_{p_1,q_1}(u) n^s \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{q_1} |\varphi(x_k)|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder para os conjugados $\frac{q}{q_1}$ e $\frac{q_2}{q_1}$ temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \pi^s_{p_1,q_1}(u)n^s\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}\\ &= \pi^s_{p_1,q_1}(u)n^s\|(\lambda_k)_{k=1}^n\|_q\|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q_2}\\ &\leq \pi^s_{p_1,q_1}(u)n^s\|(\lambda_k)_{k=1}^n\|_p\|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q_2}\\ &= \pi^s_{p_1,q_1}(u)n^s\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q_2}\\ &= \pi^s_{p_1,q_1}(u)n^s\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p}}\|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q_2}.\end{aligned}$$

Segue que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \pi^s_{p_1,q_1}(u)n^s\|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q_2}.$$

Logo $u\in\Pi^s_{p_2,q_2}(E;F)$ e $\pi^s_{p_2,q_2}(u)\leq\pi^s_{p_1,q_1}(u)$.

■

Proposição 2.2.5 *Sejam $0<q,p<\infty$. Então, existe um $0\leq s<\infty$, tal que*

$$\mathcal{L}(E;F)=\Pi^s_{p,q}(E;F).$$

Demonstração: Segue imediatamente da Proposição 2.1.5 e da Proposição 2.1.6. ■

2.3 Teoria Multilinear

Passando agora ao contexto multilinear temos a seguinte definição:

Definição 2.3.1 *Sejam $0<p,q_1,\cdots,q_m<\infty$, $s\geq 0$ e $E_1,\cdots,E_m,F$ espaços de Banach. Uma aplicação $T\in\mathcal{L}(E_1,\cdots,E_m;F)$ é múltiplo $(p,q_1,\cdots,q_m)-s-$somante se existe um*

$C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|T(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq Cn^s \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)} \right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q_i} \tag{2.10}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, *todo* $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$, *com* $i = 1,\cdots,m$.

Denotaremos por $\Pi_{p,q_1,\cdots q_m}^{mult-s}(E_1,\cdots,E_m;F)$ o conjunto formado por tais operadores. Se $q_1 = \cdots = q_m = q$ ou $p = q_1 = \cdots = q_m$ escrevemos $\Pi_{p,q}^{mult-s}(E_1,\cdots,E_m;F)$ ou $\Pi_{p}^{mult-s}(E_1,\cdots,E_m;F)$, respectivamente. E caso $E_1 = \cdots = E_m$, nossa notação será $\Pi_{p,q}^{mult-s}({}^mE;F)$.

Veja que $\Pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(E_1,\cdots,E_m;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1,\cdots,E_m;F)$. De fato, sejam $u,v \in \Pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|u(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1n^s \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)} \right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q_i}$$

e

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|v(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_2n^s \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)} \right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q_i}.$$

Agora, pela desigualdade triangular e a desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|(u+\lambda v)(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\leq \left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} (\|u(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\| + \|\lambda v(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\leq \left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|u(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + |\lambda| \left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|v(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\leq (C_1 + |\lambda|C_2)n^s \prod_{i=1}^{m} \| \left(x_{k_i}^{(i)} \right)_{k_i=1}^{n} \|_{w,q_i}.
\end{aligned}$$

Logo $u + \lambda v \in \Pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(E_1, \cdots, E_m; F)$.

Observe que, se $u \in \Pi^{mult-0}_{p,q_1,\cdots,q_m}(E_1, \cdots, E_m; F)$, então

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|u(x^{(1)}_{k_1}, \cdots, x^{(m)}_{k_m})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x^{(i)}_{k_i} \right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q_i}$$

assim u será um operador múltiplo $(p, q_1, \cdots, q_m)-$somante, e mais, desde que $n^s \geq 1,$ para todo $s \geq 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|u(x^{(1)}_{k_1}, \cdots, x^{(m)}_{k_m})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq Cn^s \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x^{(i)}_{k_i} \right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q_i}$$

portanto $u \in \Pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(E_1, \cdots, E_m; F),$ para todo s. Assim $\Pi^{mult}_{p,q_1,\cdots,q_m}(E_1, \cdots, E_m; F) \subseteq \Pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(E_1, \cdots, E_m; F)$ para todo $s \geq 0$.

Proposição 2.3.2 *O ínfimo dos C que verificam a desigualdade (2.10), define uma norma em $\Pi^{s}_{p,q_1,\cdots q_m}(E_1, \cdots, E_m; F)$, que denotaremos por $\pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(u)$. E ainda $\|u\| \leq \pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(u) \leq \pi^{mult}_{p,q_1,\cdots,q_m}(u)$.*

Demonstração: Primeiramente, note que $\pi^{s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(u) \geq 0,$ para todo

$$u \in \Pi^{s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(E_1, \cdots, E_m; F).$$

Além disso, se $\pi^{s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(u) = 0$, tomando $n = 1$, temos, para todos $(x_1, \cdots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, $\|u(x_1, \cdots, x_m)\| = 0$, assim $u = 0$, logo $\pi^{s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

Agora, para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\|\lambda u(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\|u(x_{k_1}^{(1)},\cdots,\lambda x_{k_m}^{(m)})\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(u)n^s\left(\prod_{i=1}^{m-1}\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q_i}\right)\left\|\left(\lambda x_{k_m}^{(i)}\right)_{k_m=1}^{n}\right\|_{w,q_m}\\ &\leq \pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(u)|\lambda|n^s\prod_{i=1}^{m}\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q_i}\end{aligned}$$

Uma vez que $\pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(\lambda u)$ é o ínfimo temos

$$\pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(\lambda u) \leq |\lambda|\pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(u). \tag{2.11}$$

Por outro lado, de

$$\begin{aligned}|\lambda|\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\|u(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\|\lambda u(x_{k_m}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(\lambda u)n^s\prod_{i=1}^{m}\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q_i}\end{aligned}$$

temos

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\|u(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(\lambda u)}{|\lambda|}n^s\prod_{i=1}^{m}\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q_i}$$

e assim

$$\pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(u) \leq \frac{\pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(\lambda u)}{|\lambda|}$$

$$|\lambda|\pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(u) \leq \pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(\lambda u) \tag{2.12}$$

De (2.11) e (2.12) temos

$$\pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(\lambda u) = |\lambda|\pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(u).$$

Sejam $u, v \in \Pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(E_1, \cdots, E_m; F)$, então

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|u(x^{(1)}_{k_1}, \cdots, x^{(m)}_{k_m})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 n^s \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x^{(i)}_{k_i} \right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q_i}$$

e

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|v(x^{(1)}_{k_1}, \cdots, x^{(m)}_{k_m})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 n^s \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x^{(i)}_{k_i} \right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q_i}.$$

Assim, pela desigualdade triangular e por Minkowski

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|(u+v)(x^{(1)}_{k_1}, \cdots, x^{(m)}_{k_m})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} (\|u(x^{(1)}_{k_1}, \cdots, x^{(m)}_{k_m})\| + \|v(x^{(1)}_{k_1}, \cdots, x^{(m)}_{k_m})\|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|u(x^{(1)}_{k_1}, \cdots, x^{(m)}_{k_m})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|v(x^{(1)}_{k_1}, \cdots, x^{(m)}_{k_m})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(u) + \pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(v)) n^{mult-s} \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x^{(i)}_{k_i} \right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q_i}.
\end{aligned}$$

Daí

$$\pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(u+v) \leq \pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(u) + \pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(v).$$

E portanto $\pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(\cdot)$ é uma norma para $\Pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(E_1, \cdots, E_m; F)$.

Por último, dada $u \in \Pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(E_1, \cdots, E_m; F)$, tome $n = 1$, então, para quaisquer $(x_1, \cdots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ temos

$$\|u(x_1, \cdots, x_m)\| \leq \pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(u) \prod_{i=1}^{m} \|x_i\|_{w,q_i}.$$

Por outro lado, para cada $i = \{1, \cdots, m\}$, por Hahn-Banach,

$$\sup_{\varphi \in B_{E_i'}} |\varphi(x_i)| = \|x_i\|_{E_i}$$

então

$$\|u(x_1, \cdots, x_m)\| \leq \pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(u) \prod_{i=1}^{m} \|x_i\|_{E_i}.$$

E, desde que,

$$\|u\| = \inf\{C : \|u(x_1, \cdots, x_m) \leq C\|x_1\| \cdot \cdots \cdot \|x_m\|\}$$

temos

$$\|u\| \leq \pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(u). \tag{2.13}$$

A última desigualdade segue imediatamente da observação anterior.

■

Proposição 2.3.3 *Se $0 < q_i, p < \infty$, para todo $i = 1, \cdots, m$, então $\left(\Pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}, \pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}\right)$ é um ideal de Banach.*

Demonstração: Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em

$$\left(\Pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(E_1, \cdots, E_m; F), \pi^{s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(\cdot)\right).$$

Como $\|\cdot\| \leq \pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(\cdot)$, temos $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$ que é Banach, logo $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para um $u \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$. Vamos mostrar que $u \in \Pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(E_1, \cdots, E_m; F)$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m_1, m_2 \geq m_0$,

$$\pi^{mult-s}_{p,q_1,\cdots,q_m}(u_{m_1} - u_{m_2}) \leq \epsilon.$$

Logo

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\|u_{m_1}(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})-u_{m_2}(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq \epsilon n^s\prod_{i=1}^{m}\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\|_{w,q_i}.$$

Fazendo $m_2\to\infty$, já que segundo lado da desigualdade não depende de m_2, temos

$$\lim_{m_2\to\infty}\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\|u_{m_1}(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})-u_{m_2}(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq \epsilon n^s\prod_{i=1}^{m}\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\|_{w,q_i}.$$

Daí

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\|u_{m_1}(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})-u(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)})\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq \epsilon n^s\prod_{i=1}^{m}\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\|_{w,q_i}.$$

Assim $u_1-u\in\Pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(E_1,\cdots,E_m;F)$ e como $\Pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}(E_1,\cdots,E_m;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1,\cdots,E_m;F)$, u é múltiplo $(p,q_1,\cdots,q_m)-s-$somante, e portanto $\left(\Pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s},\pi_{p,q_1,\cdots,q_m}^{mult-s}\right)$ é um espaço de Banach.

■

Proposição 2.3.4 *Sejam* $0<q,p<\infty$. *Então existe* $0\leq s<\infty$, *tal que*

$$\mathcal{L}(E_1,\cdots,E_m;\mathbb{K})=\Pi_{p,q}^{mult-s}(E_1,\cdots,E_m;\mathbb{K}).$$

Demonstração: Segue das Proposições 2.1.5 e 2.1.6. ■

2.4 Lineabilidade

Vamos agora apresentar um pequeno resultado dentro da Teoria de Lineabilidade. Esta teoria tem início em 1967 com o trabalho de Gurariy, Subspaces and bases in spaces of continuous functions, veja [27]. Desde então a busca de estruturas lineares dentro de certos subconjutos de espaços vetoriais, tem ganhado espaço na pesquisa. (Para referências sobre o assunto, veja [6] e suas referências.)

Iniciamos a investigação do seguinte problema:

$$\text{O conjunto } \mathcal{L}\left(E_1, \cdots, E_m; F\right) \backslash \Pi_{(p,q)}^{mult}\left(E_1, \cdots, E_m; F\right) \text{ é lineável?}$$

Esse problema foi abordado no caso linear em [14], onde os autores obtêm algumas soluções parciais para a questão. Vamos estudar uma questão ligeiramente diferente, mas útil a essa solução, uma vez que é mais forte.

$$\text{O conjunto } \Pi_{(p,q)}^{mult-s}\left(E_1, \cdots, E_m; F\right) \backslash \Pi_{(p,q)}^{mult}\left(E_1, \cdots, E_m; F\right) \text{ é lineável?}$$

A proposição seguinte, cuja demonstração seguiu as linhas de [39] lança uma primeira luz sobre a resposta.

Antes de começarmos vamos relembrar alguns conceitos.

Definição 2.4.1 *Seja X um espaço vetorial topológico, M um subconjunto de X e μ um número cardinal. Dizemos que M é $\mu-$lineável se $M \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão μ.*

Chamamos de cardinalidade do contínuo a cardinalidade do conjunto $\mathbb{R}$ e denotamos por $\mathfrak{c}$.

Proposição 2.4.2 *Sejam $E_1, \cdots, E_m$ espaços de Banach, $s > 0$ e $p, q \in [1, +\infty]$. Então*

$$\Pi_{(p,q)}^{mult-s}\left(E_1, \cdots, E_m; \ell_\infty\right) \backslash \Pi_{(p,q)}^{mult}\left(E_1, \cdots, E_m; \ell_\infty\right)$$

é vazio ou $\mathfrak{c}-$lineável.

Demonstração: Veja que se $\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1, \cdots, E_m; \ell_\infty\right) = 0$ então

$$\Pi_{(p,q)}^{mult-s}\left(E_1, \cdots, E_m; \ell_\infty\right) \backslash \Pi_{(p,q)}^{mult}\left(E_1, \cdots, E_m; \ell_\infty\right) = \emptyset.$$

Caso contrário, seja $T \in \Pi_{(p,q)}^{mult-s}(E_1, \cdots, E_m; \ell_\infty) \backslash \Pi_{(p,q)}^{mult}(E_1, \cdots, E_m; \ell_\infty)$, veja que $T \notin \Pi_{(p,q)}^{mult}(E_1, \cdots, E_m; \ell_\infty)$, significa que existem $\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E_i)$, com $i = 1, \cdots, m$, tais que

$$\left(T\left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)}\right)\right)_{k_1, \cdots, k_m=1}^{\infty} \notin \ell_p(\mathbb{N}^m; \ell_\infty),$$

isto é,

$$\sum_{k_1, \cdots, k_m=1}^{\infty} \left\|T\left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p = \infty. \tag{2.14}$$

Vamos escrever $\mathbb{N}$ como uma união enumerável de conjuntos disjuntos enumeráveis, ou seja, $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, onde, para inteiro positivo k, temos $A_k = \left\{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \cdots\right\}$. Defina $\ell_\infty^{(k)} := \{x \in \ell_\infty : x_j = 0, \text{ se } j \notin A_k\}$. Para cada inteiro positivo defina

$$T_k : E_1 \times \cdots \times E_m \to \ell_\infty^{(k)},$$

dado por, $(T_k(z_1, \cdots, z_m))_{a_j^{(k)}} = (T(z_1, \cdots, z_m))_j$, para todo inteiro positivo j. Considere ainda a inclusão canônica $\iota_k : \ell_\infty^{(k)} \to \ell_\infty$, e seja

$$v_k = \iota_k \circ T_k : E_1 \times \cdots \times E_m \to \ell_\infty,$$

note que, para todo inteiro positivo k e para todo $z_i \in E_i,\ i = 1, \cdots, m$,

$$\|v_k(z_1, \cdots, z_m)\| = \|T_k(z_1, \cdots, z_m)\| = \|T(z_1, \cdots, z_m)\|.$$

Assim, para todo inteiro positivo k, temos

$$\sum_{k_1, \cdots, k_m=1}^{\infty} \left\|v_k\left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p = \sum_{k_1, \cdots, k_m=1}^{\infty} \left\|T\left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p = \infty.$$

Além disso,

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\|v_k(z_{k_1}^{(1)},\cdots,z_{k_m}^{(m)})\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\|T(z_{k_1}^{(1)},\cdots,z_{k_m}^{(m)})\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq Cn^s\prod_{i=1}^{m}\|\left(z_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\|_{w,q}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$, todo $z_{k_i}^{(i)}\in E_i$, com $i=1,\cdots,m$ e $k_i=1,\cdots,n$. Portanto

$$v_k\in\Pi_{(p,q)}^{mult-s}\left(E_1,\cdots,E_m;\ell_\infty\right)\backslash\Pi_{(p,q)}^{mult}\left(E_1,\cdots,E_m;\ell_\infty\right),$$

para todo inteiro positivo k. E mais, os operadores v_k tem suporte disjunto, portanto $\{v_1,v_2,\cdots\}$ são linearmente independentes. Vamos agora considerar o operador

$$S:\ell_1\to\Pi_{(p,q)}^{mult-s}\left(E_1,\cdots,E_m;\ell_\infty\right)$$

dado por $S\left((a_k)_{k=1}^{\infty}\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kv_k$. Veja que S está bem definido, de fato, dado $(a_k)_{k=1}^{\infty}\in\ell_1$

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_kv_k\left(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\left\|v_k\left(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\left\|T\left(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\left\|T\left(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\left\|T\left(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\right)cn^s\prod_{i=1}^{m}\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q}.$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ temos $S \in \Pi_{(p,q)}^{mult-s}(E_1, \cdots, E_m; \ell_\infty)$. Veja ainda que S é linear e injetivo, vamos mostrar que $S(\ell_1)$ satisfaz (2.14). Seja $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$, então

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k \left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)} \right) \right\|^p \\
&\geq \sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{\infty} \left\| a_k v_k \left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)} \right) \right\|^p \\
&= \sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{\infty} |a_k|^p \left\| v_k \left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)} \right) \right\|^p \\
&= |a_k|^p \sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{\infty} \left\| v_k \left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)} \right) \right\|^p \\
&= |a_k|^p \sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{\infty} \left\| T \left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)} \right) \right\|^p = \infty.
\end{aligned}$$

Portando $S(\ell_1)$ será o espaço vetorial que procurávamos, e assim

$$\Pi_{(p,q)}^{mult-s}(E_1, \cdots, E_m; \ell_\infty) \setminus \Pi_{(p,q)}^{mult}(E_1, \cdots, E_m; \ell_\infty)$$

será $\mathfrak{c}-$lineável. ■

Corolário 2.4.3 *Sejam $E_1, \cdots, E_m$ espaços de Banach e $p, q \in (0, +\infty]$. Então*

$$\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; \ell_\infty) \setminus \Pi_{(p,q)}^{mult}(E_1, \cdots, E_m; \ell_\infty)$$

é vazio ou $\mathfrak{c}-$lineável.

Demonstração: Tome $s = \eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \cdots, E_m; \ell_\infty)$. ■

Capítulo 3

Estimativas para o índice de somabilidade

Nosso objetivo neste capítulo é buscar estimativas melhores para o índice de somabilidade de certos espaços de Banach.

3.1 Estimativas inferiores para o índice de somabilidade polinomial

3.1.1 Ferramentas técnicas

Seguindo a linha de encontrar estimativas para a norma absolutamente somante da identidade enunciamos um resultado publicado por König, Retherford e Tomczac-Jaegermann em 1980.

Teorema 3.1.1 *[29, Corolário 2(a), p.100] Seja id_{X_n} a identidade sobre um espaço $n-$dimensional X_n. Para $q > 2$, temos*

$$(2e)^{-1}n^{\frac{1}{q}} \leq \pi_{q,2}(id_{X_n}).$$

Fixado um $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar o ínfimo que satisfaz (1.2), para qualquer conjunto de n vetores de E denotaremos por $\pi_{p,q}^{(n)}(\cdot)$ esse ínfimo, é fácil ver que o Teorema 1.1.2 continua válido para $\pi_{p,q}^{(n)}(\cdot)$. Em geral, teremos $\pi_{p,q}^{(n)}(\cdot) \leq \pi_{p,q}(\cdot)$, no entanto existem trabalhos que investigam em quais casos é possível obter uma estimativa contrária. Citaremos um resultado, devido a Szarek, que mostram que a norma $(p,q)-$somante pode ser aproximada usando apenas uma quantidade finita de vetores, esse resultado será de extrema importância no decorrer do nosso trabalho e pode ser encontrado em [51, Proposição 2].

Teorema 3.1.2 *Existe uma constante universal C tal que, sempre que $u : E \to F$ é um operador linear entre espaços de Banach de posto finito (digamos* $\operatorname{rank}(u) = n$*) e $q \geq 2$, então*

$$\pi_{q,2}(u) \leq C\pi_{q,2}^{(n)}(u).$$

Lema 3.1.3 *Seja E um espaço de Banach n-dimensional. Se $1 \leq d \leq s \leq 2$, então existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$Kn^{\frac{2d+s(d-2)}{2sd}} \leq \pi_{s,d}^{(n)}(id_E).$$

Demonstração: Usando o Teorema da Inclusão 1.1.5 temos

$$\pi^{(n)}_{\frac{2sd}{2d+s(d-2)},2}(id_E) \leq \pi_{s,d}^{(n)}(id_E)$$

e pelo Teorema 3.1.2 sabemos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{C}\pi_{\frac{2sd}{2d+s(d-2)},2}(id_E) \leq \pi^{(n)}_{\frac{2sd}{2d+s(d-2)},2}(id_E).$$

O Teorema 3.1.1 assegura a existência de uma constante $A > 0$ tal que

$$An^{\frac{1}{\frac{2sd}{2d+s(d-2)}}} \leq \pi_{\frac{2sd}{2d+s(d-2)},2}(id_E).$$

Portanto

$$Kn^{\frac{2d+s(d-2)}{2sd}} \leq \pi_{s,d}^{(n)}(id_E),$$

onde $K = \frac{A}{C}$. ■

3.1.2 Caso Vetorial

Agora vamos provar um dos nossos resultados principais. Nossos argumentos são baseados nas ideias de [17, 30]:

Teorema 3.1.4 *Sejam E, F espaços de Banach de dimensão infinta e $r := \cot(F)$.*

(a) Para $1 \leq q \leq 2$ e $0 < p \leq \frac{rq}{mr+q}$, temos

$$\frac{m}{2} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E; F).$$

(b) Para $1 \leq q \leq 2$ e $\frac{rq}{mr+q} \leq p \leq \frac{2r}{mr+2}$, temos

$$\frac{mp+2}{2p} - \frac{mr+q}{rq} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E; F).$$

(c) Para $2 \leq q < \infty$ e $0 < p \leq \frac{2r}{mr+2}$, temos

$$\frac{m}{2} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E; F).$$

(d) Para $2 \leq q < \infty$ e $\frac{2r}{mr+2} < p < r$, temos

$$\frac{r-p}{pr} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E; F).$$

Demonstração: Como F é espaço de dimensão infinita, do Teorema 1.4.1 temos

$$\cot(F) = \sup\{2 \leq s \leq \infty : F \text{ fatora finitamente a inclusão formal } \ell_s \hookrightarrow \ell_\infty\},$$

e como vimos este supremo é atingido. Então F fatora finitamente a inclusão formal $\ell_r \hookrightarrow \ell_\infty$, isto é, existem $C_1, C_2 > 0$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}$, existem $y_1, \cdots, y_n \in F$ de forma que

$$C_1 \left\| (a_j)_{j=1}^n \right\|_\infty \leq \left\| \sum_{j=1}^n a_j y_j \right\| \leq C_2 \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.1}$$

para todo $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \cdots, x_n \in E$. Consideramos $x_1^*, \ldots, x_n^* \in B_{E^*}$ tais que $x_j^*(x_j) = \|x_j\|$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ escalares tais que $\sum\limits_{j=1}^n |a_j|^{\frac{r}{p}} = 1$ e definimos

$$P_n\colon E \longrightarrow F \ , \ P_n(x) = \sum_{j=1}^n |a_j|^{\frac{1}{p}} x_j^*(x)^m y_j.$$

Então, para todo $x \in E$, por (3.1)

$$\|P_n(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^n |a_j|^{\frac{1}{p}} x_j^*(x)^m y_j \right\| \leq C_2 \left(\sum_{j=1}^n \left| |a_j|^{\frac{1}{p}} x_j^*(x)^m \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C_2 \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^{\frac{r}{p}} \right)^{\frac{1}{r}} \|x\|^m = C_2 \|x\|^m ,$$

e, portanto,

$$\|P_n\| \leq C_2. \tag{3.2}$$

Note que para $k = 1, \ldots, n$, de (3.1), temos

$$\|P_n(x_k)\| = \left\| \sum_{j=1}^n |a_j|^{\frac{1}{p}} x_j^*(x_k)^m y_j \right\| \geq C_1 \left\| \left(|a_j|^{\frac{1}{p}} x_j^*(x_k)^m \right)_{j=1}^n \right\|_\infty \geq C_1 |a_k|^{\frac{1}{p}} x_k^*(x_k)^m = C_1 |a_k|^{\frac{1}{p}} \|x_k\|^m . \tag{3.3}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^{mp}|a_j|\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\|x_j\|^{m}|a_j|^{\frac{1}{p}}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \frac{1}{C_1}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(C_1\|x_j\|^{m}|a_j|^{\frac{1}{p}}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\overset{(3.3)}{\leq} \frac{1}{C_1}\left(\sum_{j=1}^{n}\|P_n(x_j)\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Suponha que existem $t \geq 0$ e $D > 0$ tais que

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|P_n(x_j)\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq Dn^t\|P_n\|\left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}^{m},$$

assim

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^{mp}|a_j|\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{D}{C_1}\|P_n\|n^t\left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}^{m}. \tag{3.4}$$

Como esta última desigualdade acontece sempre que $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^{\frac{r}{p}} = 1$ e $p < r$, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{r}{p}\right)^*}} &= \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\|x_j\|^{mp}\right| : \sum_{j=1}^{n}|a_j|^{\frac{r}{p}} = 1\right\}\\ &\leq \sup\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_j|\,\|x_j\|^{mp} : \sum_{j=1}^{n}|a_j|^{\frac{r}{p}} = 1\right\}\\ &\overset{(3.4)}{\leq} \left(\frac{D}{C_1}\|P_n\|n^t\left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}^{m}\right)^{p}\\ &\overset{(3.2)}{\leq} \left(\frac{DC_2}{C_1}n^t\left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}^{m}\right)^{p}\end{aligned}$$

e, portanto, denotando $\frac{DC_2}{C_1} := Q$, obtemos

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{r}{p}\right)^*}}}{\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}^{mp}} \leq n^{tp} Q^p.$$

Portanto

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}\right)^{\frac{1}{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}}}{\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}. \tag{3.5}$$

Note que (3.5) é válida para qualquer $x_1, \cdots, x_n$. Logo, para qualquer subespaço n-dimensional X de E temos

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_X(x_j)\|^{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}\right)^{\frac{1}{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}}}{\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}, \tag{3.6}$$

para todo $x_1, \cdots, x_n \in X$.

(a) Como

$$0 < p \leq \frac{rq}{mr+q},$$

temos

$$mp\left(\frac{r}{p}\right)^* \leq q,$$

e

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_X(x_j)\|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}}{\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}.$$

Logo

$$\pi_q^{(n)}(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}.$$

Como $q \leq 2$, do Teorema 1.1.2 temos

$$\pi_2^{(n)}(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}. \tag{3.7}$$

Agora, o Teorema 3.1.2 garante que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\pi_2(id_X) \leq C\pi_2^{(n)}(id_X). \tag{3.8}$$

Usando (3.7), (3.8) e o Teorema 2.1.1 obtemos

$$\frac{1}{C} n^{\frac{1}{2}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}.$$

Logo

$$t \geq \frac{m}{2}.$$

Portanto

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) \geq \frac{m}{2}.$$

(b) Por (3.6), temos

$$\pi^{(n)}_{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*,q}(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}. \tag{3.9}$$

Como $\frac{rq}{mr+q} \leq p \leq \frac{2r}{mr+2}$ e $mp\left(\frac{r}{p}\right)^* = \frac{mpr}{r-p}$, temos $q \leq mp\left(\frac{r}{p}\right)^* \leq 2$. pelo Lema 3.1.3, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$Kn^{\frac{2q+mp\left(\frac{r}{p}\right)^*(q-2)}{2mp\left(\frac{r}{p}\right)^* q}} \leq \pi^{(n)}_{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*,q}(id_X). \tag{3.10}$$

De (3.9) e (3.10) segue que

$$Kn^{\frac{2q+mp\left(\frac{r}{p}\right)^*(q-2)}{2mp\left(\frac{r}{p}\right)^* q}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}.$$

Logo

$$\frac{t}{m} \geq \frac{mp+2}{2mp} - \frac{mr+q}{mrq}$$

e concluímos que

$$t \geq \frac{mp+2}{2p} - \frac{mr+q}{rq}.$$

Portanto

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) \geq \frac{mp+2}{2p} - \frac{mr+q}{rq}.$$

(c) Como $q \geq 2$, segue de (3.6) e da inclusão canônica dos espaços $\ell_p^w(X)$

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_X(x_j)\|^{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}\right)^{\frac{1}{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}}}{\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,2}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}},$$

para todo $x_1, \cdots, x_n \in X$. Mas $\frac{2r}{mr+2} \geq p$ implica que $mp\left(\frac{r}{p}\right)^* \leq 2$, e assim

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_X(x_j)\|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,2}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}.$$

Portanto

$$\pi_2^{(n)}(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}.$$

Do Teorema 3.1.2 segue que

$$\pi_2(id_X) \leq C\pi_2^{(n)}(id_X).$$

Pelo Teorema 2.1.1, temos

$$\frac{1}{C}n^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{C}\pi_2(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}}Q^{\frac{1}{m}},$$

e concluímos que

$$t \geq \frac{m}{2},$$

isto é,

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) \geq \frac{m}{2}.$$

(d) Como $q \geq 2$, temos

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_X(x_j)\|^{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}\right)^{\frac{1}{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}}}{\left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,2}} \leq n^{\frac{t}{m}}Q^{\frac{1}{m}},$$

para todo $x_1, \cdots, x_n \in X$. Então

$$\pi^{(n)}_{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*,2}(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}}Q^{\frac{1}{m}}.$$

Como $\frac{2r}{mr+2} < p$ temos $mp\left(\frac{r}{p}\right)^* > 2$, e pelo Teorema 3.1.2 existe uma constante c, tal que

$$\frac{1}{c}\pi_{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*,2}(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}}Q^{\frac{1}{m}}. \tag{3.11}$$

Pelo Teorema 3.1.1, existe uma constante $A > 0$ tal que

$$A \cdot n^{\frac{1}{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}} \leq \pi_{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*,2}(id_X),$$

e, portanto,

$$\frac{A}{c}n^{\frac{r-p}{mpr}} \leq n^{\frac{t}{m}}Q^{\frac{1}{m}}.$$

Finalmente, obtemos

$$t \geq \frac{r-p}{pr},$$

e

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) \geq \frac{r-p}{pr}.$$

Concluindo o teorema. ∎

Vejamos a ilustração do teorema.

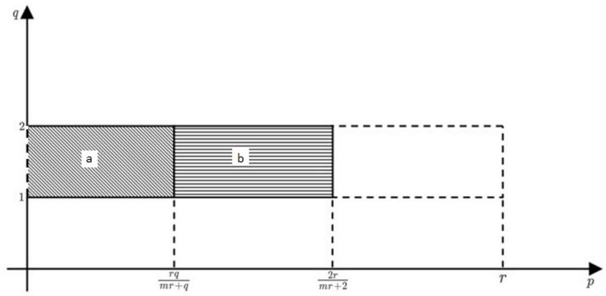

Figura 3.1: Regiões compreendidas pelos itens (a) e (b) do Teorema 3.1.4

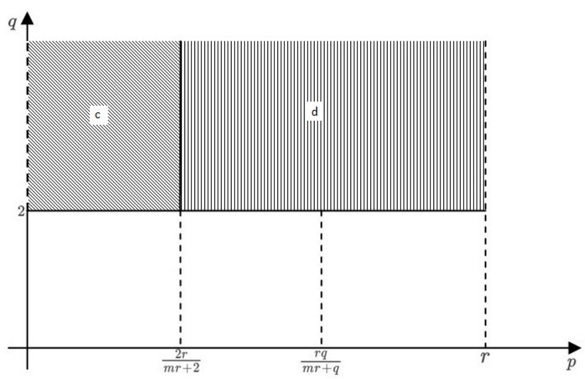

Figura 3.2: Regiões compreendidas pelos itens (c) e (d) do Teorema 3.1.4

Como, para $1 \leq q \leq 2$ temos $\frac{rq}{mr+q} \leq \frac{2r}{mr+2}$ e para $2 \leq q < \infty$ temos $\frac{2r}{mr+2} \leq \frac{rq}{mr+q}$, precisamos de ilustrações diferentes para essas regiões, mas isso não irá refletir na continuidade das estimativas, como veremos a seguir.

O teorema acima apresenta estimativas diferentes para regiões fronteiriças, o que nos leva a perguntar sobre o comportamento dessas estimativas na proximidade dessas fronteiras, como podemos ver elas apresentam um tipo de continuidade, de fato, quando $p = \frac{rq}{mr+q}$, de (a) temos

$$\frac{m}{2} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F).$$

Por outro lado, considerando $p = \frac{rq}{mr+q}$ segue de (b) que

$$\frac{mp+2}{2p} - \frac{mr+q}{rq} = \frac{m}{2} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F).$$

Agora, quando $p = \frac{2r}{mr+2}$, por (c) temos

$$\frac{m}{2} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E; F). \tag{3.12}$$

Dado $\epsilon > 0$ e tomando $p_\epsilon = \frac{2r}{mr+2} + \epsilon$ segue por (d) que

$$\frac{r - p_\epsilon}{p_\epsilon r} \leq \eta_{(p_\epsilon,q)}^{m-pol}(E; F). \tag{3.13}$$

Novamente, existe uma continuidade entre as estimativas inferiores (3.12) e (3.13), já que fazendo ϵ tender a zero, temos

$$p_\epsilon \to \frac{2r}{mr+2} \quad \text{e} \quad \frac{r - p_\epsilon}{p_\epsilon r} \to \frac{m}{2}.$$

O mesmo comportamento se verifica quando $q = 2$, neste caso $\frac{rq}{mr+q} = \frac{2r}{mr+2}$, note que aqui as estimativas de (a) e (c) coincidem.

Na próxima seção veremos algumas aplicações do resultado acima para obtenção de índices ótimos.

3.1.3 Caso Escalar

O resultado seguinte tem sua demonstração semelhante ao anterior, no entanto não podemos comparar os resultados obtidos, já que no teorema anterior F é um espaço de dimensão infinita e agora $F = \mathbb{R}$ e m é par. A prova deste resultado é inspirada por ideais que podem ser encontradas em [16].

Teorema 3.1.5 *Sejam m um inteiro positivo par e E um espaço de Banach real de dimensão infinita.*

(a) Se $1 \leq q \leq 2$ e $0 < p \leq \frac{q}{m+q}$, então

$$\frac{m}{2} \leq \eta_{(p,q)}^{m\text{-}pol}(E; \mathbb{R}).$$

(b) Se $1 \leq q \leq 2$ *e* $\frac{q}{m+q} \leq p \leq \frac{2}{m+2}$*, então*

$$\frac{mp+2}{2p} - \frac{m+q}{q} \leq \eta_{(p,q)}^{m\text{-}pol}(E;\mathbb{R}).$$

(c) Se $2 \leq q < \infty$ *e* $0 < p \leq \frac{2}{m+2}$*, então*

$$\frac{m}{2} \leq \eta_{(p,q)}^{m\text{-}pol}(E;\mathbb{R}).$$

(d) Se $2 \leq q < \infty$ *e* $\frac{2}{m+2} < p < 1$*, então*

$$\frac{1-p}{p} \leq \eta_{(p,q)}^{m\text{-}pol}(E;\mathbb{R}).$$

Demonstração: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \cdots, x_n \in E$. Considere $x_1^*, \ldots, x_n^* \in B_{E^*}$ tais que $x_j^*(x_j) = \|x_j\|$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ números reais tais que $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{1}{p}} = 1$ e definimos

$$P_n \colon E \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{1}{p}} x_j^*(x)^m, \text{ para todo } x \in E.$$

Como m é par, segue que $P_n(x) \geq 0$, para todo $x \in E$. Assim

$$|P_n(x)| = P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{1}{p}} x_j^*(x)^m \geq |a_k|^{\frac{1}{p}} x_k^*(x)^m, \text{ para todo } x \in E \text{ e } k = 1, \cdots, n,$$

e

$$|P_n(x_k)| = P_n(x_k) = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{1}{p}} x_j^*(x_k)^m \geq |a_k|^{\frac{1}{p}} x_k^*(x_k)^m = |a_k|^{\frac{1}{p}} \|x_k\|^m, \text{ para } k = 1, \cdots, n. \tag{3.14}$$

Além disso, para todo $x \in E$, temos

$$|P_n(x)| = \left| \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{1}{p}} x_j^*(x)^m \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{1}{p}} \right) \|x\|^m = \|x\|^m ,$$

e portanto

$$\|P_n\| \leq 1. \tag{3.15}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^{mp} |a_j| \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\|x_j\|^m |a_j|^{\frac{1}{p}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\overset{(3.14)}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{n} |P_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Suponha que existem $t \geq 0$ e $D > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} \|P_n(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq D \|P_n\| n^t \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{w,q}^m \\ &\overset{(3.15)}{\leq} D n^t \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{w,q}^m . \end{aligned}$$

Assim

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^{mp} |a_j| \right)^{\frac{1}{p}} \leq D n^t \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{w,q}^m \tag{3.16}$$

e como esta última desigualdade acontece sempre que $\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{1}{p}} = 1$ e $p < 1$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^{\frac{mp}{1-p}} \right)^{1-p} &= \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \|x_j\|^{mp} \right| : \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{1}{p}} = 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_j| \|x_j\|^{mp} : \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{1}{p}} = 1 \right\} \\ &\overset{(3.16)}{\leq} \left(D n^t \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{w,q}^m \right)^p. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^{\frac{mp}{1-p}}\right)^{\frac{1-p}{mp}}}{\left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}} \leq D^{\frac{1}{m}} n^{\frac{t}{m}}. \tag{3.17}$$

Veja que (3.17) é válida para quaisquer $x_1, \cdots, x_n$. Logo, para qualquer subespaço n-dimensional X de E temos

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}\|id_X(x_j)\|^{\frac{mp}{1-p}}\right)^{\frac{1-p}{mp}}}{\left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}} \leq D^{\frac{1}{m}} n^{\frac{t}{m}}, \tag{3.18}$$

para todo $x_1, \cdots, x_n \in X$.

Agora provaremos cada item separadamente.

(a) Como

$$0 < p \leq \frac{q}{m+q},$$

temos

$$\frac{mp}{1-p} \leq q$$

e portanto

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}\|id_X(x_j)\|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}}{\left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}} \leq D^{\frac{1}{m}} n^{\frac{t}{m}}.$$

Logo

$$\pi_q^{(n)}(id_X) \leq D^{\frac{1}{m}} n^{\frac{t}{m}}.$$

Como $1 \leq q \leq 2$ pelo Teorema 1.1.2 temos

$$\pi_2^{(n)}(id_X) < D^{\frac{1}{m}} n^{\frac{t}{m}}, \tag{3.19}$$

e do Teorema 3.1.2 concluímos que

$$\pi_2(id_X) \leq C\pi_2^{(n)}(id_X). \tag{3.20}$$

Pelo Teorema 2.1.1 sabemos que

$$\pi_2(id_X) = n^{\frac{1}{2}}$$

e portanto, por (3.19) e (3.20), segue que

$$\frac{1}{C} n^{\frac{1}{2}} \leq D^{\frac{1}{m}} n^{\frac{t}{m}}.$$

Assim

$$t \geq \frac{m}{2},$$

i.e.,

$$\eta_{(p,q)}^{m\text{-}pol}(E;\mathbb{R}) \geq \frac{m}{2}.$$

(b) Por (3.18), temos

$$\pi^{(n)}_{\frac{mp}{1-p},q}(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}} D^{\frac{1}{m}}. \tag{3.21}$$

Como $\frac{q}{m+q} \leq p \leq \frac{2}{m+2}$ temos $q \leq \frac{mp}{1-p} \leq 2$. De (3.21) e do Lema 3.1.3, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$Kn^{\frac{2q+\frac{mp}{1-p}(q-2)}{2\frac{mp}{1-p}q}} \leq n^{\frac{t}{m}} D^{\frac{1}{m}}.$$

Portanto

$$\frac{t}{m} \geq \frac{mp+2}{2mp} - \frac{m+q}{mq}$$

e concluímos que

$$t \geq \frac{mp+2}{2p} - \frac{m+q}{q},$$

ou seja,

$$\eta_{(p,q)}^{m\text{-}pol}(E;\mathbb{R}) \geq \frac{mp+2}{2p} - \frac{m+q}{q}.$$

(c) Como $q \geq 2$, temos

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_X(x_j)\|^{\frac{mp}{1-p}}\right)^{\frac{1-p}{mp}}}{\left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,2}} \leq D^{\frac{1}{m}} n^{\frac{t}{m}},$$

para todo $x_1, \cdots, x_n \in X$. Mas $\frac{2}{m+2} \geq p$ implica que $\frac{mp}{1-p} \leq 2$; assim

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_X(x_j)\|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,2}} \leq D^{\frac{1}{m}} n^{\frac{t}{m}},$$

e portanto

$$\pi_2^{(n)}(id_X) \leq D^{\frac{1}{m}} n^{\frac{t}{m}}.$$

Pelo Teorema 3.1.2 temos

$$\pi_2(id_X) \leq C\pi_2^{(n)}(id_X)$$

e do Teorema 2.1.1, temos

$$\frac{1}{C} n^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{C}\pi_2(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}} D^{\frac{1}{m}}.$$

Então concluímos que

$$t \geq \frac{m}{2}.$$

e

$$\eta_{(p,q)}^{m\text{-}pol}(E;\mathbb{R}) \geq \frac{m}{2}.$$

(d) Como $q \geq 2$, temos

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_X(x_j)\|^{\frac{mp}{1-p}}\right)^{\frac{1-p}{mp}}}{\left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,2}} \leq D^{\frac{1}{m}} n^{\frac{t}{m}}.$$

para todo $x_1, \cdots, x_n \in X$. Então

$$\pi^{(n)}_{\frac{mp}{1-p},2}(id_X) \leq D^{\frac{1}{m}} n^{\frac{t}{m}}.$$

Como $\frac{2}{m+2} < p$ temos $\frac{mp}{1-p} > 2$, e pelo Teorema 3.1.2 existe uma constante c, tal que

$$\frac{1}{c}\pi_{\frac{mp}{1-p},2}(id_X) \leq D^{\frac{1}{m}} n^{\frac{t}{m}}. \tag{3.22}$$

Do Teorema 3.1.1, existe uma constante $A > 0$ tal que

$$A \cdot n^{\frac{1-p}{mp}} \leq \pi_{\frac{mp}{1-p},2}(id_X),$$

e assim,

$$\frac{A}{c} n^{\frac{1-p}{mp}} \leq D^{\frac{1}{m}} n^{\frac{t}{m}}.$$

Logo, obtemos

$$t \geq \frac{1-p}{p},$$

e

$$\eta^{m-pol}_{(p,q)}(E;F) \geq \frac{1-p}{p}.$$

Concluindo a nossa demonstração. ■

Mais uma vez, vejamos a ilustração do teorema.

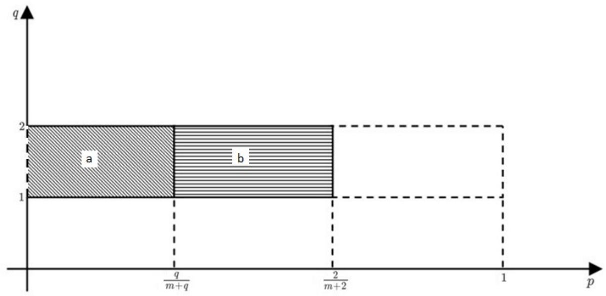

Figura 3.3: Regiões compreendidas pelos itens (a) e (b) do Teorema 3.1.5

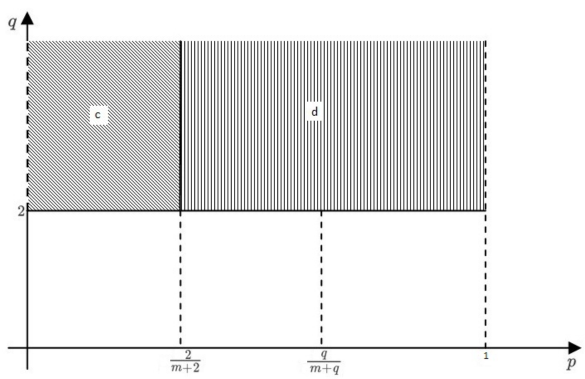

Figura 3.4: Regiões compreendidas pelos itens (c) e (d) do Teorema 3.1.5

Analogamente é possível ver o mesmo tipo de continuidade do teorema anterior.

3.2 Estimando o índice de somabilidade via resultados de coincidência

3.2.1 Índice de Somabilidade vs. Resultados de Coincidência

Sabemos que $\Pi_{p,q}^{mult}(E_1, \cdots, E_m; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$, então faz sentido tentar medir quão perto eles estão de serem iguais e isso pode ser feito via o índice de somabilidade. Quando esses espaços coincidem temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1,\cdots,E_m;F\right)=0.$$

Resultados do tipo

$$\mathcal{L}\left(E_1,\cdots,E_m;F\right)=\Pi_{p,q}^{mult}\left(E_1,\cdots,E_m;F\right)$$

são chamados resultados de coincidência e pela sua proximidade com a noção de índice de somabilidade vamos usá-los para estimar esses índices. É o que faremos nas próximas proposições.

Proposição 3.2.1 *Sejam $E_1,\cdots,E_m,F$ espaços de Banach. Suponha que*

$$\mathcal{L}\left(E_1,\cdots,E_m;F\right)=\Pi_{t,s}^{mult}\left(E_1,\cdots,E_m;F\right).$$

Então

(a) Para todo p,q satisfazendo $0<p\leq t$ e $0<s\leq q$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1,\cdots,E_m;F\right)\leq\frac{m}{p}-\frac{m}{t}+\frac{m}{s}-\frac{m}{q}.$$

(b) Para todo p,q satisfazendo $0<p\leq t$ e $0<q\leq s$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1,\cdots,E_m;F\right)\leq\frac{m}{p}-\frac{m}{t}.$$

(c) Para todo p,q satisfazendo $0<t\leq p$ e $0<s\leq q$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1,\cdots,E_m;F\right)\leq\frac{m}{s}-\frac{m}{q}.$$

(d) Para todo p,q satisfazendo $0<t\leq p$ e $0<q\leq s$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1,\cdots,E_m;F\right)=0.$$

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$.

Se $p \leq t$, então

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \left\| T(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)}) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)}\right) \right\|^t \right)^{\frac{1}{t}} \left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} |1|^{\frac{pt}{t-p}} \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{t}} \\
&\leq C \prod_{i=1}^{m} \left\| (x_{k_i}^{(i)})_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,s} (n^m)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{t}} \\
&\leq C n^{\frac{m}{p}-\frac{m}{t}} \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,s}.
\end{aligned}$$

(a) Como $s \leq q$, usando a desigualdade de Hölder para $i = 1, \cdots, m$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,s} &= \sup_{\varphi \in B_{E_i^*}} \left(\sum_{k_i=1}^{n} \left| \varphi\left(x_{k_i}^{(i)}\right) \right|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{E_i^*}} \left[\left(\sum_{k_i=1}^{n} \left| \varphi\left(x_{k_i}^{(i)}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k_i=1}^{n} |1|^{\frac{qs}{q-s}} \right)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq n^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)}\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C n^{\frac{m}{p}-\frac{m}{t}+\frac{m}{s}-\frac{m}{q}} \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q}.$$

(b) Se $p \leq t$ e $q \leq s$, usamos apenas a inclusão canônica entre espaços ℓ_q^w para obter

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, \cdots, x_{k_m}^{(m)}\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C n^{\frac{m}{p}-\frac{m}{t}} \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q}.$$

Os casos (c) e (d) são similares. ■

Podemos obter resultados semelhantes para polinômios como veremos na proposição a seguir, a qual não será demonstrada por ser totalmente análoga a anterior:

Proposição 3.2.2 *Sejam E, F espaços de Banach e*

$$\mathcal{P}\left({}^{m}E; F\right) = \mathcal{P}_{t,s}\left({}^{m}E; F\right).$$

Então

(a) Para todo p, q satisfazendo $0 < p \leq t$ e $0 < s \leq q$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}\left(E; F\right) \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{t} + \frac{m}{s} - \frac{m}{q}.$$

(b) Para todo p, q satisfazendo $0 < p \leq t$ e $0 < q \leq s$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}\left(E; F\right) \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{t}.$$

(c) Para todo p, q satisfazendo $0 < t \leq p$ e $0 < s \leq q$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}\left(E; F\right) \leq \frac{m}{s} - \frac{m}{q}.$$

(d) Para todo p, q satisfazendo $0 < t \leq p$ e $0 < q \leq s$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}\left(E; F\right) = 0.$$

Vamos agora enunciar um resultado de coincidência que pode ser encontrado essencialmente em [2, 5]. Esse resultado será posteriomente usado para obtenção de estimativas ótimas. Vamos precisar de um lema, ele pode ser encontrado em [19], [42].

Lema 3.2.3 *Sejam $1 \leq p, q_1, \cdots, q_m \leq \infty$. Suponha que, para toda aplicação $m-$linear $A : \ell_{q_1}^n \times \cdots \times \ell_{q_m}^n \to F$, com F espaço de Banach, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \|A(e_{k_1}, \ldots, e_{k_m})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \, \|A\|_{\mathcal{L}(\ell_{q_1}^n,\cdots,\ell_{q_m}^n)}.$$

Então para toda aplicação $m-$linear

$$T : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$$

com $E_1, \cdots, E_m$ espaços de Banach e para quaisquer $x_{k_i}^{(i)} \in E_i,\ k_i = 1, \cdots, n,\ i = 1, \cdots, m$ temos

$$\left(\sum_{k_1, \cdots, k_m = 1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)} \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|T\| \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)} \right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w, q_i^*}.$$

Teorema 3.2.4 *Sejam $E_1, \cdots, E_m, F$ espaços de Banach infinito-dimensionais e suponha qua F tem cotipo finito $\cot(F) = r$.*

(a) Se $s \in [1, 2)$ e $m < \frac{s}{r(s-1)}$, então

$$\mathcal{L}\left(E_1, \cdots, E_m; F\right) = \Pi_{t,s}^{mult}\left(E_1, \cdots, E_m; F\right) \Leftrightarrow t \geq \frac{sr}{s - msr + mr}.$$

(b) Se $t \in \left[\frac{2m}{m+1}, 2\right]$, então

$$\mathcal{L}\left(E_1, \cdots, E_m; \mathbb{K}\right) = \Pi_{t,s}^{mult}\left(E_1, \cdots, E_m; \mathbb{K}\right) \Leftrightarrow s \leq \frac{2mt}{mt + 2m - t}.$$

(c) Se $t \in (2, \infty)$, então

$$\mathcal{L}\left(E_1, \cdots, E_m; \mathbb{K}\right) = \Pi_{t,s}^{mult}\left(E_1, \cdots, E_m; \mathbb{K}\right) \Leftrightarrow s \leq \frac{mt}{mt + 1 - t}.$$

Demonstração: Em [2, Teorema 1.5] foi provado que se $p_1, \cdots, p_m \in [2, \infty]$, e F é espaço de dimensão infinita com cotipo finito $\cot(F) := r$, com $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} < \frac{1}{r}$, então existe uma constante $C_{p_1, \cdots, p_m} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{k_1, \cdots, k_m = 1}^{\infty} \left\| A\left(e_{k_1}^{(1)}, \cdots, e_{k_m}^{(m)} \right) \right\|^t \right)^{\frac{1}{t}} \leq C_{p_1, \cdots, p_m} \|A\| \Leftrightarrow \frac{1}{t} \leq \frac{1}{r} - \left(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \right)$$

para todo operador m-linear contínuo $A:\ X_{p_1} \times \cdots \times X_{p_m} \to F$ (veja também [19]).

Pelo Lema 3.2.3, com $p_i = s^*,$ para todo i, este resultado é traduzido para a linguagem de operadores múltiplo somantes e provamos (a).

As provas de (b) e (c) podem ser encontradas em [5, Theorem 3.2]. ■

Um corolário imediato do Teorema 3.2.4(a) e da Proposição 3.2.1 é o seguinte:

Corolário 3.2.5 *Sejam $E_1, \cdots, E_m, F$ espaços de Banach de dimensão infinita. Se F tem cotipo finito $\cot(F) = r < \infty$, $1 \leq s < 2$, $m < \frac{s}{r(s-1)}$ e $t = \frac{sr}{s-msr+mr}$, então*

(a) Para todo p, q satisfazendo $0 < p \leq t$ e $\frac{mrt}{r-t+mrt} \leq q$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1, \cdots, E_m; F\right) \leq \frac{m}{p} + m - \frac{1}{r} - \frac{m}{q} - \frac{(m-1)}{t}.$$

(b) Para todo p, q satisfazendo $0 < p \leq t$ e $0 < q \leq \frac{mrt}{r-t+mrt}$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1, \cdots, E_m; F\right) \leq \frac{m}{p} - \frac{m}{t}.$$

(c) Para todo p, q satisfazendo $0 < t \leq p$ e $\frac{mrt}{r-t+mrt} \leq q$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1, \cdots, E_m; F\right) \leq m - \frac{1}{r} + \frac{1}{t} - \frac{m}{q}.$$

(d) Para todo p, q satisfazendo $0 < t \leq p$ e $0 < q \leq \frac{mrt}{r-t+mrt}$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1, \cdots, E_m; F\right) = 0.$$

Vamos enunciar agora dois resultados de coincidência e suas consequências a partir do que foi visto acima.

Teorema 3.2.6 (Defant-Voigt) *Seja E espaços de Banach. Então*

$$\mathcal{P}\left({}^m E\right) = \mathcal{P}_{1,1}\left({}^m E\right). \tag{3.23}$$

Corolário 3.2.7 *Seja E espaço de Banach. Então:*

(a) Para $0 < p \leq 1$ e $1 \leq q$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;\mathbb{K}) \leq \frac{1}{p} - 1 + m - \frac{m}{q}.$$

(b) Para $0 < p \leq 1$ e $0 < q \leq 1$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;\mathbb{K}) \leq \frac{1}{p} - 1.$$

(c) Para $1 \leq p$ e $1 \leq q$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;\mathbb{K}) \leq m - \frac{m}{q}.$$

(d) Para $1 \leq p$ e $0 < q \leq 1$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;\mathbb{K}) = 0.$$

O próximo teorema pode ser encontrado em [12].

Teorema 3.2.8 *Sejam E, F espaços de Banach. Então:*

1. Se $cot(E) = mr$, então

$$\mathcal{P}\left({}^{m}E;F\right) = \mathcal{P}_{r,1}\left({}^{m}E;F\right). \tag{3.24}$$

2. Se $cot(F) = r$, então

$$\mathcal{P}\left({}^{m}E;F\right) = \mathcal{P}_{r,1}\left({}^{m}E;F\right). \tag{3.25}$$

Corolário 3.2.9 *Sejam E, F espaço de Banach. Se $cot(E) = mr$ ou $cot(F) = r$. Então:*

(a) Para $0 < p \leq r$ e $1 \leq q$, temos

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{r} + m - \frac{m}{q}.$$

(b) Para $0 < p \leq r$ *e* $0 < q \leq 1$, *temos*

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{r}.$$

(c) Para $r \leq p$ *e* $1 \leq q$, *temos*

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) \leq m - \frac{m}{q}.$$

(d) Para $r \leq p$ *e* $0 < q \leq 1$, *temos*

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) = 0.$$

3.2.2 Estimativas Ótimas

Começamos esta subseção relembrando uma versão generalizada da desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund:

Lema 3.2.10 *(Veja Albuquerque et al. [1, Lema 6.1]) Sejam* $m, n \geq 1$, $p \in [1, \infty]$, *e*

$$\alpha(p) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{p}, & \text{se } p \geq 2 \\ 0, & \text{Caso contrário.} \end{cases}$$

Existe uma constante universal C_m *(dependendo somente de* m*) e existe uma forma* $m-$*linear* $A : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \to \mathbb{K}$ *da forma*

$$A(z^{(1)}, \cdots, z^{(m)}) = \sum_{i_1, \cdots, i_m = 1}^{n} \pm z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)}$$

tal que

$$\|A\| \leq C_m n^{\frac{1}{2} + m \cdot \alpha(p)}.$$

Os próximos resultados trazem estimativas ótimas para alguns pares de espaços.

Proposição 3.2.11 *Sejam p, q números reais.*

(a) Se $\frac{2m}{m+1} \leq p \leq 2$ e $\frac{2mp}{mp+2m-p} \leq q \leq 2$, então

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left({}^{m}\ell_{q^*};\mathbb{K}\right) = \frac{m}{p} + \frac{m}{2} - \frac{1}{2} - \frac{m}{q}.$$

(b) Se $2 < p < \infty$ e $\frac{mp}{mp+1-p} \leq q$, então

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left({}^{m}\ell_{q^*};\mathbb{K}\right) = m - 1 + \frac{1}{p} - \frac{m}{q}.$$

(c) Se $0 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq 2$, então

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left({}^{m}\ell_{q^*};c_0\right) = \frac{m}{p}.$$

Demonstração: (a) Note que podemos obter a estimativa superior pelo Teorema 3.2.4 (b) e o primeiro item da Proposição 3.2.1. De fato, o Teorema 3.2.4 nos diz que

$$\mathcal{L}\left(E_1, \cdots, E_m;\mathbb{K}\right) = \Pi_{t,\frac{2mt}{mt+2m-t}}^{mult}\left(E_1, \cdots, E_m;\mathbb{K}\right)$$

e usando o primeiro item da Proposição 3.2.1, com $t = p$, obtemos

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1, \cdots, E_m;\mathbb{K}\right) \leq \frac{m}{p} + \frac{m}{2} - \frac{1}{2} - \frac{m}{q}.$$

Agora vamos mostrar que esta estimativa é ótima para $E_i = \ell_{q^*}$. Pelo Lema 3.2.10, temos $q^* \geq 2$ (logo $q \leq 2$) existe um operador $A : \ell_{q^*}^n \times \cdots \times \ell_{q^*}^n \to \mathbb{K}$ dado por

$$A(z^{(1)}, \cdots, z^{(m)}) = \sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n} \pm z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)}$$

tal que

$$\|A\| \leq C_m n^{\frac{1}{2}+m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q^*}\right)}.$$

Suponha que

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\|A(e_{k_1}^{(1)},\cdots,e_{k_m}^{(m)})\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq Cn^s\|A\|.$$

Então

$$n^{\frac{m}{p}}\leq Cn^s n^{\frac{1}{2}+m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q^*}\right)}$$

e como n é arbitrário,

$$\frac{m}{p}-\frac{1}{2}-\frac{m}{2}+\frac{m}{q^*}\leq s.$$

Portanto

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left({}^m\ell_{q^*};\mathbb{K}\right)\geq\frac{m}{p}-\frac{1}{2}-\frac{m}{2}+\frac{m}{q^*}=\frac{m}{p}-\frac{1}{2}+\frac{m}{2}-\frac{m}{q}$$

e isso prova (a).

(b) Usando o item (c) do Teorema 3.2.4 e o primeiro item da proposição 3.2.1, temos

$$\mathcal{L}\left(E_1,\cdots,E_m;\mathbb{K}\right)=\Pi_{t,\frac{mt}{mt+1-t}}^{mult}\left(E_1,\cdots,E_m;\mathbb{K}\right)$$

e considerando $t=p$ obtemos

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left(E_1,\cdots,E_m;\mathbb{K}\right)\leq m+\frac{1}{p}-1-\frac{m}{q}.$$

Vamos mostrar que a estimativa é atingida para $E_i=\ell_{q^*}$. Considere $S:\ell_{q^*}^n\times\cdots\times\ell_{q^*}^n\to\mathbb{K}$ dado por $S(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})=\sum_{i=1}^{n}x_i^{(1)}\cdots x_i^{(m)}$ e note que $\|S\|\leq n^{1-\frac{m}{q^*}}$. Se

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n}\|S(e_{k_1}^{(1)},\cdots,e_{k_m}^{(m)})\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq Cn^s\|S\|,$$

então

$$n^{\frac{1}{p}}\leq Cn^s n^{1-\frac{m}{q^*}}.$$

Logo

$$\frac{1}{p} - 1 + \frac{m}{q^*} \leq s$$

e

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}\left({}^m\ell_{q^*};\mathbb{K}\right) \geq \frac{1}{p} - 1 + \frac{m}{q^*} = \frac{1}{p} + m - 1 - \frac{m}{q}.$$

(c) Seja t um número real positivo tal que para cada $T \in \mathcal{L}({}^m\ell_{q^*};c_0)$ existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{k_1,\cdots,k_m=1}^{n} \left\|T\left(x_{k_1}^{(1)},\cdots,x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq Cn^t \prod_{i=1}^{m} \left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q} \tag{3.26}$$

para todo inteiro positivo n e todo $x_{k_i}^{(i)} \in \ell_{q^*}$, com $1 \leq k_i \leq n$.

Agora, Seja $T \in \mathcal{L}({}^m\ell_{q^*};c_0)$ definido por

$$T\left(x^{(1)},\cdots,x^{(m)}\right) = \left(x_{j_1}^{(1)}\cdots x_{j_m}^{(m)}\right)_{j_1,\cdots,j_m=1}^{n}.$$

é que claro $\|T\| = 1$ e

$$\left(\sum_{j_1,\cdots,j_m=1}^{n} \|T(e_{j_1},\cdots,e_{j_m})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{m}{p}}.$$

temos $\left\|(e_{j_i})_{j_i=1}^{n}\right\|_{w,q} = 1$, a condição anterior junto com (3.26) implica

$$n^{\frac{m}{p}} \leq Cn^t$$

e portanto $t \geq \frac{m}{p}$. A desigualdade reversa segue de das Proposições 2.1.5 e 2.1.6. ∎

Corolário 3.2.12 *Se* $\frac{2}{2m+1} \leq p < \frac{2}{m+1}$, *então* $\eta_{(p,1)}^{m-pol}(\ell_1;\ell_2) = \frac{1}{p} - \frac{m+1}{2}$.

Demonstração: Considerando $q = 1$ e $r = 2$ no Teorema 3.1.4 (item (b)) temos

$$\eta_{(p,1)}^{m-pol}(\ell_1;\ell_2) \geq \frac{1}{p} - \frac{m+1}{2}. \tag{3.27}$$

Vamos mostrar que (3.27) é atingida. De [10] sabemos que $\mathcal{P}(^m\ell_1;\ell_2) = \mathcal{P}_{(\frac{2}{m+1},1)}(^m\ell_1;\ell_2)$. Como $\frac{2}{2m+1} \leq p < \frac{2}{m+1}$, pelo item (a) do Teorema 3.2.2, segue o resultado. ■

Corolário 3.2.13 *Seja K um espaço de Hausdorff Compacto e F um espaço de Banach de dimensão infinita, com* $\cot(F) = r$. *Se* $\frac{2r}{r+2} < p < r$, *então*

$$\eta_{(p,2)}(C(K);F) = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}.$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.1.4 (item (d)), se $q = 2$ e $\cot(F) = r$ temos

$$\eta_{(p,2)}(C(K);F) \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{r}. \tag{3.28}$$

Além disso pelo [18, Theorem 11.14] sabemos que todo operador linear contínuo de $C(K)$ em F, com $\cot(F) = r$, é absolutamente $(r,2)$-somante. Como $\frac{2r}{r+2} < p < r$, pelo item (b) da Proposição 3.2.1 segue que

$$\eta_{(p,2)}(C(K);F) \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{r}.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino, J.B. Seoane-Sepúlveda, *Sharp generalizations of the multilinear Bohnenblust–Hille inequality*, J. Funct. Anal., **266** (2014), 3726–3740.

[2] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino, J.B. Seoane-Sepúlveda, *Optimal Hardy–Littlewood type inequalities for polynomials and multilinear operators*, Israel J. Math., **211** (2016), 197–220.

[3] R. Alencar, M.C. Matos, *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces*, Pub. Dep. An. Mat. Univ. Complut. Madrid, Section 1, Number 12, 1989.

[4] G. Araújo, D. Pellegrino, Optimal Hardy–Littlewood inequalities for m-linear forms on ℓ_p spaces with $1 \leq p \leq m$, Arch. Math. **106** (2015), 285–295.

[5] G. Araújo, D. Pellegrino, *Optimal estimates for summing multilinear operators*, Linear and Multilinear Algebra, **65** (2016), 930–942.

[6] R.M. Aron, L. Bernal-Gonzalez, D. Pellegrino, J.B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.

[7] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, PWN, 1932.

[8] L. Bernal-González, D. Pellegrino, J.B. Seoane-Sepúlveda, *Linear subsets of nonlinear sets in topological vector spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **51** (2014), no. 1, 71?130.

[9] A.T.L. Bernardino, *Ideias de Aplicações Multilineares e Polinômios entre espaços de Banach*, Dissertação, Universidade Federal da Paraíba, 2008.

[10] A.T.L. Bernardino, *On cotype and a Grothendieck-type theorem for absolutely summing multilinear operators.* Quaest. Math. **34** (2011), 513–519.

[11] F. Bombal, D. Pérez-García, I. Villanueva, *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem*, Q. J. Math. **55** (2004), 441–450.

[12] G. Botelho, *Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A, **97** (1997), 145–153.

[13] G. Botelho, H.A. Braunss, H. Junek, D. Pellegrino, *Inclusions and coincidences for multiple summing multilinear mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., **137** (2009), 991–1000.

[14] G. Botelho, D. Diniz, D. Pellegrino, *Lineability of the set of bounded linear non-absolutely summing operators*, J. Math. Anal. Appl., 357 (2009), no. 1, 171–175.

[15] G. Botelho, C. Michels, D. Pellegrino, *Complex interpolation and summability properties of multilinear operators*, Rev. Mat. Complut., **23** (2010), 139–161.

[16] G. Botelho, D. Pellegrino, P. Rueda, *Dominated bilinear forms and 2-homogeneous polynomials*, RIMS Kyoto Univ. **46** (2010) 201–208.

[17] G. Botelho, D. Pellegrino, P. Rueda, *Cotype and absolutely summing linear operators*, Math. Z., **267** (2011) 1–7.

[18] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[19] V. Dimant, P. Sevilla–Peris, Summation of coefficients of polynomials on ℓ_p spaces, Publ. Mat., **60** (2016), 289–310.

[20] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag, London, 1999.

[21] A. Dvoretzky, C.A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., **36** (1950), 192–197.

[22] D. Galicer, M. Mansilla, S. Muro, *The sup-norm vs. the norm of the coefficients: equivalence constants for homogeneous polynomials*, arXiv:1602.01735v1 [math.FA].

[23] D.J.H. Garling, *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[24] D.J.H. Garling, Y. Gordon *Relations between some constants associeted with finite dimensional Banach spaces*, Israel J. Math. **9** (1971), 346–361.

[25] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paulo. **8** (1956), 1–79.

[26] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs Acad. Math. Soc. **16**, 1956.

[27] V. I. Gurariy, *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **167** (1966), 971–973 (Russian).

[28] H. König, *Some estimates for type and cotype constants*; Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique). **28** (1979-1980), 1–13.

[29] H. König, J.R. Retherford, N. Tomczak-Jaegermann, *On the eigenvalues of $(p,2)-$summing operators and constants associated with normed spaces*, J. Funct. Anal., **37** (1980), 88–126.

[30] J. Lindenstrauss, A. Pełczynski, Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications, Studia Math, 29 (1968), 275–326.

[31] M. S. Macphail, *Absolute and unconditional convergence*, Bull. Amer. Math. Soc., **53** (1947), 121–123.

[32] M. Maia, D. Pellegrino, J. Santos, *An index of summability for pairs of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **441** (2016), 702–722.

[33] M.C. Matos, *Strictly absolutely summing multilinear mappings*, Relatório Técnico 03/92. Unicamp 1992.

[34] M.C. Matos, *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings*, Collectanea Math. **54** (2003), 111–136.

[35] R.D. Mauldin (ed.), *The Scottish Book*, Birkhäuser, 2015.

[36] B. Maurey, *Une nouvelle caractérisation des applications* $(p,q)-$*sommantes*, Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique). **12** (1973-1974), 1–16.

[37] B. Mitiagin, A. Pełczynski, *Nuclear operators and approximative dimensions*, Proceedings International Congress of Mathematics, Moscow, 1966.

[38] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, Dover Publications, 2010.

[39] D. Pellegrino, J. Santos, *Uniformly dominated sets of summing nonlinear operators*, Arch. Math. (Basel) **105** (2015), no. 1, 55?66.

[40] D. Pérez-García, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2003.

[41] D. Pérez-García, I. Villanueva, *Multiple summing operators on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl, **285** (2003), 86–96.

[42] D. Pérez-García, I. Villanueva, *Multiple summing operators on* $C(\mathcal{K})$ *spaces*, Ark. Mat., **42** (1) (2004), 153–171.

[43] A. Pietsch, *Absolut* $p-$*summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math, **27** (1967), 333–353.

[44] A. Pietsch, *Operator ideals*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1980.

[45] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, 185– 199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.

[46] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals*, Forschungsergebnisse, Friedrich Schiller Universität, Jena, 1983.

[47] D. Popa, *Reverse inclusions for multiple summing operators*, J. Math. Anal. Appl., **350** (2009), 360–368.

[48] D. Popa, *Multiple summing operators on l_p spaces*, Studia Math, **225** (2014), 9–28.

[49] P. Rueda, E.A. Sánchez-Pérez, *Factorization of $p-$dominated polynomials through L_p-spaces*, Michigan Math. J., **63** (2014), no. 2, 345–354.

[50] D.M. Serrano–Rodríguez, *Sobre as extensões multilineares dos operadores absolutamente somantes*, Tese, Universidade Federal da Paraíba, 2014.

[51] S.J. Szarek, *Computing summing norms and type constants on few vectors*, Studia Math. 98 (1991), 148–156.

[52] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach-Mazur Distances and Finite Dimensional Operator Ideals*, Longman, Harlow, and Wiley, New York, 1988.