Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Sobre Operadores Integro-Diferenciais e Aplicações

por

Ronaldo César Duarte

Campina Grande - PB
Julho/2017

Sobre Operadores Integro-Diferenciais e Aplicações

por

Ronaldo César Duarte †

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Campina Grande - PB

Julho/2017

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em:

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos - UnB

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira - UFJF

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB

Prof. Dr. Pedro Eduardo Ubilla López - USACH

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG
Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Julho/2017

Resumo

Neste trabalho, estudaremos uma classe de operadores integro-diferenciais. Mostraremos alguns resultados relevantes para a teoria estudada e aplicaremos estes resultados no estudo de problemas que envolvem o operador integro-diferencial. Inicialmente, mostraremos um princípio de máximo e utilizaremos este princípio de máximo para estudar existência de solução positiva para sistemas do tipo Schrödinger-Poisson. Também mostraremos uma estimativa para soluções fracas de certas equações e utilizaremos esta estimativa para estudar uma classe de equações de Schrödinger. Apresentaremos um teorema abstrato e utilizaremos este teorema para estudar a existência de solução para problemas do tipo Berestycki-Lions e por fim, mostraremos uma desigualdade do tipo Polya-Szegö para operadores integro-diferenciais.

Palavras-chave: Operadores Integro-Diferenciais; Métodos Variacionais; Núcleos de Ordem s.

Abstract

In this work, we will study a class of integro-differential operators. We will show some relevant results for the studied theory and we will apply, these results, in the study of problems involving the integro-differential operator. Initially, we will show a maximum principle. We will use the maximun principle, to study the existence of a positive solution for Schrödinger-Poisson systems. Also, we will show an estimate for the weak solution of certain equations and we will use this estimate to study a class of equations of Schrödinger. We will present a abstract theorem and will use this theorem to study the existence of solution to Berestycki-Lions problems. Finally, we will present a Polya-Szegö type inequality for integro-differential operators.

Keywords: Integro-differential operators; Variational Methods; kernel of order s.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e aos bons espíritos por terem me inspirado nas decisões tomadas.

Agradeço aos meus pais e aos meus irmãos por me apoiarem incondicionalmente.

Agradeço a todas pessoas que de alguma forma contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Agradeço também aos professores que tive, pelos excelentes cursos ministrados que contribuíram significativamente para a realização deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador, Marco Aurélio Soares Souto, pela excelente orientação.

"Se o conhecimento pode criar problemas, não é através da ignorância que podemos solucioná-los."

Isaac Asimov

Dedicatória

Aos meus pais.

Sumário

Introdução

Motivados pelos recentes estudos feitos sobre os espaços de Sobolev fracionários e problemas variacionais que aparecem no estudo de certas equações diferenciais parciais fracionárias, investigaremos uma classe de operadores que generalizam os operadores laplacianos fracionários, os chamados operadores integro-diferenciais.

Diversos trabalhos estudam as propriedades dos espaços de Sobolev fracionários, e problemas variacionais que envolvem o operador laplaciano fracionário, $(-\Delta)^s$, dado por

$$(-\Delta)^s u(x) = C_{N,s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy$$

onde

$$C_{N,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\xi_i)}{|\xi|^{N+2s}} d\xi \right)^{-1}.$$

Por exemplo, em [11] Bisci, Radulescu e Servadei apresentam uma série de problemas variacionais que envolvem este operador. Em [24], Di Nezza, Palatucci e Valdinoci apresentam as imersões contínuas e compactas dos espaços de Sobolev fracionários. Neste mesmo trabalho, os autores investigam o problema dos domínios de extensão e alguns resultados de regularidade. Em [50] Sechi estuda, via métodos variacionais, uma classe de equações do tipo Schrödinger fracionário. Outros importantes resultados podem ser encontrados em Duarte e Souto([25]), Caffarelli e Silvestre ([13]) e no trabalho de Felmer, Quaas e Tan ([30]). A escolha da constante $C_{N,s}$ na definição de $(-\Delta)^s$ foi feita para que aconteça a igualdade

$$\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s \mathcal{F}u) = (-\Delta)^s u, \tag{1}$$

para toda função suave u, onde $\mathcal{F}$ é a transformada de Fourier de u, definida por

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi x} u(x) dx.$$

A demonstração desta igualdade pode ser encontrada em [24].

Em [48], Ros Oton explora uma nova classe de operadores, os operadores integro-diferenciais. Definimos o operador integro-diferencial, $-\mathcal{L}_K$, como

$$-\mathcal{L}_K u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y)) K(x-y) dy$$

para toda função suave u, onde K é uma função mensurável que satisfaz:

- $K(x) = K(-x)$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$;
- Existe uma constante $C > 0$ tal que $C < K(x)|x|^{N+2s}$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$;
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \min\{|x|^2, 1\} K(x) dx < \infty.$

Observe que, quando $K(x) = C_{N,s}|x|^{-N-2s}$, então o operador $-\mathcal{L}_K$ coincide com o operador laplaciano fracionário, $(-\Delta)^s$.

Vários resultados já estabelecidos para o operador laplaciano tem suas versões quando consideramos operadores integro-diferenciais. Motivados pelo trabalho feito por Alves, Souto e Soares, em [7], no qual eles mostram a existência de solução positiva para o sistema de Schrödinger-Poisson

$$\begin{aligned} -\Delta u + V(x)u + \phi u = f(u), &\quad \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2, &\quad \text{em } \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

onde $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é um potencial localmente Hölder contínuo, períodico e positivo e f é uma função contínua com crescimento subcrítico, consideramos o problema

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{K^s} u + V(x)u + \phi u = f(u), &\quad \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\mathcal{L}_{K^t} \phi = u^2, &\quad \text{em } \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{2}$$

Para obter solução positiva em [7], foi essencial que a solução fraca do problema tivesse alguma regularidade, para que se pudesse aplicar os princípios de máximo clássicos. No nosso caso, não podemos usar resultados de regularidade para soluções fracas. Por isso, provaremos um princípio de máximo que não exige regularidade para a solução do problema.

Sistemas do tipo Schrödinger-Poisson com o operador laplaciano fracionário já foram estudados, por exemplo, por Giammetta em [34]. Neste trabalho o autor considera o sistema

$$-\Delta u + \phi u = a|u|^{p-1}u, \quad \text{em } \mathbb{R},$$
$$(-\Delta)^t \phi = u^2, \quad \text{em } \mathbb{R},$$

para $p \in (1,5)$ e $t \in (0,1)$. Em [56], Zhang, Squassina e do Ó provam a existência de soluções positivas para um sistema de Schrödiger-Poisson, com $V = 0$ e considerando operadores laplacianos fracionários nas duas equações que aparecem no sistema. Em [55], Zhang estudou sistema (2), porém não considerou o sinal da solução.

O estudo de operadores não locais é importante porque eles aparecem em uma grande quantidade de aplicações e modelos. Por exemplo, mencionamos seu uso em modelos de transição de fase (veja [1], [12]), problemas de reconstrução de imagem (veja [35]), problemas de obstáculo (veja [51]) e otimização (veja [27]). Operadores integro-diferenciais aparecem naturalmente no estudo de processos estocásticos e mais precisamente em processos de Lévi (veja [48] e [13]). Em [24] existe uma lista de outras aplicações, com referências. Este estudo leva a dificuldades não locais e não lineares. Por exemplo, quando estamos no contexto de operadores integro-diferenciais, não podemos nos beneficiar da extensão s-harmônica de Caffarelli (veja [13]) ou propriedades do comutador (veja [50]), importantes ferramentas para o estudo de problemas envolvendo o operador laplaciano fracionário. A extensão s-harmônica por exemplo, transforma um problema não local em um problema local envolvendo o operador laplaciano. Em [5], usando a extensão s-harmônica de [13], Alves e Miyagaki mostraram a existência de uma estimativa $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para as soluções fracas de equações do tipo

$$(-\Delta)^s u + b(x)u = f$$

considerando hipóteses apropriadas em b e f. Nesta tese, mostraremos uma estimativa análoga para esta equação, considerando operadores integro-diferenciais em vez do operador laplaciano fracionário. Com a estimativa $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ citada acima e motivados pelo estudo feito em [6] por Alves e Souto sobre o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u), & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde V é um potencial contínuo e não negativo, podendo se anular no infinito ($\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$) e f uma função contínua com crescimento subcrítico, consideraremos um problema análogo, substituindo o operador laplaciano pelo operador $-\mathcal{L}_K$, ou seja, estudaremos o problema

$$-\mathcal{L}_K u + V(x)u = f(u), \tag{3}$$

com hipóteses apropriadas sobre V e f, que serão apresentadas abaixo. Vários autores tem estudado este problema quando o operador $-\mathcal{L}_K$ é o operador laplaciano fracionário. Como por exemplo, Ambrosio, em [8], prova a existência de solução positiva para (3) quando V é uma constante suficientemente pequena. Em [40], Lehrer, Maia e Squassina estudaram o problema quando f é assintoticamente linear e V é constante. Wan e Wang, em [52], estudaram o Problema (3) quando $V \in C^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, V é positivo e

$$\lim_{n\to\infty} V(|x|) \in (0, \infty].$$

Zhang e Zhang, em [57], estudaram (3) quando V e f são assintoticamente periódicos. Quando $V = 1$, Felmer et al. estudaram a existência, regularidade e propriedades qualitativas das soluções de energia mínima do Problema (3) (veja [30]). Xu, Wei e Dong, em [54], mostraram a existência de solução para (3) quando $V \in C^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e existe $r_0 > 0$ tal que, para todo $M > 0$,

$$\text{meas}(\{x \in B_{r_0}(y); V(x) \leq M\}) \to 0 \text{ quando } |y| \to \infty.$$

Em [50], Secchi obteve a existência de solução de energia mínima para (3) quando $V(x) \to \infty$ se $|x| \to \infty$. Alguns outros estudos interessantes, com tratamento variacional para o Problema (3) podem ser encontrados em [9], [11], [16], [17], [19], [21], [29], e [36]. Muitos deles usam ferramentas fortes que não podemos usar em nosso caso, como a extensão s-harmonica e propriedades do comutador.

No estudo de problemas variacionais, são importantes os teoremas que nos forneçam pontos críticos de funcionais definidos em espaços de Banach. Ao estudarmos o problemas variacionais do tipo

$$(-\Delta)^s u + (-\Delta)^t u = g(u) \tag{4}$$

nos deparamos com a necessidade de um teorema que forneça pontos críticos para funcionais da forma

$$I(u) = \psi_1(u) + \psi_2(u) - G(u).$$

onde ψ_1, ψ_2 e G tem uma certa homogeneidade e satisfazem propriedades que serão citadas ao longo da tese. Por isso, nesta tese, mostraremos um teorema abstrato que fornece pontos críticos para uma vasta classe de funcionais, inclusive para funcionais como os mencionados acima. Nossa principal motivação para o estudo desta teoria foi o trabalho feito por Berestycki e Lions em [10]. Neste trabalho, os autores consideraram a existência de solução para o problema

$$-\Delta u = g(u)$$

assumindo que $N \geq 3$ e as condições em g,

$$-\infty < \liminf_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s} \leq -m < 0,$$

$$\limsup_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s^{2^*-1}} \leq 0,$$

$$\text{existe } \xi > 0 \text{ tal que } G(\xi) > 0,$$

onde $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)ds$. A homogeneidade do operador $-\Delta$ e a identidade de Pohozaev associada a este problema foram importantes para os argumentos usados pelos autores. No nosso caso, perdemos esta homogeneidade e não temos até então, uma identidade de Pohozaev para soluções fracas do Problema (4), por isso, é necessário que mudemos os argumentos usados em [10]. Um resultado fundamental no estudo do Problema (4), foi a desigualdade de Polya-Szegö para funções nos espaços de sobolev fracionários, ou seja, para toda $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u^*(x) - u^*(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy$$

onde u^* é o rearranjo simétrico (ou simetrização de Schwarz) de u (veja [44]). A versão clássica da desigualdade de Polya-Szegö, apresentada por Polya e Szegö em [45], afirma que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. No melhor dos nossos conhecimentos, este resultado ainda não tinha sido provado no contexto dos operadores integro-diferenciais. Por isso, provaremos outra versão deste resultado para estes operadores, que generaliza a desigualdade provada por Park em [44].

Nosso trabalho está dividido da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentaremos as principais propriedades dos espaços onde são definidos a classe de operadores que estudaremos durante a tese. Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados, existentes na literatura, que serão fundamentais para os capítulos seguintes.

No Capítulo 2, nosso principal resultado é um princípio de máximo para supersoluções fracas do problema

$$-\mathcal{L}_K u + a(x)u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

mais precisamente, mostraremos o teorema:

Teorema 0.0.1 *Sejam $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ e $a \geq 0$ com $a \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Suponha que*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))K(x-y)\,dx\,dy + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u(x)v(x)dx \geq 0,$$

para toda $v \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ com $v \geq 0$ q.t.p. Então $u > 0$ q.t.p. $\mathbb{R}^N$ ou $u = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Ainda neste capítulo, usaremos este princípio de máximo para obter solução positiva para o sistema de Schrödinger-Poisson

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{K^s}u + V(x)u + \phi u &= f(u), \quad \text{in } \mathbb{R}^3, \\ -\mathcal{L}_{K^t}\phi &= u^2, \quad \text{in } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

onde K^s e K^t são núcleos de ordem s e t, respectivamente. Considerando as seguintes hipóteses sobre $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $V \in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$.

(A1) $V(x) \geq \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, para alguma constante $\alpha > 0$;

(A2) $V(x) = V(x+y)$, for all $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \mathbb{Z}^3$;

(A3) $f(u)u > 0$, $u \neq 0$;

(A4) $\lim_{u\to 0} f(u)/u = 0$;

(A5) Existem $p \in (4, 2^*_s)$ e $C > 0$, tais que

$$|f(u)| \leq C(|u| + |u|^{p-1}),$$

para todo $u \in \mathbb{R}$, onde $2^*_s = \frac{6}{3-2s}$ e $s \in (\frac{3}{4}, 1)$;

(A6) $\lim_{u\to+\infty} F(u)/u^4 = +\infty$, onde $F(u) = \int_0^u f(z)dz$;

(A7) A função $u \longmapsto f(u)/u^3$ é crescente em $|u| \neq 0$.

Com as palavras do referee do Jornal que nosso trabalho foi publicado (veja [25]), na literatura, para se obter positividade de soluções para problemas fracionários, a não linearidade f é usualmente exigida ser Hölder contínua ou ter uma derivada contínua para que a solução tenha alguma regularidade. No nosso caso, pedimos apenas que f seja contínua. Sem pedir qualquer regularidade, mostramos que a solução obtida é positiva. Mais precisamente, provaremos o teorema:

Teorema 0.0.2 *Suponha que* $1 > s > 3/4$, $t \in (0,1)$, *e* (A1)–(A7) *estão satisfeitas. Então* (2.6) *tem uma solução positiva.*

Ainda neste capítulo, mostraremos a existência de solução de energia mínima para o Problema (2).

No Capítulo 3, mostraremos uma estimativa $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para as soluções fracas de certas equações de Schrödinger e este é o nosso principal resultado deste capítulo. Mais precisamente, mostraremos que

Proposição 0.0.3 *Sejam* $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ *com* $q > \frac{N}{2s}$, $N > 2s$ *e* $v \in E \subset \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ *uma solução fraca de*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mathcal{L}_k v + b(x)v &= g(x,v) \quad em \quad \mathbb{R}^N \end{array} \right.$$

em $E = \{u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N); \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} b(x)u^2dx < \infty\}$, *onde* g *é uma função contínua satisfazendo*

$$|g(x,s)| \leq h(x)|s|$$

para $s \geq 0$ *e* b *é uma função positiva em* $\mathbb{R}^N$. *Então, existe uma constante* $M = M(q, ||h||_{L^q})$ *tal que*

$$||v||_\infty \leq M||v||_{2_s^*}.$$

Como uma aplicação deste resultado, estudaremos o problema

$$(P) \qquad -\mathcal{L}_K u + V(x)u = f(u), \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \ .$$

onde $-\mathcal{L}_K$ é um operador integro-diferencial com $s \in (0,1)$. Vamos supor que o potencial V é contínuo e satisfaz

- (V_1-) $\inf_{x\in\mathbb{R}^n} V(x) > 0$;

Note que (V_1) implica que

- (V_2-) $V(x) \leq V_\infty$ para alguma constante $V_\infty > 0$ e para todos $x \in B_1(0)$.

- (V_3-) Existe $R > 0$ e $\Lambda > 0$ tais que

$$V(x) \geq \Lambda$$

  para todos $|x| \geq R$.

Assumiremos também que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função satisfazendo:

- (f_1-) $|f(t)| \leq c_0|t|^{p-1}$, para alguma constante $c_0 > 0$ e $p \in (2, 2_s^*)$;

- (f_2-) Existe $\theta > 2$ tal que

$$\theta F(t) \leq tf(t)$$

  para todos $t \in \mathbb{R}$, onde

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds;$$

- (f_3-) $f(t) > 0$ para todo $t > 0$ e $f(t) = 0$ para todo $t < 0$.

Mostraremos a existência de $\Lambda^* > 0$ com a seguinte propriedade: Se $\Lambda > \Lambda^*$, então existe uma solução não negativa para o Problema (3), ou seja, provaremos o teorema:

Teorema 0.0.4 *Suponha que V satisfaz (V_1)-(V_2) e que f satisfaz (f_1)-(f_3). Se $\Lambda > \Lambda^* := k^{\frac{p}{2}} c_0 M^{p-2}(2Sd)^{\frac{p-2}{2}}$, então o problema (P) tem uma solução não negativa e não trivial.*

Destacamos que, por ser o operador integro-diferencial não local, então não poderemos usar as mesmas técnicas usadas em [5] para provar o teorema acima.

No Capítulo 4, vamos considerar X um espaço de Banach reflexivo e $\psi_1, ..., \psi_n, \phi : X \to \mathbb{R}$ funcionais contínuos, satisfazendo:

- (X_1)- Existe uma aplicação $* : [0, \infty) \times X \to X$ e $\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_\phi \in \mathbb{R}$ tais que

  (i) $\psi_i(*(t, u)) = t^{\lambda_i}\psi_i(u)$;

  (ii) $\phi_i(*(t, u)) = t^{\lambda_\phi}\phi(u)$;

  (iii) $0 < \max\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} < \lambda_\phi$;

(iv) $*(0,u) = 0$, para todo $u \in X$;

(v) Para cada $u \in X$ fixo, a aplicação $t \longmapsto *(t,u)$ é contínua.

- (X_2-) Existem subconjuntos fracamente fechados X^+ e $\tilde{X}$ de X e uma função $Q : X^+ \to \tilde{X}$ que cumpre as seguintes condições:

  (i) $\psi_i(Q(u)) \leq \psi_i(u)$ para todo $u \in X^+$;

  (ii) $\phi(Q(u)) \geq \phi(u)$ para todo $u \in X^+$;

  (iii) Se $u \in \tilde{X}$, então $u_t \in \tilde{X}$, para todo $t \geq 0$.

Acima estamos usando a notação a seguinte notação $*(t,u) = u_t$. Além das hipóteses listadas anteriormente, vamos supor que:

- (f_1-) Existe $u \in X$ tal que $\phi(u) > 0$;

- (f_2-) $\phi(0) = 0$;

- (f_3-) $\psi_i(u) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ se, e somente se $u = 0$;

- (f_4-) Exite $r > 0$ tal que se $0 < ||u|| < r$ então

$$\sum_{i=i}^{n} \lambda_i \psi_i(u) > \lambda_\phi \phi(u);$$

- (f_5-) Se $\{u_n\}$ é uma sequência satisfazendo $\phi(u_n) \geq 0$ e $J(u_n) \to 0$, então

$$||u_n|| \to 0;$$

- (f_6-) Se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\tilde{X}$ que converge fracamente para $u \in \tilde{X}$, então

$$\limsup_{n\to\infty} \phi(u_n) \leq \phi(u);$$

- (f_7-) Se $\{u_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para u em X, então

$$\psi_i(u) \leq \liminf_{p\to\infty} \psi_i(u_p)$$

.

O principal resultado deste capítulo é o teorema:

Teorema 0.0.5 *Sejam X, ϕ, ψ_1,..., ψ_n satisfazendo $(f_1) - (f_7), (X_1)$ e (X_2). Se*

$$\inf_{w\mathcal{P}} I(w) = \inf_{w\in\mathcal{P}^+} I(w)$$

então existe $u \in \mathcal{P}$ tal que $I(u) = \inf_{w\in\mathcal{P}} I(w)$, onde

$$I = \sum_{i=1}^{n} \psi_i - \phi$$

e

$$\mathcal{P} = \{u \in X \setminus \{0\}\, ; \lambda_1\psi_1(u) + ... + \lambda_n\psi_n(u) = \lambda_\phi\phi(u)\}\,.$$

Se I é localmente lipschtziano. Então u é um ponto crítico de I em X, ou seja,

$$0 \in \partial I(u)$$

Como consequência deste teorema, temos:

Corolário 0.0.6 *Sejam X, ϕ, ψ_1,..., ψ_n satisfazendo $(f_1) - (f_7), (X_1)$ e (X_2). Suponha que ϕ, ψ_1,..., $\psi_n \in C^1(X, \mathbb{R})$. Se*

$$\inf_{w\mathcal{P}} I(w) = \inf_{w\in\mathcal{P}^+} I(w),$$

então existe $u \in \mathcal{P}$ que satisfaz $I(u) = \inf_{w\in\mathcal{P}} I(w)$, onde

$$I = \sum_{i=1}^{n} \psi_i - \phi$$

e

$$\mathcal{P} = \{u \in X \setminus \{0\}\, ; \lambda_1\psi_1(u) + ... + \lambda_n\psi_n(u) = \lambda_\phi\phi(u)\}\,.$$

Além disso, u é um ponto crítico de I em X, ou seja,

$$I'(u) = 0.$$

Tomando uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

(i) $\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s} = 0$;

(ii) $\limsup_{s\to+\infty} \frac{|f(s)|}{|s|^{q-1}} < \infty$, para algum $q \in (1, 2^*_{s_m} - 1)$ onde

$$2^*_{s_m} = \frac{2N}{N - 2s_m};$$

(iii) Existe $\tau > 0$ tal que $G(\tau) > 0$, onde

$$G(z) = \int_0^z g(t)dt \quad \text{ e } \quad g(s) = f(s) - s.$$

(iv) $f(s) > 0$ para todo $s > 0$ e $f(s) = 0$ para $s \leq 0$.

provaremos, como uma aplicação do último corolário, o teorema abaixo.

Teorema 0.0.7 *Sejam $0 < s_1 \leq ... \leq s_m < 1$ e $N \geq 2s_m$. Defina $I : H^{s_m}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ por*

$$I(u) = J(u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx,$$

onde

$$J(u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{N+2s_i}} dxdy$$

Então, existe $u_0 \in \mathcal{P}$ tal que

$$I'(u_0) = 0;$$

Além disso,

$$I(u_0) = \inf_{u \in \mathcal{P}} I(u).$$

onde

$$\mathcal{P} = \left\{ u \in H^{s_m}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; \sum_{i=1}^{m} \frac{(N-2s_i)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{N+2s_i}} dxdy = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx \right\}.$$

Em outras palavras, mostraremos a existência de solução fraca para o problema

$$\sum_{i=1}^{m} (-\Delta)^{s_i} u = g(u) \text{ em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Tomando uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

(i) $\lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{s} = 0$;

(ii) $\limsup_{s \to +\infty} \frac{|f(s)|}{|s|^{q-1}} < \infty$, para algum $q \in (1, 2^* - 1)$ onde

$$2^* = \frac{2N}{N-2};$$

(iii) Existe $\tau > 0$ tal que $G(\tau) > 0$, onde

$$G(z) = \int_0^z g(t)dt \quad \text{e} \quad g(s) = f(s) - s;$$

(iv) $f(s) > 0$ para todo $s > 0$ e $f(s) = 0$ para $s \leq 0$.

provaremos o teorema abaixo.

Teorema 0.0.8 *Sejam $0 < s < 1$ e $N > 2$. Defina $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ por*

$$I(u) = J(u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx,$$

onde

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy$$

Então, existe $u_0 \in \mathcal{P}$, não nulo, tal que

$$I'(u_0) = 0;$$

Além disso,

$$I(u_0) = \inf_{u\mathcal{P}} I(u),$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \quad & \Big\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; \frac{(N-2)}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\ & + \frac{N-2s}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx \Big\}. \end{aligned}$$

Em outras palavras, mostraremos a existência de solução fraca para o problema

$$-\Delta u + (-\Delta)^s u = g(u) \text{ em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Tomando uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

(i) $\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s^{p_1}} = 0$;

(ii) $\limsup_{s\to+\infty} \frac{|f(s)|}{|s|^{q-1}} < \infty$, para algum $q \in (p_m, p_1^*)$ onde

$$p_1^* = \frac{Np_1}{N-p_1};$$

(iii) Existe $\tau > 0$ tal que $G(\tau) > 0$, onde

$$G(z) = \int_0^z g(t)dt \qquad \text{e} \qquad g(s) = f(s) - \sum_{i=1}^m |s|^{p_i-2}s;$$

(iv) $f(s) > 0$ para todo $s > 0$ e $f(s) = 0$ para $s \le 0$.

provaremos o teorema abaixo.

Teorema 0.0.9 *Sejam $1 < p_1 \le ... \le p_m$ e $N > p_m$. Defina $I : W \to \mathbb{R}$ por*

$$I(u) = J(u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx,$$

onde

$$J(u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p_i} dx.$$

e

$$W = \bigcap_{i=1}^{m} W^{1,p_i}(\mathbb{R}^N).$$

Então, existe $u_0 \in \mathcal{P}$ tal que

$$I'(u_0) = 0;$$

Além disso,

$$I(u_0) = \inf_{u\mathcal{P}} I(u),$$

onde

$$\mathcal{P} = \left\{ u \in W \setminus \{0\}; \sum_{i=1}^{m} \frac{(N - p_i)}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p_i} dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx \right\}.$$

Em outras palavras, mostraremos a existência de solução positiva para o problema

$$\sum_{i=1}^{m} -\Delta_{p_i} u = g(u) \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Escolhendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo:

(i) $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{|s|^{p_1-1}} = 0.$

(ii) $\displaystyle\limsup_{s\to +\infty} \frac{|f(s)|}{|s|^{q-1}} < \infty$ para algum $q \in (p_1, p^*)$ onde

$$p^* = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} - 1};$$

(iii) Existe $\tau > 0$ tal que $G(\tau) = \displaystyle\int_0^{\tau} g(s) ds > 0.$, onde $g(s) = f(s) - s|s|^{p_1-2}$.

(iv) $f(s) > 0$ para todo $s > 0$ e $f(s) = 0$ para $s \leq 0$.

para $p_1, ..., p_N > 1$, mostraremos o teorema:

Teorema 0.0.10 *Sejam $1 < p_1 \leq ... \leq p_N$. Defina $I : W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ por*

$$I(u) = J(u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx,$$

onde

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx.$$

Então, existe $u_0 \in \mathcal{P}$ *tal que*

$$I'(u_0) = 0.$$

Além disso,

$$I(u_0) = \inf_{u\mathcal{P}} I(u),$$

onde

$$\mathcal{P} = \left\{ u \in W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; \sum_{i=1}^{N} \frac{(N-p_i)}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx \right\}.$$

Em outras palavras, provamos a existência de solução não trivial para o problema

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = g(u) \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Vamos considerar $N \geq 3$ e f uma função com uma quantidade finita de pontos de descontinuidade satisfazendo:

- f_1) $\lim\limits_{s \to 0} \frac{f(s)}{s} = 0$;
- f_2) $|f(s)| \leq A|s| + B|s|^q, \quad \forall s \in \mathbb{R}$, e algum $q \in (1, 2^* - 1)$;
- f_3) Existe $\tau > 0$ tal que $G(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau g(z)dz > 0$, onde
$$g(s) = f(s) - s;$$
- f_4) $f(s) > 0$ para $s > 0$ e f(s)=0 para $s \leq 0$.

Mostraremos o teorema:

Teorema 0.0.11 *Seja f uma função com uma quantidade finita de pontos de descontinuidade e satisfazendo* $(f_1) - (f_4)$. *Então, o problema*

$$-\Delta u(x) \in \partial G(u(x)), \quad q.t.p. \ em \quad \mathbb{R}^N,$$

possui uma solução não trivial.

No Capítulo 5, apresentamos uma desigualdade de Polya-Szegö, no contexto dos operadores integro-diferenciais. Supondo que K é um núcleo de ordem s, contínuo, provaremos o seguinte teorema.

Teorema 0.0.12 *Seja* $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^n)$ *uma função não negativa. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} (u^*(x) - u^*(y))^2 K^*(x-y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y))^2 K(x-y)dxdy,$$

onde u^* e K^* são os rearranjamentos simétricos de u e K respectivamente. Como consequência, teremos:

Corolário 0.0.13 *Seja $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$. Então existe w não negativa e radialmente simétrica satisfazendo:*

- *Para toda função positiva e monótona, ϕ*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(w)dx.$$

- *Além disso*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(w(x)-w(y))^2K^*(x-y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))^2K(x-y)dxdy$$

Corolário 0.0.14 *Suponha que K satisfaça (K_2), (K_3), K seja radialmente simétrica e decrescente. Então para toda $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$, existe w radialmente simétrica, não negativa e tal que para toda função positiva e monótona ϕ*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(w)dx.$$

Além disso

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(w(x)-w(y))^2K(x-y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))^2K(x-y)dxdy$$

e

Corolário 0.0.15 *Suponha que K satisfaça $(K_1),(K_2),(K_3)$ e*

- *(K_4) - Existe $c_1 > 0$ tal que $c_1 \geq K(x)|x|^{n+2s}$*

Então para toda $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$, existe w radialmente simétrica, não negativa e tal que para toda função positiva e monótona ϕ

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(w)dx.$$

Além disso

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(w(x)-w(y))^2K(x-y)dxdy \leq \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))^2K(x-y)dxdy$$

onde $\lambda = \frac{c_1}{c}$ e c é a constante que aparece em (K_3).

Notação e terminologia

- $min\{a,b\} = a$ se $a < b$ e $min\{a,b\} = b$ se $a \geq b$.
- $max\{a,b\} = a$ se $a > b$ e $max\{a,b\} = b$ se $a \leq b$.
- Se $A, B \subset \mathbb{R}^N$, então $A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$.
- Para toda função $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos $u^-, u^+ : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ por $u^-(x) = \max\{0, -u(x)\}$ e $u^+(x) = \max\{0, u(x)\}$.
- Seja $U \subset \mathbb{R}^N$, chamamos de δ vizinhança de U o conjunto $U_\delta := \big\{x \in \mathbb{R}^N; d(x,U) < \delta\big\}$, onde d é a função distância usual de $\mathbb{R}^N$.
- $(X, ||\cdot||)$ representará um espaço normado.
- $D\phi$ denotará a derivada de ϕ.
- Diremos que uma função $f : (X, ||\cdot||) \longrightarrow (Y, ||\cdot||_2)$ é lipschtziana se existe uma constante $C > 0$ tal que $||f(x) - f(y)|| \leq C||x-y||_2$, para todos x, y.
- Se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, então escreveremos $||u||_p$ para denotar a norma de usual de u em $L^p(\mathbb{R}^N)$.
- Diremos que uma sequência $\{o(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é ordem pequena se, $\lim\limits_{n\to\infty} o(n) = 0$.
- Sejam X um espaço topológico e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X que converge para algum $u \in X$. Neste caso, usaremos a seguinte notação $u_n \longrightarrow u$.
- Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Diremos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{R}^N}$ é uma sequência de Palais-Smale no nível c, se $I(u_n) \longrightarrow c$ e $I'(u_n) \to 0$.

- Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Diremos que I satisfaz a condição de Palais-Smale em c, se toda sequência de Palais-Smale possui uma subsequência convergente em E.

- Para cada $r > 0$ e $y \in \mathbb{R}^N$, usaremos a notação $B_r(y) = \big\{x \in \mathbb{R}^N; |x - y| < r\big\}$. Em vez de $B_r(y)$, escreveremos simplesmente B_r, quando não existir dúvida sobre o y considerado.

- q.t.p. significará em quase todo ponto.

- Em todo texto, N representará a dimensão do espaço euclideano.

- Seja $K : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ um núcleo de ordem s (veja definição no capítulo 1). Para funções $u, v : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ e conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^N$, usaremos a seguinte notação

$$[u, v]_{A \times B} = \int_A \int_B (u(x) - u(y))(v(x) - v(y))K(x - y)dxdy$$

Também escreveremos

$$[u, v]_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} = [u, v].$$

Capítulo 1

Operadores Integro - Diferenciais

Neste capítulo, veremos as principais propriedades dos espaços onde são definidos os operadores integro-diferenciais que estudaremos ao longo da tese. Alguns resultados apresentados neste capítulo não serão demonstrados, porque já existem na nossa literatura. Referenciaremos as demonstrações de cada um dos resultados que iremos assumir neste capítulo. O leitor familiarizado com os operadores integro-diferenciais pode suprimir este capítulo em sua leitura. Para os leitores que quiserem mais detalhes, além dos mencionados neste capítulo, sobre os operadores integro-diferenciais, referenciamos [11] e [48].

1.1 O Espaço $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$

No que segue, vamos sempre assumir que $N > 2s$.

Definição 1.1.1 *Seja $s \in (0,1)$. Dizemos que uma função mensurável $K : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é um núcleo de ordem s se satisfaz as seguintes propriedades*

- (K_1) $K(x) = K(-x)$ *para quase todo* $x \neq 0$*;*
- (K_2) *Existe uma constante* $C_K > 0$ *tal que*

$$C_K \leq K(x)|x|^{N+2s}$$

  para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$*;*
- (K_3) $\gamma K \in L^1(\mathbb{R}^N)$*, onde* $\gamma(x) = \min\{|x|^2, 1\}$*;*

Note que a função $C|x|^{-N-2s}$ onde C é uma constante positiva, é um exemplo de um núcleo de ordem s. A seguir apresentaremos outros exemplos. Deixaremos a cargo do leitor a verificação de que cada um dos exemplos citados é um núcleo de ordem s.

Exemplo 1.1.2 *Considere $a : \mathbb{S}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável, onde*

$$\mathbb{S}^{N-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^N; |x| = 1\right\}.$$

Suponha também que, existam constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que $c_1 \leq a(x) \leq c_2$ e que $a(x) = a(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^{N-1}$. Então, a função

$$K(x) = \frac{a\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{N+2s}}$$

é um núcleo de ordem s.

Exemplo 1.1.3 *Sejam $K : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ um núcleo de ordem s e C uma constante positiva. Então, a função*

$$K_1(x) := \begin{cases} |x|^{-N-2s} & se \quad |x| < \frac{1}{2} \\ C & se \quad \frac{1}{2} < |x| < 1 \\ K(x) & se \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

é um núcleo de ordem s.

Seja K um núcleo de ordem s. Definimos o espaço $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ como o conjunto de todas as funções $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, tais que a função

$$(x, y) \longmapsto (u(x) - u(y))\sqrt{K(x-y)}$$

está em $L^2\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N\right)$.

Na proposição seguinte, veremos que podemos definir em $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ a norma

$$||u|| := \left([u, u] + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde

$$[u, u] = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y))^2 K(x-y) dxdy,$$

e munido com esta norma, o espaço $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ é um espaço completo.

Proposição 1.1.4 *Seja K um núcleo de ordem s. A função $(\cdot, \cdot) : \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y))K(x-y) dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} uvdx,$$

define um produto interno em $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ munido com este produto interno é um espaço de Hilbert.

Demonstração. É fácil verificar que a função $(\cdot,\cdot)$ define um produto interno em $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$. Seja $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$. Para todos $m,n\in\mathbb{N}$ temos

$$||\phi_n-\phi_m||_{L^2(\mathbb{R}^N)}\leq||\phi_n-\phi_m||.$$

Ou seja, a sequência $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, existe $u\in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\phi_n\longrightarrow u \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Seja

$$G_{\phi_n}(x,y)=(\phi_n(x)-\phi_n(y))\sqrt{K(x-y)},$$

definida em $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$. Observe que $G_{\phi_n}\in L^2(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e que

$$\begin{aligned}||G_{\phi_n}-G_{\phi_m}||^2_{L^2(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(\phi_n(x)-\phi_n(y)-\phi_m(x)+\phi_m(y))^2K(x-y)dxdy\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}[(\phi_n-\phi_m)(x)-(\phi_n-\phi_m)(y)]^2K(x-y)dxdy\\ &\leq ||\phi_n-\phi_m||^2.\end{aligned}$$

Isto implica que a sequência $\{G_{\phi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$. Existe $w\in L^2(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ tal que

$$G_{\phi_n}\longrightarrow w \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N).$$

Em particular $\{G_{\phi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge q.t.p em $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ para w. Porém, vimos acima que $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Consequentemente a sequência $\{G_{\phi_n}\}$ converge q.t.p. para a função $G_u(x,y):=(u(x)-u(y))\sqrt{K(x-y)}$. Logo

$$w(x,y)=(u(x)-u(y))\sqrt{K(x-y)}.$$

Em particular, $u\in\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$. Além disso

$$||\phi_n-u||^2=||G_{\phi_n}-G_u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)}+||\phi_n-u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\longrightarrow 0.$$

ou seja, a sequência $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u em $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$. ■

1.2 O Caso $K(x)=|x|^{-N-2s}$

Quando o núcleo de ordem s é igual $K(x)=|x|^{-N-2s}$, então o espaço $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ é chamado de espaço de Sobolev fracionário, é denotado por $H^s(\mathbb{R}^N)$. Existem diversos trabalhos publicados em nossa literatura, relacionados aos espaços de Sobolev fracionários. Para mais informações sobre os espaços de Sobolev fracionários, indicamos os trabalhos de Demengel e Demengel em [22] e Di Nezza, Palatucci e Valdinoci em [24]. Exploraremos alguns resultados conhecidos sobre os espaços $H^s(\mathbb{R}^N)$, que podem ser encontrados nas referencias listadas neste mesmo parágrafo.

Segue imediatamente de (K_2) a seguinte proposição:

Proposição 1.2.1 *Seja $s \in (0,1)$ e K um núcleo de ordem s. O espaço $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $H^s(\mathbb{R}^N)$.*

Em [24] foi provado que

Proposição 1.2.2 *O espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para $q \in [2, 2_s^*]$, onde*

$$2_s^* = \frac{2N}{N-2s}.$$

Combinando as proposições 1.2.1 e 1.2.2, temos o corolário:

Corolário 1.2.3 *O espaço $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para $q \in [2, 2_s^*]$, onde*

$$2_s^* = \frac{2N}{N-2s}.$$

O próximo corolário é uma consequência imediata da Proposição 2.2 de [24].

Corolário 1.2.4 *Seja $s \in (0,1)$. O espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $H^s(\mathbb{R}^N)$.*

Outro resultado sobre imersões dos espaços de Sobolev fracionários que será útil em nossa tese é o Corolário 4.34 de [22], descrito abaixo,

Corolário 1.2.5 *Se $s' < s$ então o espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $H^{s'}(\mathbb{R}^N)$.*

Observação 1.2.6 *Definimos também, o espaço $\dot{\mathcal{X}}_K(\mathbb{R}^N)$ como o completamento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com a norma*

$$||u||_{\dot{\mathcal{X}}_K(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y))^2 K(x-y) dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O espaço $\dot{\mathcal{X}}_K(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert, além disso, pelo Teorema 6.5 de [24] temos que $\dot{\mathcal{X}}_K(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$.

Observação 1.2.7 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e K é um núcleo de ordem s, definimos*

$$\mathcal{X}_{K_0}(\Omega) = \left\{u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N); u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\right\}.$$

O espaço $\mathcal{X}_{K_0}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma

$$||u|| := \left(\int_\Omega u^2 dx + \int_Q (u(x) - u(y))^2 K(x-y) dx dy\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $Q = (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \setminus (\Omega^c \times \Omega^c)$ e está continuamente imerso em $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Dizemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio de extensão para $H^s(\mathbb{R}^N)$, se existe uma aplicação $E : H^s(\Omega) \to H^s(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$||E(u)||_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq C||u||_{H^s(\Omega)}$$

para alguma constante $C > 0$ que não depende de u, e

$$E(u)(x) = u(x)$$

para quase todo x em Ω. Para mais detalhes sobre domínios de extensão, recomendamos [24]. Como uma consequência do Corolário 7.2 de [24] temos o corolário.

Corolário 1.2.8 *Se Ω é um domínio de extensão para $H^s(\mathbb{R}^N)$, então o espaço $H^s(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^q(\Omega)$ para $q \in [1, 2_s^*)$, onde*

$$2_s^* = \frac{2N}{N-2s}.$$

Este último corolário nos garante imersões compactas dos espaços $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{X}_{K_0}(\Omega)$ nos espaços $L^p(\Omega)$ quando $p \in [1, 2_s^*)$, quando K é um núcleo de ordem s e Ω um domínio de extensão para o espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$.

1.3 Os Operadores Integro-Diferenciais

Seja $s \in (0,1)$ e K um núcleo de ordem s. Definimos o operador integro-diferencial $-\mathcal{L}_K$, sobre funções $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, da seguinte forma

$$-\mathcal{L}_K u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x-y)(u(x) - u(y)) dy.$$

Seguindo as mesmas ideias de [24], mostraremos que o operador $-\mathcal{L}_K$ está bem definido.

Lema 1.3.1 *O operador $-\mathcal{L}_K$ está bem definido.*

Demonstração. Considere $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Seja $y \in \mathbb{R}^N$. Se $||y|| < 1$, então, usando a expansão de Taylor de segunda ordem, temos

$$|(u(x+y)+u(x-y)-2u(x))K(y)| \leq ||D^2u||_\infty |y|^2 K(y) = ||D^2u||_\infty \gamma(y)K(y).$$

Por outro lado, se $||y|| \geq 1$

$$|(u(x+y)+u(x-y)-2u(x))K(y)| \leq 4K(y)||u||_\infty = 4||u||_\infty \gamma(y)K(y).$$

Portanto, existe uma constante $L > 0$ tal que

$$|(u(x+y)+u(x-y)-2u(x))K(y)| \leq L\gamma(y)K(y).$$

Por (K_3),

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u(x+y)+u(x-y)-2u(x))K(y)dy < \infty.$$

Por mudança de variáveis e (K_1), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u(x)-u(y))K(x-y)dy = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x+y)+u(x-y)-2u(x))K(y)dy < \infty,$$

completando a demonstração do lema. ∎

Observe que fazendo $K(x) = C_{N,s}|x|^{-N-2s}$, então o operador $\mathcal{L}_K$ coincide com o operador laplaciano fracionário, $(-\Delta)^s$, onde

$$C_{N,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}} d\xi\right)^{-1}.$$

A escolha da constante $C_{N,s}$ se justifica pelo seguinte resultado, cuja demonstração se encontra em [24].

Proposição 1.3.2 *Para todo $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos*

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}(\mathcal{F}u))$$

onde $\mathcal{F}u$ é a transformada de Fourier de u, mais precisamente:

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi x} u(x)dx.$$

O espaço de Sobolev fracionário $H^s(\mathbb{R}^N)$ pode ser caracterizado como

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^{2s})|\mathcal{F}u|^2 d\xi < \infty\right\}.$$

Para mais detalhes sobre essa caracterização, recomendamos [24] e [22].

Proposição 1.3.3 *Para todos $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))K(x-y)dxdy = 2\int_{\mathbb{R}^N} -\mathcal{L}_K(u)vdx.$$

Demonstração. De fato

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))K(x-y)dxdy\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))v(x)K(x-y)dxdy\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))v(y)K(x-y)dxdy\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))v(x)K(x-y)dydx\\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(y)-u(x))v(y)K(y-x)dxdy\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} -\mathcal{L}_K u(x)v(x)dx + \int_{\mathbb{R}^N} -\mathcal{L}_K u(y)v(y)dy\\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N} -\mathcal{L}_K u(x)v(x)dx.
\end{aligned}$$

■

Esta última proposição nos motiva para a seguinte definição. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $B : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e não negativa, definimos

$$E = \left\{ u \in \dot{\mathcal{X}}_K(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} B(x)u^2dx < \infty \right\}.$$

com a norma

$$||u|| = \left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y)^2)K(x-y)dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} B(x)u^2dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dizemos que $u \in E$ é uma solução fraca de

$$-\mathcal{L}_K u + B(x)u \quad = \quad f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N$$

se

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))K(x-y) + \int_{\mathbb{R}^N} B(x)uvdx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx$$

para todo $v \in E$.

A seguir, listaremos alguns resultados que utilizaremos durante a tese. Em [33, Lemma 2.3], Gaetano, Squassina e D'avenia provaram a seguinte versão do lema de Lions,

Lema 1.3.4 *Se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H^s(\mathbb{R}^3)$ tal que para alguma constante $R > 0$ e $2 \leq q < 2_s^*$ temos*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\int_{B_R(x)}|u_n|^q \to 0$$

onde $n \to \infty$, então $u_n \to 0$ em $L^r(\mathbb{R}^3)$ para todo $r \in (2, 2_s^*)$.

A demonstração da próxima proposição segue as mesmas ideias do Lema 5.3 de [24].

Proposição 1.3.5 *Sejam K um núcleo de ordem s, $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ e ψ uma função lipschtziana satisfazendo $0 \leq \psi \leq 1$. Então, $\psi u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ e*

$$||\psi u|| \leq C||u||$$

para alguma constante $C > 0$.

Demonstração. Como $|\psi| \leq 1$ temos $||\psi u||_2 \leq ||u||$. Seja $C_1 > 0$ tal que $|\psi(x) - \psi(y)| \leq C_1|x-y|$. Somando e subtraindo $\psi(x)u(y)$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}|\psi(x)u(x)-\psi(y)u(y)|^2K(x-y)dxdy\\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}|\psi(x)(u(x)-u(y))|^2K(x-y)dxdy\\
&\quad+2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}|u(y)(\psi(x)-\psi(y))|^2K(x-y)dxdy\\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)-u(y)|^2K(x-y)dxdy\\
&\quad+2C_1^2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{|x-y|\leq 1}|u(y)|^2|x-y|^2K(x-y)dxdy\\
&\quad+8C_1^2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{|x-y|\geq 1}|u(y)|^2K(x-y)dxdy\\
&\leq 2||u||^2+2C_1^2\int_{\mathbb{R}^N}|u(y)|^2\int_{|z|\leq 1}|z|^2K(z)dzdy\\
&\quad+8C_1^2\int_{\mathbb{R}^N}|u(y)|^2\int_{|z|\geq 1}K(z)dzdy\\
&\leq 2||u||^2+8C_1^2\int_{\mathbb{R}^N}|u(y)|^2\left(\int_{|z|\geq 1}K(z)dz+\int_{|z|\leq 1}|z|^2K(z)dz\right)dy\\
&=2||u||^2+8C_1^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(y)|^2dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N}\gamma(z)K(z)dz\right)
\end{aligned}$$

onde $\gamma(z) = \min\{1, |z|^2\}$. Por (K_3)

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}|\psi(x)u(x)-\psi(y)u(y)|^2K(x-y)dxdy \leq 2||u||^2+8C_1^2||\gamma K||_1||u||_2^2.$$

Logo $\psi u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ e

$$||\psi u|| \leq (3 + 8C_1^2||\gamma K||_1)^{\frac{1}{2}}||u||.$$

$\blacksquare$

[25].

Capítulo 2

Um Princípio de Máximo para Equações de Schrödinger com Operadores Integro-Diferenciais e uma Aplicação em um Sistema do Tipo Schrödinger-Poisson

Neste capítulo estudaremos uma classe de sistemas do tipo Schrödinger-Poisson com potencial periódico e envolvendo operadores integro-diferenciais. Provaremos um princípio de máximo e como aplicação, mostraremos a existência de soluções positivas para esta classe de problemas. Destacamos que, no melhor dos nossos conhecimentos, este princípio de máximo está sendo apresentado pela primeira vez na literatura (veja Teorema 2.1.4). Até então, um estudo sobre sistemas do tipo Schrödinger-Poisson com potencial periódico e operador integro-diferencial não existia na literatura. Ainda neste capítulo, estudaremos a existência de solução de energia mínima para estes tipos de sistemas, também estudaremos o caso em que o potencial é assintoticamente periódico. As ideias contidas neste capítulo são inspiradas pelo trabalho de Duarte e Souto, em [25].

2.1 Um Princípio de Máximo

Antes de provarmos o teorema principal desta seção (Teorema 2.1.4), é necessário que provemos uma outra versão do lema logarítmico. Este lema será uma importante ferramenta para a demonstração do Teorema 2.1.4. O lema logarítmico foi provado por Di Castro, Kuusi e Palatucci em [23, Lema 1.3]. Neste lema os autores dão uma estimativa para soluções fracas do problema

$$(-\Delta_p)^s u = f \quad \text{em } \Omega$$
$$u = g \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega$$

Seguindo as mesmas idéias de Di Castro, Kuusi e Palatucci, mostraremos uma estimativa análoga para uma supersolução do problema

$$-\mathcal{L}_K u + a(x)u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

onde K é um núcleo de ordem s (veja Lema 2.1.3 abaixo). Dizemos que u é uma supersolução da equação acima se

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))K(x-y)\,dx\,dy + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u(x)v(x)dx \geq 0,$$

para todo $v \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ com $v \geq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

No lema logarítmico, provado por Di Castro, Kuusi e Palatucci, a condição $u \geq 0$ é dada como hipótese. No nosso caso, veremos, no lema seguinte, que $u \geq 0$ é uma consequência de u ser uma supersolução.

Lema 2.1.1 *Sejam $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função não negativa e $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$. Suponha que, para toda $v \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ com $v \geq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, tenhamos que*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))\,(v(x)-v(y))\,K(x-y)dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u(x)v(x)dx \geq 0.$$

Então $u \geq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Demonstração. Seja $v = u^-$. Temos que $v \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ e $v \geq 0$ q.t.p. Por hipótese

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))\left(u^-(x)-u^-(y)\right)K(x-y)dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u(x)u^-(x)dx \geq 0.$$

Mas, observe que:

- Se $u(x) > 0$ e $u(y) > 0$, então $(u(x)-u(y))\,(u^-(x)-u^-(y)) = 0$.

- Se $u(x) \leq 0$ e $u(y) \leq 0$, então $(u(x)-u(y))\,(u^-(x) - u^-(y)) = -(u(x)-u(y))^2 \leq 0$.

- Se $u(x) > 0$ e $u(y) \leq 0$, então $(u(x)-u(y))\,(u^-(x) - u^-(y)) = (u(x)-u(y))u(y) \leq 0$. Pois, neste caso, $u(x) - u(y) \geq 0$.

- Se $u(x) \leq 0$ e $u(y) > 0$, então $(u(x)-u(y))\,(u^-(x) - u^-(y)) = (u(x)-u(y))(-u(x)) \leq 0$. Pois, neste caso, $u(x) - u(y) \leq 0$.

- Se $u(x) < 0$, então $a(x)u(x)u^-(x) = -a(x)u^2(x)$ e caso contrário, $a(x)u(x)u^-(x) = 0$.

Das observações acima, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y))\left(u^-(x) - u^-(y)\right) K(x-y)dxdy = 0.$$

Esta última igualdade, junto com as observações acima, implicam que

$$(u(x) - u(y))\left(u^-(x) - u^-(y)\right) K(x-y) = 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Isto implica que, se $x \neq y$ então $u^-(x) = u^-(y)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Ou seja, u^- é constante em $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ e portanto $u^- = 0$. ■

O próximo lema fornece uma desigualdade sobre números reais. Usaremos esta desigualdade na demonstração do lema logarítmico.

Lema 2.1.2 *Sejam $\epsilon \in (0,1]$ e $a,b \in \mathbb{R}^N$. Então*

$$|a|^2 \leq |b|^2 + 2\epsilon|b|^2 + \frac{1+\epsilon}{\epsilon}|a-b|^2. \tag{2.1}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} |a|^2 &\leq (|b| + |a-b|)^2 \\ &= |b|^2 + 2|b||a-b| + |a-b|^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pela inequação de Cauchy com ϵ (veja página 662 em [28])

$$|b||a-b| \leq \epsilon|b|^2 + \frac{|a-b|^2}{4\epsilon} \leq \epsilon|b|^2 + \frac{|a-b|^2}{2\epsilon}. \tag{2.3}$$

Substituindo (2.3) em (2.2) temos

$$\begin{aligned} |a|^2 &\leq |b|^2 + 2\epsilon|b|^2 + \frac{|a-b|^2}{\epsilon} + |a-b|^2 \\ &= |b|^2 + 2\epsilon|b|^2 + \frac{1+\epsilon}{\epsilon}|a-b|^2. \end{aligned}$$

■

Lema 2.1.3 *(Versão do Lema logarítmico). Sejam $s \in (0,1)$, $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ e $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $a \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$. Suponha que u satisfaz:*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))K(x-y)dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u(x)\phi(x)dx \geq 0$$

para toda $\phi \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ com $\phi \geq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Então para toda bola $r > 0$, $B_r = B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}\int_{B_r}\int_{B_r}\left|log\left(\frac{d+u(x)}{d+u(y)}\right)\right|^2 K(x-y)dxdy \leq \;& +C_1 r^N \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\frac{r}{2}}(0)} K(z)dz \\ & C_2 r^{N-2}\int_{B_{4r}(0)} |z|^2 K(z)\,dz + C_3\int_{B_{2r}} a(x)dx\end{aligned} \tag{2.4}$$

para toda constante $d > 0$, onde C_1, C_2 e C_3 são constantes que não dependem de d.

Demonstração. Nessa demonstração, a menos que se diga o contrário, para cada $t > 0$ escreveremos apenas B_t para representar $B_t(x_0)$. Considere $\phi \in C_0^\infty(B_{\frac{3r}{2}})$ e $K > 0$ satisfazendo,

$$0 \leq \phi \leq 1, \quad \phi = 1 \text{ em } B_r \quad \text{e} \quad \|D\phi\|_\infty \leq Kr^{-1}.$$

A função

$$\eta(x) = \frac{\phi^2(x)}{u(x)+d}$$

pertence ao espaço $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ e $\eta \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$. Por hipótese,

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))(\eta(x)-\eta(y))K(x-y)\,dx\,dy + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u(x)\eta(x)dx \\ &= \int_{B_{2r}}\int_{B_{2r}}(u(x)-u(y))(\eta(x)-\eta(y))K(x-y)\,dx\,dy \\ &\quad+ \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2r}}\int_{B_{2r}}(u(x)-u(y))(\eta(x)-\eta(y))K(x-y)\,dx\,dy \\ &\quad+ \int_{B_{2r}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2r}}(u(x)-u(y))(\eta(x)-\eta(y))K(x-y)\,dx\,dy \\ &\quad+ \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2r}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2r}}(u(x)-u(y))(\eta(x)-\eta(y))K(x-y)\,dx\,dy \\ &\quad+ \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u(x)\eta(x)dx.\end{aligned}$$

A seguir, provaremos algumas afirmações sobre as cinco integrais que aparecem no lado direito da desigualdade acima.

Afirmação 1. Existem constantes $C_2, C_3 > 0$, que dependem somente de N e s, satisfazendo

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_{2r}}\int_{B_{2r}} (u(x)-u(y))(\eta(x)-\eta(y))K(x-y)\,dx\,dy\\
&\leq -C_2\int_{B_{2r}}\int_{B_{2r}}\left|\log\left(\frac{d+u(x)}{d+u(y)}\right)\right|^2 K(x-y)\min\{|\phi(y)|^2,|\phi(x)|^2\}\,dx\,dy\\
&\quad + C_3\int_{B_{2r}}\int_{B_{2r}}|\phi(x)-\phi(y)|^2K(x-y)\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

Para a demonstração desta afirmação, fixaremos $x, y \in B_{2r}$. Suponha que $u(x) > u(y)$. Defina

$$
\epsilon = \delta\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}
$$

onde $\delta \in (0,1)$ é escolhido suficientemente pequeno, para que $\epsilon \in (0,1)$. Tomando $a = \phi(x)$ e $b = \phi(y)$ no Lema 2.1.2, obtemos

$$
|\phi(x)|^2 \leq |\phi(y)|^2 + 2\delta\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}|\phi(y)|^2 + \left(\delta^{-1}\frac{u(x)+d}{u(x)-u(y)}+1\right)|\phi(x)-\phi(y)|^2.
$$

Então

$$
\begin{aligned}
&(u(x)-u(y))\,(\eta(x)-\eta(y))\,K(x-y)\\
&= (u(x)-u(y))\left(\frac{\phi^2(x)}{u(x)+d}-\frac{\phi^2(y)}{u(y)+d}\right)K(x-y)\\
&\leq (u(x)-u(y))\left(\frac{|\phi(y)|^2+2\delta\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}|\phi(y)|^2+\left(\delta^{-1}\frac{u(x)+d}{u(x)-u(y)}+1\right)|\phi(x)-\phi(y)|^2}{u(x)+d}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{|\phi(y)|^2}{u(y)+d}\right)K(x-y)\\
&= (u(x)-u(y))\,\frac{|\phi(y)|^2}{u(x)+d}\left[1+2\delta\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}\right.\\
&\qquad\left.+\left(\delta^{-1}\frac{u(x)+d}{u(x)-u(y)}+1\right)\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|\phi(y)|^2}-\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right]K(x-y)\\
&= (u(x)-u(y))\,\frac{|\phi(y)|^2}{u(x)+d}K(x-y)\left(1+2\delta\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}-\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right)\\
&\qquad+\left(\delta^{-1}+\frac{(u(x)-u(y))}{u(x)+d}\right)|\phi(x)-\phi(y)|^2K(x-y)\\
&\leq (u(x)-u(y))\,\frac{|\phi(y)|^2}{u(x)+d}K(x-y)\left(1+2\delta\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}-\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right)\\
&\qquad+2\delta^{-1}|\phi(x)-\phi(y)|^2K(x-y).
\end{aligned}
$$

A seguir, reescreveremos a primeira parte da soma que aparece no lado direiro da inequação acima como

$$
\begin{aligned}
&(u(x)-u(y))\frac{|\phi(y)|^2}{u(x)+d}K(x-y)\left(1+2\delta\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}-\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right)\\
&=\left(\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}\right)^2|\phi(y)|^2K(x-y)\left[\frac{u(x)+d}{u(x)-u(y)}+2\delta-\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\cdot\frac{u(x)+d}{u(x)-u(y)}\right]\\
&=\left(\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}\right)^2|\phi(y)|^2K(x-y)\left[\frac{1-\frac{u(x)+d}{u(y)+d}}{1-\frac{u(y)+d}{u(x)+d}}+2\delta\right].
\end{aligned}
$$

Considere a função $g:(0,1)\to\mathbb{R}$, dada por

$$
g(t)=\frac{1-t^{-1}}{1-t}.
$$

A função g satisfaz $g(t)\le-\frac{1}{4}\frac{t^{-1}}{1-t}$ se $t\in(0,\frac{1}{2}]$ e $g(t)\le-1$ para todo $t\in(0,1)$.

Temos duas possibilidades para considerar. Primeiro, se

$$
\frac{u(y)+d}{u(x)+d}\le\frac{1}{2}
$$

então concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}\right)^2|\phi(y)|^2K(x-y)\left[\frac{1-\frac{u(x)+d}{u(y)+d}}{1-\frac{u(y)+d}{u(x)+d}}+2\delta\right]\\
&\le\left(\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}\right)^2|\phi(y)|^2K(x-y)\left[-\frac{1}{4}\frac{\frac{u(x)+d}{u(y)+d}}{\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}}+2\delta\right]\\
&=\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}|\phi(y)|^2K(x-y)\left[-\frac{1}{4}\frac{u(x)+d}{u(y)+d}+2\delta\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}\right]\\
&=\frac{u(x)-u(y)}{u(y)+d}|\phi(y)|^2K(x-y)\left[-\frac{1}{4}+2\delta\frac{(u(x)-u(y))(u(y)+d)}{(u(x)+d)^2}\right]\\
&\le\frac{u(x)-u(y)}{u(y)+d}|\phi(y)|^2K(x-y)\left[-\frac{1}{4}+2\delta\right].
\end{aligned}
$$

Na última inequação usamos que

$$
\frac{(u(x)-u(y))(u(y)+d)}{(u(x)+d)^2}\le 1.
$$

Escolhendo $\delta=1/16$, temos

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}\right)^2|\phi(y)|^2K(x-y)\left[\frac{1-\frac{u(x)+d}{u(y)+d}}{1-\frac{u(y)+d}{u(x)+d}}+2\delta\right]\\
&\le-\frac{1}{8}\frac{u(x)-u(y)}{u(y)+d}|\phi(y)|^2K(x-y)\\
&\le-\frac{1}{8}\left[\log\left(\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right)\right]^2|\phi(y)|^2K(x-y).
\end{aligned}
$$

Acima, usamos que $(\log(t))^2 \leq t-1$ para todo $t \geq 2$, e que $\frac{u(x)+d}{u(y)+d} \geq 2$.

Porém, em segundo caso, se

$$\frac{u(y)+d}{u(x)+d} > 1/2,$$

então usando que $g(t) \leq -1$ e $\delta = 1/16$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}\right)^2 |\phi(y)|^2 K(x-y) \left[\frac{1-\frac{u(x)+d}{u(y)+d}}{1-\frac{u(y)+d}{u(x)+d}} + 2\delta\right] \\
&\leq \left(\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}\right)^2 |\phi(y)|^2 K(x-y)[-1+2\delta] \\
&\leq -\frac{7}{8}\left(\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}\right)^2 |\phi(y)|^2 K(x-y) \\
&\leq -\frac{7}{32}\left[\log\left(\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right)\right]^2 |\phi(y)|^2 K(x-y).
\end{aligned}$$

Acima, usamos que

$$\left[\log\left(\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right)\right]^2 = \left[\log\left(1+\frac{u(x)-u(y)}{u(y)+d}\right)\right]^2 \leq 4\left(\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}\right)^2.$$

Isto segue como consequência de $\log(1+t) \leq t$ para todo $t > 0$, e

$$t = \frac{u(x)-u(y)}{u(y)+d} = \frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d} \cdot \frac{u(x)+d}{u(y)+d} \leq 2\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&(u(x)-u(y))\frac{|\phi(y)|^2}{u(x)+d} K(x-y)\left(1+2\delta\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d} - \frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right) \\
&\leq -\frac{1}{8}\left[\log\left(\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right)\right]^2 |\phi(y)|^2 K(x-y).
\end{aligned}$$

Em resumo, provamos que, se $u(x) > u(y)$, então

$$\begin{aligned}
&(u(x)-u(y))(\eta(x)-\eta(y))K(x-y) \\
&\leq -\frac{1}{8}\left[\log\left(\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right)\right]^2 |\phi(y)|^2 K(x-y) + 32|\phi(x)-\phi(y)|^2 K(x-y).
\end{aligned}$$

Integrando a inequação acima sobre $B_{2r} \times B_{2r}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{2r}} \int_{B_{2r}} (u(x) - u(y))(\eta(x) - \eta(y))K(x - y)\, dx\, dy \\
&= \int_{B_{2r}} \int_{\{x \in B_{2r}; u(x) > u(y)\}} (u(x) - u(y))(\eta(x) - \eta(y))K(x - y)\, dx\, dy \\
&\quad + \int_{B_{2r}} \int_{\{x \in B_{2r}; u(x) < u(y)\}} (u(x) - u(y))(\eta(x) - \eta(y))K(x - y)\, dx\, dy \\
&\leq -\frac{1}{8} \int_{B_{2r}} \int_{\{x \in B_{2r}; u(x) > u(y)\}} \left[\log\left(\frac{u(x) + d}{u(y) + d}\right)\right]^2 |\phi(y)|^2 K(x - y)\, dx\, dy \\
&\quad - \frac{1}{8} \int_{B_{2r}} \int_{\{x \in B_{2r}; u(x) < u(y)\}} \left[\log\left(\frac{u(y) + d}{u(x) + d}\right)\right]^2 |\phi(x)|^2 K(x - y)\, dx\, dy \\
&\quad + 32 \int_{B_{2r}} \int_{B_{2r}} |\phi(x) - \phi(y)|^2 K(x - y)\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

Usando que $|\log(x)| = |\log(\frac{1}{x})|$ para todo $x > 0$, obtemos

$$\left[\log\left(\frac{u(y) + d}{u(x) + d}\right)\right]^2 = \left[\log\left(\frac{u(x) + d}{u(y) + d}\right)\right]^2.$$

Então

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{2r}} \int_{B_{2r}} (u(x) - u(y))(\eta(x) - \eta(y))K(x - y)\, dx\, dy \\
&\leq -\frac{1}{8} \int_{B_{2r}} \int_{\{x \in B_{2r}; u(x) > u(y)\}} \left[\log\left(\frac{u(x) + d}{u(y) + d}\right)\right]^2 |\phi(y)|^2 K(x - y)\, dx\, dy \\
&\quad - \frac{1}{8} \int_{B_{2r}} \int_{\{x \in B_{2r}; u(x) < u(y)\}} \left[\log\left(\frac{u(x) + d}{u(y) + d}\right)\right]^2 |\phi(x)|^2 K(x - y)\, dx\, dy \\
&\quad + 32 \int_{B_{2r}} \int_{B_{2r}} |\phi(x) - \phi(y)|^2 K(x - y)\, dx\, dy \\
&\leq -\frac{1}{8} \int_{B_{2r}} \int_{\{x \in B_{2r}; u(x) > u(y)\}} \left[\log\left(\frac{u(x) + d}{u(y) + d}\right)\right]^2 \min\{|\phi(y)|^2, |\phi(x)|^2\} K(x - y)\, dx\, dy \\
&\quad - \frac{1}{8} \int_{B_{2r}} \int_{\{x \in B_{2r}; u(x) < u(y)\}} \left[\log\left(\frac{u(x) + d}{u(y) + d}\right)\right]^2 \min\{|\phi(y)|^2, |\phi(x)|^2\} K(x - y)\, dx\, dy \\
&\quad + 32 \int_{B_{2r}} \int_{B_{2r}} |\phi(x) - \phi(y)|^2 K(x - y)\, dx\, dy \\
&= -\frac{1}{8} \int_{B_{2r}} \int_{B_{2r}} \left[\log\left(\frac{u(x) + d}{u(y) + d}\right)\right]^2 \min\{|\phi(y)|^2, |\phi(x)|^2\} K(x - y)\, dx\, dy \\
&\quad + 32 \int_{B_{2r}} \int_{B_{2r}} |\phi(x) - \phi(y)|^2 K(x - y)\, dx\, dy,
\end{aligned}$$

Isto prova a afirmação 1.

Afirmação 2. Para alguma constante $C > 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2r}} \int_{B_{2r}} (u(x) - u(y))(\eta(x) - \eta(y)) K(x-y)\, dx\, dy \le C r^N \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{r}{2}}(0)} K(z)\, dz.$$

De fato, como $u \ge 0$, temos que $\frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d} \le 1$ e consequentemente

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2r}} \int_{B_{2r}} (u(x) - u(y))(\eta(x) - \eta(y)) K(x-y)\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2r}} \int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y)) \left(\frac{\phi^2(x)}{u(x)+d} - \frac{\phi^2(y)}{u(y)+d} \right) K(x-y)\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2r}} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x)|^2 \frac{u(x)-u(y)}{u(x)+d} K(x-y)\, dx\, dy \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2r}} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x)|^2 K(x-y)\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2r}} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x)|^2 K(x-y)\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2r}} \int_{B_{\frac{3r}{2}}} |\phi(x)|^2 K(x-y)\, dx\, dy \\
&= \int_{B_{\frac{3r}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2r}} |\phi(x)|^2 K(x-y)\, dy\, dx \\
&= \int_{B_{\frac{3r}{2}}} |\phi(x)|^2 \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2r}} K(x-y)\, dy\, dx \\
&\le \int_{B_{\frac{3r}{2}}} |\phi(x)|^2 \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{r}{2}}(x)} K(x-y)\, dy\, dx \\
&= \int_{B_{\frac{3r}{2}}} |\phi(x)|^2 \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{r}{2}}(0)} K(z)\, dz\, dx \\
&= \int_{B_{\frac{3r}{2}}} |\phi(x)|^2\, dx \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{r}{2}}(0)} K(z)\, dz \\
&= C_3 r^N \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{r}{2}}(0)} K(z)\, dz.
\end{aligned}$$

Concluindo assim, a demonstração da afirmação 2.

Note que, por (K_1) (veja definição 1.1.1) temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2r}} \int_{B_{2r}} (u(x) - u(y))(\eta(x) - \eta(y)) K(x-y)\, dx\, dy \\
&= \int_{B_{2r}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2r}} (u(x) - u(y))(\eta(x) - \eta(y)) K(x-y)\, dx\, dy
\end{aligned}$$

Afirmação 3.

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x) u(x) \eta(x) dx \le \int_{B_{2r}} a(x) dx.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} a(x)u(x)\eta(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u(x)\frac{\phi^2(x)}{u(x)+d}dx \\
&= \int_{B_{2r}} a(x)u(x)\frac{\phi^2(x)}{u(x)+d}dx \\
&= \int_{B_{2r}} a(x)\frac{u(x)}{u(x)+d}\phi^2(x)dx \\
&\leq \int_{B_{2r}} a(x)dx
\end{aligned}$$

Acima, usamos que $\mathrm{supp}(\eta) \subset B_{2r}$, que $\phi(x) \in (0,1)$ e que $\frac{u(x)}{u(x)+d} \leq 1$.

As afirmações 1, 2 e 3 implicam que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{2r}} \int_{B_{2r}} \left[\log\left(\frac{u(x)+d}{u(y)+d}\right)\right]^2 \min\{\phi(y)^2, \phi(x)^2\} K(x-y)\, dx\, dy \\
&\leq C_5 \int_{B_{2r}} \int_{B_{2r}} |\phi(x)-\phi(y)|^2 K(x-y)\, dx\, dy + C_6 r^N \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{r}{2}}(0)} K(z)dz + C_7 \int_{B_{2r}} a(x)dx.
\end{aligned}$$

para constantes C_5, C_6, que dependem somente de N e s. Como $\phi = 1$ em B_r,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r} \int_{B_r} \left|\log\left(\frac{d+u(x)}{d+u(y)}\right)\right|^2 K(x-y)\, dx\, dy \\
&\leq C_5 \int_{B_{2r}} \int_{B_{2r}} |\phi(x)-\phi(y)|^2 K(x-y)\, dx\, dy + Cr^N \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{r}{2}}(0)} K(z)dz + \int_{B_{2r}} a(x)dx
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Para finalizar a demonstração, basta mostrar que

$$\int_{B_{2r}} \int_{B_{2r}} |\phi(x)-\phi(y)|^2 K(x-y)\, dx\, dy \leq C_7 r^{N-2s} \int_{B_{4r(0)}} |z|^2 K(z)\, dz\,.$$

A condição sobre a derivada de ϕ implica que

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2r}} \int_{B_{2r}} |\phi(x)-\phi(y)|^2 K(x-y)\, dx\, dy &\leq K r^{-2} \int_{B_{2r}} \int_{B_{2r}} |x-y|^2 K(x-y)\, dx\, dy \\
&\leq K r^{-2} \int_{B_{2r}} \int_{B_{4r(y)}} |x-y|^2 K(x-y)\, dx\, dy \\
&= K r^{-2} \int_{B_{2r}} \int_{B_{4r(0)}} K(z)\, dz\, dy \\
&= K r^{-2} |B_{2r}| \int_{B_{4r(0)}} |z|^2 K(z)\, dz \\
&= C_7 r^{N-2} \int_{B_{4r(0)}} |z|^2 K(z)\, dz
\end{aligned}$$

onde C_7 é uma constante positiva. Substituindo a estimativa acima em (2.5), obtemos o Lema 2.1.3. ∎

A seguir, provaremos o princípio de máximo, citado no início da seção.

Teorema 2.1.4 *Sejam $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ e $a \geq 0$ com $a \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Suponha que*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))K(x-y)\,dx\,dy + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u(x)v(x)dx \geq 0,$$

para toda $v \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ com $v \geq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Então, $u > 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ ou $u = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Demonstração. Pelo Lema 2.1.1, $u \geq 0$. Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$. Defina

$$Z := \{x \in B_r(x_0); u(x) = 0\}.$$

Suponha que $|Z| > 0$. Defina $F_\delta : B_r(x_0) \to \mathbb{R}$ como

$$F_\delta(x) = \log\left(1 + \frac{u(x)}{\delta}\right),$$

para todo $\delta > 0$. Temos $F_\delta(y) = 0$ para todo $y \in Z$. Consequentemente, se $x \in B_r(x_0)$ e $y \in Z$, temos

$$|F_\delta(x)|^2 = \frac{|F_\delta(x) - F_\delta(y)|^2}{K(x-y)}K(x-y).$$

Por (K_2) (veja definição 1.1.1), existe $C_K > 0$ tal que

$$\frac{1}{K(x-y)} \leq C_K|x-y|^{N+2s} \leq C_K(2r)^{N+2s}.$$

Integrando em $y \in Z$ obtemos

$$|Z||F_\delta(x)|^2 = \int_Z \frac{|F_\delta(x) - F_\delta(y)|^2}{K(x-y)}K(x-y)dy \leq C_K(2r)^{N+2s}\int_Z |F_\delta(x) - F_\delta(y)|^2 K(x-y)dy.$$

Agora, integrando em $x \in B_r(x_0)$ e usando o Lema 2.1.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x_0)} |F_\delta(x)|^2 dx &\leq \frac{C_K}{|Z|}(2r)^{N+2s}\int_{B_r(x_0)}\int_Z |F_\delta(x) - F_\delta(y)|^2 K(x-y)\,dy\,dx \\
&\leq \frac{C_K}{|Z|}(2r)^{N+2s}\int_{B_r(x_0)}\int_{B_r(x_0)} |F_\delta(x) - F_\delta(y)|^2 K(x-y)\,dy\,dx \\
&= \frac{C_K}{|Z|}(2r)^{N+2s}\int_{B_r(x_0)}\int_{B_r(x_0)} \left|\log\left(\frac{\delta + u(x)}{\delta + u(y)}\right)\right|^2 K(x-y)\,dx\,dy \\
&\leq \frac{C_K}{|Z|}(2r)^{N+2s}\Bigg(C_1 r^N \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{r}{2}}(0)} K(z)dz \\
&\qquad + C_2 r^{N-2}\int_{B_{4r}(0)} |z|^2 K(z)\,dz + C_3\int_{B_{2r}} a(x)dx\Bigg).
\end{aligned}$$

Note que o número que aparece do lado direito da última desigualdade não depende de δ. Em resumo, provamos que

$$\int_{B_r(x_0)} \left|\log\left(1+\frac{u(x)}{\delta}\right)\right|^2 dx \leq C$$

para alguma constante $C>0$ que não depende de δ. Se $u(x)\neq 0$ então $F_\delta(x)\to\infty$ quando $\delta\to 0$. Pelo lema de Fatou, se $|B_r(x_0)\cap Z^c|>0$ então

$$+\infty \leq \liminf_{\delta\to 0}\int_{B_r(x_0)\cap Z^c} |F_\delta(x)|^2 dx \leq C,$$

o que é uma contradição. Neste caso, $Z=B_r(x_0)$ e $u=0$ q.t.p. em $B_r(x_0)$. Defina

$$\begin{gathered} A=\{B_r(x); r>0, x\in\mathbb{R}^N, u>0 \ \text{ q.t.p. em } \ B_r(x)\}, \\ B=\{B_r(x); r>0, x\in\mathbb{R}^N, u=0 \ \text{ q.t.p. em } \ B_r(x)\}, \\ S=\bigcup_{V\in A} V, \quad W=\bigcup_{V\in B} V\,. \end{gathered}$$

Note que S e W são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^N$. Considere $x\in\mathbb{R}^N$ e $r>0$. Temos duas possibilidades, ou $u\neq 0$ em $B_r(x)$ ou $u=0$ em $B_r(x)$. Pelo que foi mostrado, se $u\neq 0$ em algum subconjunto de medida não nula de $B_r(x)$, então $u>0$ *q.t.p.* em $B_r(x)$. Portanto, neste caso, $x\in S$. Se $u=0$ *q.t.p.* em $B_r(x)$, então $x\in W$. Consequentemente

$$\mathbb{R}^N = S\cup W.$$

Por conexidade, deveremos ter $S=\emptyset$ ou $W=\emptyset$. Se $\mathbb{R}^N=S$ então $u>0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Se $\mathbb{R}^N=W$ então $u=0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. ■

2.2 Sistemas do Tipo Schrödinger-Poisson com Potencial Periódico e Operadores Integro-Diferenciais

Nesta seção, como uma aplicação do princípio de máximo provado na seção anterior, mostraremos a existência de solução positiva para um sistema de Schödinger-Poisson com potencial periódico e operador integro-diferencial. Vamos considerar o problema

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{K^s}u + V(x)u + \phi u = f(u), &\quad \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\mathcal{L}_{K^t}\phi = u^2, &\quad \text{em } \mathbb{R}^3, \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde K^s e K^t são, respectivamente núcleos de ordem s e ordem t, $s \in (\frac{3}{4}, 1)$ e $t \in (0,1)$. Vamos supor as seguintes hipóteses sobre $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $V \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

(A1) $V(x) \geq \alpha > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e para alguma constante $\alpha > 0$;

(A2) $V(x) = V(x+y)$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \mathbb{Z}^3$;

(A3) $f(u)u > 0$, $u > 0$;

(A4) $\lim_{u\to 0} f(u)/u = 0$;

(A5) Existem $p \in (4, 2_s^*)$ e $C > 0$, tais que

$$|f(u)| \leq C(|u| + |u|^{p-1}),$$

para todo $u \in \mathbb{R}$, onde $2_s^* = \frac{6}{3-2s}$;

(A6) $\lim_{u\to+\infty} F(u)/u^4 = +\infty$, onde $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(z)dz$;

(A7) A função $u \longmapsto f(u)/u^3$ é crescente em $|u| \neq 0$.

Observação 2.2.1 *A condição $s > \frac{3}{4}$ é pedida para que $4 < 2_s^*$ em (A_5).*

No que segue, denotaremos por $g(u) := f(u^+)$ e $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)ds$.

Destacamos que este problema não tinha sido estudado até então no caso do laplaciano fracionário. Alves, Souto e Soares em [7], estudaram um problema análogo, considerando o operador laplaciano em vez do laplaciano fracionário. Motivados por [7], como uma aplicação do princípio de máximo mostrado na seção anterior, provaremos que é possível obter solução positiva para o problema 2.6. Destacamos também, que estamos exigindo apenas a continuidade de f, porque nosso princípio de máximo, não pede regularidade para a solução.

Observação 2.2.2 A condição (A7) implica que a função $H(u) = uf(u) - 4F(u)$ é não negativa e crescente.

2.2.1 Sistemas do Tipo Schrödinger-Poisson com Operadores Integro-Diferenciais

Sejam $s, t \in (0,1)$. Nesta seção, assumindo algumas hipóteses sobre s e t, veremos que podemos definir um operador $\phi : \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)$, tal que para cada $u \in$

$\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$, a função $\phi(u)$ é a única solução de

$$-\mathcal{L}_{K^t}\phi(u) = u^2 \text{ em } \mathbb{R}^3.$$

Provaremos algumas propriedades importantes deste operador.

Lema 2.2.3 *Sejam $t, s \in (0,1)$ com $4s + 2t \geq 3$. Então para todo $u \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ existe um único $\phi_u \in \dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)$ tal que, ϕ_u é a única solução fraca do problema*

$$-\mathcal{L}_{K^t}\phi_u = u^2 \text{ em } \mathbb{R}^3.$$

Demonstração. Como $4s + 2t \geq 3$, então $2 \leq \frac{2\cdot 2_t^*}{2_t^*-1} \leq 2_s^*$. Daí conseguimos $C > 0$ tal que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3} u^2 v dx\right| \leq ||v||_{2_t^*}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{\frac{2\cdot 2_t^*}{2_t^*-1}} dx\right)^{\frac{2_t^*-1}{2_t^*}} \leq C||v||_{\dot{H}^t(\mathbb{R}^N)}$$

para toda $v \in \dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)$ (veja 1.2.6). Pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um único $\phi_u \in \dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} (\phi_u(x) - \phi_u(y))(w(x) - w(y))K^t(x-y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^3} u^2(x)w(x)dx.$$

para toda $w \in \dot{H}^t(\mathbb{R}^N)$, ou seja, existe um único $\phi_u \in \dot{H}^t(\mathbb{R}^3)$ que é solução fraca de

$$-\mathcal{L}_{K^t}\phi_u = u^2 \text{ em } \mathbb{R}^3.$$

■

Veremos a seguir que a função ϕ é contínua.

Corolário 2.2.4 *Com as hipóteses do teorema acima, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$||\phi_u||_{\dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)} \leq C||u||^2_{\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)} \tag{2.7}$$

para todo $u \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$. Equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} (\phi_u(x) - \phi_u(y))^2 K^t(x-y)dxdy \leq C^2||u||^4_{\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)} \tag{2.8}$$

Demonstração. Pelo Lema 2.2.3

$$\begin{aligned} ||\phi_u||^2_{\dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)} &= \int_{\mathbb{R}^3} u^2\phi_u dx \\ &\leq C_1||\phi_u||_{2_t^*}||u||^2_{\frac{2\cdot 2_t^*}{2_t^*-1}} \\ &\leq C_2||\phi_u||_{\dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)}||u||^2_{\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

para algumas constantes $C_1, C_2 > 0$. Acima, usamos as imersões de $\dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)$ em $L^{2_t^*}(\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ em $L^{\frac{2\cdot 2_t^*}{2_t^*-1}}(\mathbb{R}^3)$. Note que se $u \neq 0$ então $\phi_u \neq 0$. Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por $||\phi_u||_{\dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)}$ obtemos (2.7). ■

Corolário 2.2.5 *Para todo* $u \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$*, temos* $\phi_u \geq 0$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^3$*.*

Demonstração. Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$. Pelo Lema 2.2.3, ϕ_u é solução fraca de

$$-\mathcal{L}_{K^t}\phi_u = u^2 \text{ em } \mathbb{R}^3.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(\phi_u(x)-\phi_u(y))(\phi_u^-(x)-\phi_u^-(y))K^t(x-y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^3} u^2\phi_u^- dx \geq 0. \tag{2.9}$$

Mas,

- Se $\phi_u(x), \phi_u(y) \geq 0$ então $(\phi_u(x)-\phi_u(y))(\phi_u^-(x)-\phi_u^-(y)) = 0$;
- Se $\phi_u(x) \geq 0$ e $\phi_u(y) < 0$ então $(\phi_u(x)-\phi_u(y))(\phi_u^-(x)-\phi_u^-(y)) = (\phi_u(x)-\phi_u(y))\phi_u(y) < 0$;
- Se $\phi_u(x) < 0$ e $\phi_u(y) \geq 0$ então $(\phi_u(x)-\phi_u(y))(\phi_u^-(x)-\phi_u^-(y)) = -(\phi_u(x)-\phi_u(y))\phi_u(x) < 0$;
- Se $\phi_u(x) < 0$ e $\phi_u(y) < 0$ então $(\phi_u(x)-\phi_u(y))(\phi_u^-(x)-\phi_u^-(y)) = -(\phi_u(x)-\phi_u(y))^2 < 0$.

Pela inequação 2.9 temos $(\phi_u(x)-\phi_u(y))(\phi_u^-(x)-\phi_u^-(y)) = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Isto implica que ϕ_u^- é constante em $\mathbb{R}^3$ e portanto $\phi_u^- = 0$. Segue que $\phi_u \geq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$. ■

O Lema 2.2.6 mostra que ϕ é homogênea em $t > 0$.

Lema 2.2.6 *Se* $t > 0$ *e* $u \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$*, então* $\phi_{tu} = t^2\phi_u$*.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$. Pelo Lema 2.2.3, para todo $v \in \dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)$ temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(t^2\phi_u(x)-t^2\phi_u(y))(v(x)-v(y))K^t(x-y)dxdy \\
&= t^2\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(\phi_u(x)-\phi_u(y))(v(x)-v(y))K^t(x-y)dxdy \\
&= t^2\int_{\mathbb{R}^3} u^2(x)v(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}(tu)^2(x)v(x)dx,
\end{aligned}$$

ou seja, $t^2\phi_u$ é solução fraca de $-\mathcal{L}_K(t^2\phi_u) = (tu)^2$. Usando a unicidade de solução, dada pelo Lema 2.2.3, temos $\phi_{tu} = t^2\phi_u$. ■

No próximo lema, veremos como se comporta a aplicação ϕ em funções que se diferenciam por uma translação.

Lema 2.2.7 *Sejam $p \in \mathbb{R}^3$ e $u \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$. Definindo $\tilde{u}(x) := u(x+p)$, temos $\phi_{\tilde{u}}(x) = \phi_u(x+p)$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\tilde{u}} \tilde{u}^2 dx.$$

Demonstração. Seja $v \in \dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)$. Fazendo a mudança de variáveis $z = x + p$ e $w = y + p$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} (\phi_u(x+p) - \phi_u(y+p))(v(x) - v(y))K^t(x-y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} (\phi_u(x+p) - \phi_u(y+p))(v(x) - v(y))K^t((x+p)-(y+p))dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} (\phi_u(z) - \phi_u(w))(v(z-p) - v(w-p))K^t(z-w)dzdw \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} u^2(z)v(z-p)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} u^2(x+p)v(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{u}^2(x)v(x)dx
\end{aligned}$$

Esta igualdade e a unicidade de solução dada pelo Lema 2.2.3 implicam que $\phi_{\tilde{u}}(x) = \phi_u(x+p)$. Fazendo a mudança $z = x + p$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\tilde{u}}(x)\tilde{u}^2(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u(x+p)u^2(x+p)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u(z)u^2(z)dz.
\end{aligned}$$

■

Terminaremos esta seção mostrando que a aplicação ϕ é fracamente contínua.

Lema 2.2.8 *Se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para u em $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ então $\{\phi_{u_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para ϕ_u em $\dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)$.*

Demonstração. Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3} (u_n^2\phi - u^2\phi)dx\right| \leq ||\phi||_\infty \left|\int_B (u_n^2 - u^2)dx\right|$$

onde $\mathrm{supp}(\phi) \subset B$ e B é uma bola. O espaço $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ está imerso compactamente em $L^2(B)$. Logo, o lado direito da última desigualdade converge para 0 quando $n \to \infty$. Pela hipótese de que a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para u em $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ e pelo Corolário 2.2.4, concluímos que a sequência $\{\phi_{u_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)$. Portanto, a menos de subsequência, podemos supor que $\{\phi_{u_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fraco para

$w \in \dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)$. Logo

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(w(x)-w(y))(\phi(x)-\phi(y))K^t(x-y)dxdy\\
&=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(\phi_{u_n}(x)-\phi_{u_n}(y))(\phi(x)-\phi(y))K^t(x-y)dxdy\\
&=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2(x)\phi(x)dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}u^2(x)\phi(x)dx,
\end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Por densidade, esta igualdade vale para todo $\phi \in \dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)$. Segue que $w = \phi_u$.

Este mesmo argumento mostra que toda subsequência de $\{\phi_{u_n}\}$ possui uma subsequência que converge fraco para ϕ_u em $\dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)$. Isto implica que a sequência $\{\phi_{u_n}\}$ converge fracamente para ϕ_u em $\dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)$. ■

2.2.2 Existência de Solução Positiva para o Problema 2.6

Inicialmente, estamos interessados em mostrar a existência de solução positiva para (2.6). Por isso, vamos considerar o funcional de Euler-Lagrange $I : \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned}
I(u) = &\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u(x)-u(y))^2K^s(x-y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2dx\\
&+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2dx - \int_{\mathbb{R}^3}G(u)dx,
\end{aligned}$$

cuja derivada é dada por

$$\begin{aligned}
I'(u)(v) = &\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))K^s(x-y)\,dx\,dy\\
&+\int_{\mathbb{R}^3}V(x)uvdx + \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u uvdx - \int_{\mathbb{R}^3}g(u)vdx,
\end{aligned}$$

onde $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(t)dt$ e $g(u) = f(u^+)$. Pontos críticos de I são soluções fracas de (2.6).

Lema 2.2.9 *A função*

$$u \mapsto \|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u(x)-u(y))^2K^s(x-y)\,dx\,dy + \int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2dx\right)^{1/2}$$

define uma norma $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ que é equivalente a norma usual de $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$.

A demonstração do lema acima é trivial e por isso não apresentaremos nesta tese. O próximo teorema garante a existência de solução fraca para o Problema 2.6.

Teorema 2.2.10 *Suponha que* $1 > s > 3/4$, $t \in (0,1)$, *e* (A1)–(A7) *estão satisfeitas. Então* (2.6) *tem uma solução não trivial.*

Demonstração. Por argumentos usuais, o funcional I possui a geometria do passo da montanha, ou seja, satisfaz as hipóteses do teorema do passo da montanha. Por isso, existe uma sequência de Cerami para I, isto é, existe $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$I(u_n) \to c,$$
$$(1 + \|u_n\|)I^{'}(u_n) \to 0.$$

onde

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$
$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\},$$

$e \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$, e e satisfaz $I(e) < 0$. O número c é chamado de nível do passo da montanha. Pela Observação 2.2.2

$$4I(u_n) - I'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} [f(u_n)u_n - 4F(u_n)]dx \geq \|u_n\|^2.$$

Isto implica que $\{u_n\}$ é limitada em $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$. Então, existe $u \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ tal que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para u em $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$. O Lema 2.2.8 e as hipóteses (A4) e (A5) implicam que u é um ponto crítico de I. De fato, tomando $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, da convergência fraca de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para u temos

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} (u_n(x) - u_n(y))(\psi(x) - \psi(y))K^s(x - y)dxdy$$

converge para

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} (u(x) - u(y))(\psi(x) - \psi(y))K^s(x - y)dxdy,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} V(x)u_n(x)\psi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u(x)\psi(x)dx.$$

quando $n \to \infty$. Seja B uma bola tal que $supp(\psi) \subset B$. Definindo

$$T(u,v) = \int_B u(x)v(x)\psi(x)dx,$$

temos que T é uma forma bilinear contínua definida em $L^{\frac{22_t^*}{2^*-1}}(B) \times L^{2_t^*}(\mathbb{R}^3)$. Pelo Corolário 1.2.8 a sequência $\{u_n|_B\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $u|_B$ em $L^{\frac{22_t^*}{2^*-1}}(B)$. Pelo Lema 2.2.8 e a imersão contínua de $\dot{\mathcal{X}}_{K^t}(\mathbb{R}^3)$ em $L^{2_t^*}(\mathbb{R}^3)$, a sequência $\{\phi_{u_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para ϕ_u em $L^{2_t^*}(\mathbb{R}^3)$. Estas duas últimas convergências, junto com a continuidade de T implicam que

$$T(u_n|_B, \phi_{u_n}) \to T(u|_B, \phi_u),$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}(x)u_n(x)\psi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u(x)u(x)\psi(x)dx.$$

As hipóteses (A_4), (A_5), o teorema da convergência dominada e as imersões compactas de $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ em $L^q(B)$ para $q \in [1, 2_s^*)$ implicam que

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(u_n)\psi dx \to \int_{\mathbb{R}^3} g(u)\psi dx.$$

Assim, por um lado temos

$$I'(u_n)(\psi) \to 0,$$

pois $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cerami, e por outro lado

$$\begin{aligned} I'(u_n)(\psi) = & \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} (u_n(x) - u_n(y))(\psi(x) - \psi(y))K^s(x-y)dxdy \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u_n\psi dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}u_n\psi dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(u_n)\psi dx, \end{aligned}$$

converge para

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} (u(x) - u(y))(\psi(x) - \psi(y))K^s(x-y)dxdy \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u\psi dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u\psi dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(u)\psi dx. \end{aligned}$$

Concluímos que

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u(x)-u(y))(\psi(x)-\psi(y))K^s(x-y)dxdy$$
$$+\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u\psi dx + \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u\psi dx - \int_{\mathbb{R}^3}g(u)\psi dx.$$

Por densidade, temos

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))K^s(x-y)dxdy$$
$$+\int_{\mathbb{R}^3}V(x)uvdx + \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u uvdx - \int_{\mathbb{R}^3}g(u)vdx.$$

para toda $v \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$. Em resumo, provamos que

$$I'(u) = 0.$$

Se $u \neq 0$ em $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ então u é uma solução fraca não trivial de (2.6), portanto o teorema segue. Suponha que $u = 0$. Afirmamos que existe $r \in (2, 2_s^*)$, tal que $\{u_n\}$ não converge para 0 em $L^r(\mathbb{R}^3)$. De fato, caso contrário, pelas hipóteses (A4) e (A5) e a limitação de $\{u_n\}$ em $L^2(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(u_n)u_n dx \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Pelo Corolário 2.2.5

$$\|u_n\|^2 \leq \|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} g(u_n)u_n dx + I'(u_n)u_n.$$

Como o lado direito da inequação acima converge para 0 segue que $u_n \to 0$ em $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$. Consequentemente,

$$c = \lim I(u_n) = 0.$$

Mas, esta igualdade não pode ocorrer, já que $c > 0$. Logo, podemos assumir que existem $R > 0$ e $\delta > 0$ tais que, passando a uma subsequência se necessário,

$$\int_{B_R(y_n)} u_n^2 dx \geq \delta,$$

para alguma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{Z}^3$ (Veja Lema 1.3.4). Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$w_n(x) := u_n(x + y_n).$$

Note que $w_n \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$. Mais ainda, por mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}
I(w_n) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u_n(x+y_n) - u_n(y+y_n))^2 K^s((x+y_n)-(y+y_n))\,dx\,dy \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} V(x)u_n(x+y_n)^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{w_n} w_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(u_n(x+y_n))dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u_n(z) - u_n(w))^2 K^s(z-w)dzdw + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} V(z)u_n(z)^2 dz \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(u_n(z))dz \\
&= I(u_n).
\end{aligned}$$

Analogamente, para cada $\phi \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned}
I'(w_n)\phi &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(w_n(x) - w_n(y))(\phi(x) - \phi(y))K^s(x-y)\,dx\,dy + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)w_n\phi dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{w_n} w_n \phi dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(w_n)\phi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u_n(x+y_n) - u_n(y+y_n))(\phi(x) - \phi(y))K^s((x+y_n)-(y+y_n))\,dx\,dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} V(x+y_n)u_n(x+y_n)\phi(x)dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}(x+y_n)u_n(x+y_n)\phi dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^3} g(u_n(x+y_n))\phi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u_n(z) - u_n(w)(\phi(z-y_n) - \phi(w-y_n))K^s(z-w)dzdw \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} V(z)u_n(z)\phi(z-y_n)dz + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}(z)u_n(z)\phi(z-y_n)dz \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^3} g(u_n(z))\phi(z-y_n)dz \\
&= I'(u_n)\overline{\phi}
\end{aligned}$$

onde $\overline{\phi}(x) = \phi(x - y_n)$. Isto implica que $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cerami para I no nível c. Analogamente, mostramos que $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$, $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para w_0 em $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ e que $I'(w_0) = 0$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $\{w_n\}$ converge em $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ para w_0. Então

$$\begin{aligned}\int_{B_R(0)} w_0^2 dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{B_R(0)} w_n^2 dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{B_R(0)} u_n(x+y_n)^2 dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{B_R(y_n)} u_n(z)^2 dz \geq \delta.\end{aligned}$$

Assim, w_0 é uma solução não trivial para (2.6). Logo, se $u = 0$, provamos que existe um ponto crítico para I, que é não trivial. Portanto, em qualquer caso, I possui um ponto crítico não trivial. ■

Usando nosso princípio de máximo, mostraremos que existe solução positiva para o sistema (2.6), no nosso próximo corolário.

Corolário 2.2.11 *A solução u encontrada no Teorema 2.2.10 é positiva q.t.p. em $\mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Para todo $v \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$, com $v \geq 0$ q.t.p., temos

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))K^s(x-y)\,dx\,dy + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)uvdx + \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u uv\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^3} g(u)v\,dx \geq 0.\end{aligned}$$

Se definirmos $a(x) = V(x) + \phi_u(x)$, obteremos que $a \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, porque $L^{2^*_t}(\mathbb{R}^3) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ e V é contínuo. Por (A1) e o Lema 2.2.5 temos $a(x) > 0$ em $\mathbb{R}^3$. Consequentemente

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))K^s(x-y)\,dx\,dy + \int_{\mathbb{R}^3} a(x)uv\,dx \geq 0.$$

para todo $v \in H^s(\mathbb{R}^3)$ com $v \geq 0$. Como $u \neq 0$, o Teorema 2.1.4 implica que $u > 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$. ■

2.3 Soluções de Energia Mínima para o Problema (2.6)

Para tornar nosso trabalho mais completo para o leitor, também provamos a existência de solução de energia mínima (ground state solution) para o problema (2.6), ou seja, mostraremos que existe uma solução u tal que para qualquer outra solução v, teremos $I(u) \leq I(v)$. Aqui, seguiremos as mesmas ideias de Alves, Souto e Soares em

[7]. Para conseguir solução de energia mínima para nosso problema, vamos considerar o seguinte funcional de Euler-Lagrange associado ao problema 2.6.

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u(x)-u(y))^2K^s(x-y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2dx$$
$$-\int_{\mathbb{R}^3}F(u)dx.$$

Observação 2.3.1 Define-se o conjunto de Nehari associado a I como sendo

$$\mathcal{N} = \{u \in H^s(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}; I'(u)u = 0\}.$$

Se f satisfaz (A3)–(A7), então

$$I_\infty = \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u)$$

coincide com o nível do passo da montanha associado a I (veja Apêndice A).

Teorema 2.3.2 *Se* (A1)–(A7) *são satisfeitas, então* (2.6) *possui uma solução de energia mínima.*

Demonstração. Definindo o funcional de Euler Lagrange $I : \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}(u(x)-u(y))^2K^s(x-y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2dx$$
$$-\int_{\mathbb{R}^3}F(u)dx,$$

e seguindo as mesmas ideias do Teorema 2.2.10, provamos que existe uma sequência de Cerami $\{w_n\}$ no nível do passo da montanha associado a I convergindo fraco para uma solução não nula u do sistema (2.6). Pela Observação 2.2.2 e o Lema de fatou

$$\begin{aligned}
4c &= \liminf_{n\to\infty}(4I(w_n) - I'(w_n)w_n)\\
&= \liminf_{n\to\infty}(\|w_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3}H(w_n)dx)\\
&\geq \liminf_{n\to\infty}\|w_n\|^2 + \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}H(w_n)dx\\
&\geq \|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3}H(u)dx\\
&= 4I(u) - I'(u)u\\
&= 4I(u).
\end{aligned}$$

onde $H(u) = uf(u) - 4F(u)$. Por definição, $u \in \mathcal{N}$, então $I(u) \geq \inf_{v\in\mathcal{N}} I(v)$. Pela Observação 2.3.1,

$$I(u) = \inf_{v\in\mathcal{N}} I(v).$$

Portanto, mostramos que u é uma solução de energia mínima para o problema. ■

2.4 Soluções de Energia Mínima para o Caso em que o Potencial é Assintoticamente Periódico

Nesta seção, estudamos a existência de solução de energia mínima para o Problema (2.6), quando V satisfaz a hipótese $(A1)$ e

(A8) Existe uma função V_p satisfazendo (A_1) e (A_2) tal que

$$\lim_{|x|\to\infty} |V(x) - V_p(x)| = 0;$$

(A9) $V(x) \leq V_p(x)$ e existe um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com $|\Omega| > 0$ e $V(x) < V_p(x)$ em Ω.

Assumiremos que V_p é um potencial periódico contínuo. Este caso segue as mesmas ideias de [7].

Teorema 2.4.1 *Suponha que* (A1), (A3)–(A9) *sejam satisfeitas. Então* (2.6) *tem uma solução de energia mínima.*

Demonstração. Em $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ podemos definir a norma

$$\|u\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} (u(x)-u(y))^2 K^s(x-y)\,dx\,dy + \int_{\mathbb{R}^3} V_p(x)u^2 dx\right)^{1/2}$$

e considerar o funcional,

$$I_p(u) = \frac{1}{2}\|u\|_p^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(u)dx.$$

Vimos na seção anterior, que existe $w_p \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ tal que $I_p'(w_p) = 0$ e $I_p(w_p) = c_p$, onde c_p é o nível do passo da montanha associado a I_p. Considere outra norma em $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$:

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} (u(x)-u(y))^2 K^s(x-y)\,dx\,dy + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2 dx\right)^{1/2}.$$

Então, defina

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(u)dx.$$

O funcional I tem a geometria do passo da montanha. Se c é o nível do passo da montanha associado a I então $c < c_p$. De fato, existe um t_* tal que $t_* w_p \in \mathcal{N}$ (veja

Proposição A.1) e ele é único com essa propriedade. Segue que

$$\begin{aligned} c &\leq I(t^* w_p) \\ &< I_p(t^* w_p) \\ &\leq \max_{t\geq 0} I_p(t w_p) \\ &= I_p(w_p) = c_p. \end{aligned}$$

Considere $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cerami no nível c associada com I. Analogamente ao caso periódico, provamos que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ e consequentemente, converge fracamente para algum $u \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$. Além disso, temos $I'(u) = 0$. A seguir, provaremos que $u \neq 0$. Suponha que $u = 0$. A respeito da sequência $\{u_n\}$, as seguintes igualdades são verdadeiras

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |V(x) - V_p(x)| u_n^2 dx = 0;$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |\|u_n\| - \|u_n\|_p| = 0;$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |I_p(u_n) - I(u_n)| = 0;$

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |I_p'(u_n)u_n - I'(u_n)u_n| = 0.$

Provaremos (i). Os limites em (ii), (iii) e (iv) são consequências imediatas de (i). Considere $\epsilon > 0$ e $A > 0$ tal que $\|u_n\|_2^2 < A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela hipótese (A8), existe $R > 0$ tal que, para todo $|x| > R$ temos

$$|V(x) - V_p(x)| < \frac{\epsilon}{2A}.$$

Mas $\{u_n\}$ converge fracamente para $u = 0$. Então, $u_n \to 0$ em $L^2(B_R(0))$. Esta convergência implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_R(0)} |V(x) - V_p(x)| u_n^2 dx < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $n \geq n_0$. Então, se $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} |V(x) - V_p(x)| u_n^2 dx \\ &= \int_{B_R(0)} |V(x) - V_p(x)| u_n^2 dx + \int_{(B_R(0))^c} |V(x) - V_p(x)| u_n^2 dx \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração de (i).

Considere $s_n > 0$ tal que $s_n u_n \in \mathcal{N}_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $\mathcal{N}_p = \{u \in \mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}; I_p'(u)u = 0\}$. Afirmamos que $\limsup_{n\to\infty} s_n \leq 1$. De fato, caso contrário, existiria $\delta > 0$ tal que, passando a uma subsequência se necessário, poderíamos assumir que $s_n \geq 1+\delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por (iv) teríamos $I_p'(u_n)u_n \to 0$, isto é,

$$\|u_n\|_p^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(u_n)u_n dx + o_n(1)$$

De $s_n u_n \in \mathcal{N}_p$ teríamos $I_p'(s_n u_n)u_n = 0$. Equivalentemente

$$s_n \|u_n\|_p^2 + s_n^3 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(s_n u_n) u_n dx$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{f(s_n u_n)}{(s_n u_n)^3} - \frac{f(u_n)}{(u_n)^3} \right] u_n^4 dx = \left(\frac{1}{s_n^2} - 1 \right) \|u_n\|_p^2 + o_n(1) \leq o_n(1). \tag{2.10}$$

Se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 em $L^q(\mathbb{R}^3)$ para todo $q \in (2, 2_s^*)$, então pelo Corolário 2.2.5

$$\|u_n\|^2 \leq \|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(u_n)u_n + I'(u_n)u_n$$

consequentemente, $\{u_n\}$ teria limite 0 em $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$ e isto entraria em contradição com o fato de $c > 0$. Portanto, existe uma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{Z}^n$, $R > 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$\int_{B_R(y_n)} u_n^2 dx \geq \beta > 0.$$

Tomando $v_n(x) := u_n(x + y_n)$, temos $\|v_n\| = \|u_n\|$ e assim podemos assumir que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para algum $v \in H^s(\mathbb{R}^3)$. Note que

$$\int_{B_R(0)} v^2 dx \geq \beta > 0\,.$$

A inequação (2.10), observação 2.2.2 e o lema de Fatou implicam que

$$\begin{aligned}
0 &< \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{f((1+\delta)v)}{((1+\delta)v)^3} - \frac{f(v)}{(v)^3} \right] v^4 dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{f((1+\delta)v_n)}{((1+\delta)v_n)^3} - \frac{f(v_n)}{(v_n)^3} \right] v_n^4 dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{f(s_n v_n)}{(s_n v_n)^3} - \frac{f(v_n)}{(v_n)^3} \right] v_n^4 dx \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{f(s_n u_n)}{(s_n u_n)^3} - \frac{f(u_n)}{(u_n)^3} \right] u_n^4 dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} o_n(1) = 0,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Portanto $\limsup_{n\to\infty} s_n \leq 1$. Afirmamos que para n suficientemente grande, $s_n > 1$. De fato, suponha que esta afirmação seja falsa. Neste caso, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $s_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que por (f_5), a função $H(u) := uf(u) - 4F(u)$ é crescente em $|u| \neq 0$. Então,

$$
\begin{aligned}
4c_p &= 4 \inf_{u\in N_p} I_p(u) \\
&\leq 4I_p(s_n u_n) \\
&= 4I_p(s_n u_n) - I_p'(s_n u_n)(s_n u_n) \\
&= s_n^2 \|u_n\|_p^2 + \int_{\mathbb{R}^3} (f(s_n u_n)(s_n u_n) - 4F(s_n u_n))\, dx \\
&\leq \|u_n\|_p^2 + \int_{\mathbb{R}^3} (f(u_n)(u_n) - 4F(u_n))\, dx \\
&\leq 4I(u_n) - I'(u_n)u_n + \int_{\mathbb{R}^3} |V(x) - V_p(x)| u_n^2 dx.
\end{aligned}
$$

Isto implica que $c_p \leq c$. Mas, esta última inequação é falsa, porque provamos anteriormente que $c < c_p$. Logo, temos que $s_n > 1$ para n suficientemente grande. Em resumo, provamos que

$$1 \leq \liminf_{n\to\infty} s_n \leq \limsup_{n\to\infty} s_n \leq 1,$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1. \tag{2.11}$$

O teorema fundamental do cálculo implica que

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(s_n u_n) dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(u_n) dx = \int_1^{s_n} \left[\int_{\mathbb{R}^3} f(\tau u_n) u_n dx \right] d\tau. \tag{2.12}$$

Também, por (A5), obtemos $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\tau u_n) u_n dx \leq C(s_n \|u_n\|^2 + s_n^{p-1} \|u_n\|^p), \tag{2.13}$$

para todo $\tau \in (1, s_n)$. Como a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $\mathcal{X}_{K^s}(\mathbb{R}^3)$, então, temos por (2.11), (2.12) e (2.13),

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(s_n u_n) dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(u_n) dx = o_n(1).$$

Logo

$$
\begin{aligned}
& I_p(s_n u_n) - I_p(u_n) \\
&= \frac{(s_n^2 - 1)}{2}\|u_n\|^2 + \frac{(s_n^4 - 1)}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(s_n u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^3} F(u_n) dx \\
&= o_n(1)
\end{aligned}
$$

pois $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 dx = \|\phi_{u_n}\|^2_{\dot{H}^t(\mathbb{R}^3)} \leq C\|u_n\|^4$ e $\{u_n\}$ é limitada. Por (iii) (veja página 51),

$$c_p \leq I_p(s_n u_n) = I_p(u_n) + o_n(1) = I(u_n) + o_n(1).$$

Passando o limite em $n \to \infty$, obtemos $c_p \leq c$. Mas, esta última desigualdade é falsa, porque provamos acima que $c < c_p$. Esta contradição foi gerada, porque supomos que $u = 0$. Segue que u é não trivial. Em particular,

$$I(u) \geq \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u).$$

Por outro lado, assim como no caso periódico, temos

$$I(u) \leq c = \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u).$$

Portanto u é uma solução de energia mínima para o problema (2.6). ■

Capítulo 3

Estimativa $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ para Soluções Fracas de Equações que Envolvem o Operador Integro-Diferencial e uma Aplicação.

Neste capítulo, mostraremos uma estimativa $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ para as soluções fracas do problema

$$-\mathcal{L}_K u + b(x)u = f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

com hipóteses apropriadas sobre b e f, e utilizaremos esta estimativa para mostrar a existência de soluções fracas para uma classe de equações de Schrödinger não locais com potencial assintótico no infinito e com operador integro-diferencial. Este capítulo é o conteúdo do trabalho feito por Duarte e Souto em [26].

3.1 Estimativa $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ para uma Equação de Schrödinger não Local em $\mathbb{R}^N$

Nesta seção, provaremos que existe uma constante positiva $M > 0$ tal que toda solução fraca do problema

$$-\mathcal{L}_K u + b(x)u = g(x, u) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

satisfaz

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M||u||_{2_s^*},$$

onde $b \geq 0$, $|g(x,t)| \leq h(x)|t|$ e $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ com $q > \frac{N}{2s}$. Alves e Miyagaki, em [5], usando a extensão s-harmônica de Caffarelli [13], mostraram um caso particular desta estimativa quando $-\mathcal{L}_K$ é o operador laplaciano fracionário. Em nosso caso não temos ainda uma extensão harmônica para operadores integro-diferencias, por isso não podemos usar esta ferramenta em nossos argumentos.

Seja $\beta > 1$. Defina

$$f(x) = x|x|^{2(\beta-1)},$$

$$g(x) = x|x|^{\beta-1}.$$

As funções f e g são diferenciáveis em todo $x \in \mathbb{R}$. Considere $x, y \in \mathbb{R}$ com $x \neq y$. Pelo teorema do valor médio, existem $\theta_1(x,y)$, $\theta_2(x,y) \in \mathbb{R}$, únicos por f e g serem crescentes, e tais que

$$f'(\theta_1(x,y)) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \tag{3.1}$$

e

$$g'(\theta_2(x,y)) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}. \tag{3.2}$$

Isto é,

$$(2\beta-1)|\theta_1(x,y)|^{2(\beta-1)} = \frac{x|x|^{2(\beta-1)} - y|y|^{2(\beta-1)}}{x-y}$$

e

$$\beta|\theta_2(x,y)|^{(\beta-1)} = \frac{x|x|^{(\beta-1)} - y|y|^{(\beta-1)}}{x-y}.$$

Implicando que,

$$|\theta_1(x,y)| = \left(\frac{1}{2\beta-1}\frac{x|x|^{2(\beta-1)} - y|y|^{2(\beta-1)}}{x-y}\right)^{\frac{1}{2(\beta-1)}} \tag{3.3}$$

e

$$|\theta_2(x,y)| = \left(\frac{1}{\beta}\frac{x|x|^{(\beta-1)} - y|y|^{(\beta-1)}}{x-y}\right)^{\frac{1}{(\beta-1)}}. \tag{3.4}$$

Observação 3.1.1 *No que segue, vamos considerar* $\theta_1(x,x) = \theta_2(x,x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Observação 3.1.2 *Note que,* $|\theta_1(x,y)| = |\theta_1(y,x)|$ *e* $|\theta_2(x,y)| = |\theta_2(y,x)|$ *para todos* $x, y \in \mathbb{R}$.

Nos próximos dois lemas, veremos que existe uma relação entre $\theta_1(x,y)$ e $\theta_2(x,y)$. Mostraremos que $|\theta_1(x,y)| \geq |\theta_2(x,y)|$. Esta desigualdade será usada para provar a nossa estimativa $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ citada no início da seção.

Lema 3.1.3 *Com a mesma notação adotada acima,*

$$|\theta_1(x,0)| \geq |\theta_2(x,0)|.$$

Demonstração. Se $x = 0$ não há o que provar. Suponha que $x \neq 0$. Por (3.3) e (3.4) temos

$$|\theta_1(x,0)| = \left(\frac{1}{2\beta - 1}\frac{x|x|^{2(\beta-1)}}{x}\right)^{\frac{1}{2(\beta-1)}} = \left(\frac{1}{2\beta-1}\right)^{\frac{1}{2(\beta-1)}}|x|$$

e

$$|\theta_2(x,0)| = \left(\frac{1}{\beta}\frac{x|x|^{\beta-1}}{x}\right)^{\frac{1}{(\beta-1)}} = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{(\beta-1)}}|x|.$$

Destas duas identidades, segue facilmente que

$$|\theta_1(x,0)| \geq |\theta_2(x,0)|$$

■

Observação 3.1.4 *Seja $\beta > 1$. Defina as funções reais*

$$m(x) := (\lambda - 1)(x^\beta + x^{-\beta}) - \lambda(x^{\beta-1} + x^{1-\beta}) + 2$$

e

$$p(x) := (\lambda - 1)(x^\beta + x^{-\beta}) + \lambda(x^{\beta-1} + x^{1-\beta}) - 2.$$

onde $\lambda = \frac{\beta^2}{2\beta-1}$. Então, $m(x) \geq 0$ e $p(x) \geq 0$ para todo $x > 0$. De fato, definindo a função $g(t) = \frac{t^{\beta+1}(\beta-1)m'(t)}{\beta(\lambda-1)}$ temos $g(1) = g'(1) = 0$ e $g''(t) > 0$ para todo $t > 1$. Isto implica que $m'(t) > 0$ para $t > 1$. De $m(1) = 0$ e $m(t) = m(t^{-1})$ para todo $t > 0$, concluímos que $m(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Para mostrar que $p(x) \geq 0$, basta notar que $p(1) = 0$, $p(t) = p(t^{-1})$ para todo $t > 0$ e $p'(t) > 0$ para todo $t > 1$.

Lema 3.1.5 *Com a mesma notação, se $x, y \in \mathbb{R}$ então*

$$|\theta_1(x,y)| \geq |\theta_2(x,y)|.$$

Demonstração. O caso em que $x = 0$ ou $y = 0$ segue facilmente do Lema 3.1.3 e Observação 3.1.2. O caso $x = y$ é imediato (veja Observação 3.1.2). Assim, podemos supor que $x \neq y$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Por (3.3) e (3.4), temos que

$$|\theta_1(x,y)| \geq |\theta_2(x,y)|$$

se, e somente se

$$\left(\frac{1}{2\beta-1}\frac{x|x|^{2(\beta-1)}-y|y|^{2(\beta-1)}}{x-y}\right)^{\frac{1}{2(\beta-1)}} \geq \left(\frac{1}{\beta}\frac{x|x|^{\beta-1}-y|y|^{\beta-1}}{x-y}\right)^{\frac{1}{(\beta-1)}}.$$

Esta última desigualdade ocorre se, e somente se,

$$\frac{1}{2\beta-1}\frac{x|x|^{2(\beta-1)}-y|y|^{2(\beta-1)}}{x-y} \geq \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{x|x|^{\beta-1}-y|y|^{\beta-1}}{x-y}\right)^2$$

que por sua vez ocorre se, e somente se,

$$\lambda(x-y)(x|x|^{2(\beta-1)}-y|y|^{2(\beta-1)}) \geq \left(x|x|^{\beta-1}-y|y|^{\beta-1}\right)^2,$$

isto é,

$$\lambda(|x|^{2\beta}-xy|y|^{2(\beta-1)}-yx|x|^{2(\beta-1)}+|y|^{2\beta}) \geq |x|^{2\beta}-2xy|x|^{\beta-1}|y|^{\beta-1}+|y|^{2\beta}.$$

As hipóteses sobre x e y implicam que a última inequação é equivalente a

$$\begin{aligned} &\lambda\left[\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta}-\left(xy\frac{|y|^{\beta-2}}{|x|^{\beta}}\right)-\left(\frac{xy|x|^{\beta-2}}{|y|^{\beta}}\right)+\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\beta}\right] \\ &\geq \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta}-2\frac{x}{|x|}\frac{y}{|y|}+\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\beta} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Provaremos que (3.5) é verdadeira. Suponha que $x \cdot y > 0$. Então,

$$\begin{aligned} &\lambda\left[\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta}-\left(xy\frac{|y|^{\beta-2}}{|x|^{\beta}}\right)-\left(\frac{xy|x|^{\beta-2}}{|y|^{\beta}}\right)+\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\beta}\right]-\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta}+2\frac{x}{|x|}\frac{y}{|y|}-\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\beta} \\ &=\lambda\left[\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta}-\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\beta-1}-\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta-1}+\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\beta}\right]-\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta}+2-\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\beta} \\ &=(\lambda-1)\left[\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta}+\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{-\beta}\right]-\lambda\left[\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta-1}+\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{-\beta+1}\right]+2 \\ &=m\left(\frac{|x|}{|y|}\right). \end{aligned}$$

Se $x \cdot y < 0$, então

$$\begin{aligned} &\lambda\left[\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta}-\left(xy\frac{|y|^{\beta-2}}{|x|^{\beta}}\right)-\left(\frac{xy|x|^{\beta-2}}{|y|^{\beta}}\right)+\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\beta}\right]-\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta}+2\frac{x}{|x|}\frac{y}{|y|}-\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\beta} \\ &=\lambda\left[\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta}+\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\beta-1}+\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta-1}+\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\beta}\right]-\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta}-2-\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\beta} \\ &=(\lambda-1)\left[\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta}+\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{-\beta}\right]+\lambda\left[\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{\beta-1}+\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^{-\beta+1}\right]-2 \\ &=p\left(\frac{|x|}{|y|}\right). \end{aligned}$$

Pela Observação 3.1.4, temos que $m\left(\frac{|x|}{|y|}\right) \geq 0$ e $p\left(\frac{|x|}{|y|}\right) \geq 0$. Portanto (3.5) é verdadeira e consequentemente o Lema 3.1.5 também. ■

Nosso principal resultado desta seção, será demonstrado a seguir.

Proposição 3.1.6 *Sejam $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ com $q > \frac{N}{2s}$, $N > 2s$ e $v \in E \subset \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_K v + b(x)v & = g(x,v) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ \qquad\qquad u & \in E \end{cases}$$

onde $E = \{u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} b(x)u^2 dx < \infty\}$, g é uma função contínua satisfazendo

$$|g(x,s)| \leq h(x)|s|$$

para $s \geq 0$ e b é uma função positiva em $\mathbb{R}^N$. Então, existe uma constante $M = M(q, ||h||_{L^q})$ tal que

$$||v||_\infty \leq M||v||_{2_s^*}.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R}^N; |v(x)|^{\beta-1} \leq n\right\}$$

e

$$B_n := \mathbb{R}^N \setminus A_n.$$

Considere

$$f_n(t) := \begin{cases} t|t|^{2(\beta-1)} & se \quad |t|^{\beta-1} \leq n \\ n^2 t & se \quad |t|^{\beta-1} > n \end{cases}$$

e

$$g_n(t) := \begin{cases} t|t|^{(\beta-1)} & se \quad |t|^{\beta-1} \leq n \\ nt & se \quad |t|^{\beta-1} > n. \end{cases}$$

Note que f_n e g_n são funções contínuas e são diferenciáveis exceto nos pontos $n^{\frac{1}{\beta-1}}$ e $-n^{\frac{1}{\beta-1}}$. Além disso, suas derivadas são limitadas por constantes. Isto implica que f_n e g_n são funções lipschtzianas. Assim, definindo

$$v_n := f_n \circ v$$

e

$$w_n := g_n \circ v,$$

temos que $v_n, w_n \in E$. Por (K_2)

$$\begin{aligned}
[v, v_n] = & \int_{A_n}\int_{A_n} (v_n(x) - v_n(y))(v(x) - v(y))K(x-y)dxdy \\
& + \int_{B_n}\int_{B_n} (v_n(x) - v_n(y))(v(x) - v(y))K(x-y)dxdy \\
& + 2\,[v, v_n]_{A_n \times B_n}
\end{aligned}$$

Por (3.1), se $x, y \in A_n$, então

$$v_n(x) - v_n(y) = f_n'(\theta_1(x,y))(v(x) - v(y))$$

onde $\theta_1(x,y) = \theta_1(v(x), v(y))$. Portanto,

$$\begin{aligned}
[v, v_n] = & \int_{A_n}\int_{A_n} (2\beta - 1)|\theta_1(x,y)|^{2(\beta-1)}(v(x) - v(y))^2 K(x-y)dxdy \\
& + n^2 \int_{B_n}\int_{B_n} (v(x) - v(y))^2 K(x-y)dxdy + 2\,[v, v_n]_{A_n \times B_n}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Analogamente, por (3.2)

$$\begin{aligned}
[w_n, w_n] = & \int_{A_n}\int_{A_n} \beta^2|\theta_2(x,y)|^{2(\beta-1)}(v(x) - v(y))^2 K(x-y)dxdy \\
& + n^2 \int_{B_n}\int_{B_n} (v(x) - v(y))^2 K(x-y)dxdy + 2\,[w_n, w_n]_{A_n \times B_n}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $\theta_2(x,y) = \theta_2(v(x), v(y))$. Pelo Lema 3.1.5

$$\begin{aligned}
[w_n, w_n] \leq & \int_{A_n}\int_{A_n} \beta^2|\theta_1(x,y)|^{2(\beta-1)}(v(x) - v(y))^2 K(x-y)dxdy \\
& + n^2 \int_{B_n}\int_{B_n} (v(x) - v(y))^2 K(x-y)dxdy + 2\,[w_n, w_n]_{A_n \times B_n}\,.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Isto implica que,

$$\begin{aligned}
& [w_n, w_n] + \int_{\mathbb{R}^N} b(x) w_n^2 dx - [v, v_n] - \int_{\mathbb{R}^N} b(x) v v_n dx \\
& \leq (\beta - 1)^2 \int_{A_n}\int_{A_n} |\theta_1(x,y)|^{2(\beta-1)}(v(x) - v(y))^2 K(x-y)dxdy \\
& + 2\,[w_n, w_n]_{A_n \times B_n} - 2\,[v, v_n]_{A_n \times B_n}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Pela equação (3.6)

$$\begin{aligned}
& [v, v_n] + \int_{\mathbb{R}^N} b(x) v v_n dx - 2\,[v, v_n]_{A_n \times B_n} \\
& \geq (2\beta - 1) \int_{A_n}\int_{A_n} |\theta_1(x,y)|^{2(\beta-1)}(v(x) - v(y))^2 K(x-y)dxdy,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

pois, $b(x)vv_n = b(x)w_n^2 \geq 0$. Substituindo (3.10) na inequação (3.9), obtemos

$$\begin{aligned}
&[w_n, w_n] + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)w_n^2 dx - [v, v_n] - \int_{\mathbb{R}^N} b(x)vv_n dx \\
&\leq \frac{(\beta-1)^2}{2\beta-1}\left([v, v_n] + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)vv_n dx\right) \\
&\quad +2\,[w_n, w_n]_{A_n\times B_n} + (-2 - \frac{2(\beta-1)^2}{2\beta-1})\,[v, v_n]_{A_n\times B_n}\,,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&[w_n, w_n] + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)w_n^2 dx \\
&\leq (\frac{(\beta-1)^2}{2\beta-1} + 1)\left([v, v_n] + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)vv_n dx\right) \\
&\quad +2\,[w_n, w_n]_{A_n\times B_n} + (-2 - \frac{2(\beta-1)^2}{2\beta-1})\,[v, v_n]_{A_n\times B_n} \\
&= \frac{\beta^2}{2\beta-1}\left([v, v_n] + \int_{\mathbb{R}^N} bvv_n dx\right) \\
&\quad +2\,[w_n, w_n]_{A_n\times B_n} + (-2 - \frac{2(\beta-1)^2}{2\beta-1})\,[v, v_n]_{A_n\times B_n} \\
&\leq \beta \int_{\mathbb{R}^N} g(x, v)v_n dx \\
&\quad +2\,[w_n, w_n]_{A_n\times B_n} + (-2 - \frac{2(\beta-1)^2}{2\beta-1})\,[v, v_n]_{A_n\times B_n}\,.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Em resumo,

$$\begin{aligned}
[w_n, w_n] \quad &+ \int_{\mathbb{R}^N} b(x)w_n^2 dx \leq \beta \int_{\mathbb{R}^N} g(x, v)v_n dx \\
&+2\,[w_n, w_n]_{A_n\times B_n} + (-2 - \frac{2(\beta-1)^2}{2\beta-1})\,[v, v_n]_{A_n\times B_n}\,.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Definindo a função,

$$r(s, t) = 2(ns - t|t|^{\beta-1})^2 - C(s-t)(n^2 s - t|t|^{2(\beta-1)}).$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e

$$C = 2 + \frac{2(\beta-1)^2}{2\beta-1}$$

por um cálculo simples, obtemos

$$r(s, t) \leq 0, \tag{3.14}$$

para todo $|s| > n^{\frac{1}{\beta-1}}$ e $|t| \leq n^{\frac{1}{\beta-1}}$ (veja apêndice B). Tomando $s = v(x)$ e $t = v(y)$ para $x \in B_n$ e $y \in A_n$ e substituindo em (3.14), obtemos

$$2(w(x) - w(y))^2 - C(v(x) - v(y))(v_n(x) - v_n(y)) \leq 0.$$

Logo,

$$+2\left[w_n, w_n\right]_{A_n\times B_n} + (-2 - \frac{2(\beta-1)^2}{2\beta-1})\left[v, v_n\right]_{A_n\times B_n} \leq 0.$$

Pela inequação (3.13),

$$[w_n, w_n] + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)w_n^2 dx \leq \beta \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v)v_n dx. \tag{3.15}$$

Seja $S > 0$ a melhor constante que verifica,

$$||u||_{2_s^*}^2 \leq S||u||_{H^s}^2.$$

para todo $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Pela inequação (3.15) e (K_2)

$$\begin{aligned}\left(\int_{A_n} |w_n|^{2_s^*} dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{2_s^*} dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}}\\ &\leq S||w_n||^2\\ &\leq S\beta \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v(x))v_n(x)dx\\ &\leq S\beta \int_{\mathbb{R}^N} h(x)w_n^2 dx\\ &\leq S\beta||h||_q||w_n||_{\frac{2q}{q-1}}^2.\end{aligned}$$

Mas, temos $|w_n| \leq |v|^\beta$ em B_n e $|w_n| = |v|^\beta$ em A_n. Isto implica em

$$\left(\int_{A_n} |v|^{\beta 2_s^*} dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq S\beta||h||_q \left[\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\frac{2q\beta}{q-1}} dx\right]^{\frac{q-1}{q}}.$$

Pelo teorema da convergência monótona (Teorema 4.1 em [39])

$$||v||_{2_s^*\beta} \leq (\beta S||h||_q)^{\frac{1}{2\beta}}||v||_{2\beta q_1} \tag{3.16}$$

onde $q_1 = \frac{q}{q-1}$. Defina

$$\eta := \frac{2_s^*}{2q_1}$$

e note que $\eta > 1$. Quando $\beta = \eta$, temos $2\beta q_1 = 2_s^*$. Então, por (3.16),

$$||v||_{2_s^*\eta} \leq (\eta S||h||_q)^{\frac{1}{2\eta}}||v||_{2_s^*}. \tag{3.17}$$

Agora, tomando $\beta = \eta^2$ em (3.16), obtemos

$$||v||_{2_s^*\eta^2} \leq \eta^{\frac{1}{\eta^2}}(S||h||_q)^{\frac{1}{2\eta^2}}||v||_{2_s^*\eta}. \tag{3.18}$$

Por (3.17), temos

$$||v||_{2_s^*\eta^2} \leq \eta^{(\frac{1}{\eta^2}+\frac{1}{2\eta})}(S||h||_q)^{(\frac{1}{2\eta^2}+\frac{1}{2\eta})}||v||_{2_s^*}. \tag{3.19}$$

Indutivamente, podemos mostrar que

$$||v||_{2_s^*\eta^m} \leq \eta^{(\frac{1}{2\eta}+\frac{1}{\eta^2}+\ldots+\frac{m}{2\eta^m})}(S||h||_q)^{(\frac{1}{2\eta}+\frac{1}{2\eta^2}+\ldots+\frac{1}{2\eta^m})}||v||_{2_s^*} \tag{3.20}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Como

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{m}{2\eta^m} = \frac{1}{2(\eta-1)^2}$$

e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2\eta^m} = \frac{1}{2(\eta-1)}$$

podemos escrever, para todo $m > 0$,

$$||v||_{2_s^*\eta^m} \leq \eta^{\frac{1}{2(\eta-1)^2}}(S_r||h||_q)^{\frac{1}{2(\eta-1)}}||v||_{2_s^*}.$$

Recordando que

$$||v||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||v||_p$$

e que $\eta > 1$, temos

$$||v||_\infty \leq M||v||_{2_s^*}.$$

para

$$M = \eta^{\frac{1}{2(\eta-1)^2}}(S_r||h||_q)^{\frac{1}{2(\eta-1)}}$$

e

$$\eta = \frac{N(q-1)}{q(N-2s)}.$$

Concluímos a prova da proposição 3.1.6 notando que M depende somente de q e $||h||_q$.

■

3.2 Aplicação em uma Classe de Equações de Schrödinger

Nesta seção, usaremos a estimativa $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ provada na seção anterior, para mostrar a existência de solução para uma classe de equações do tipo Schrödinger não local com operador integro-diferencial. Mais precisamente, estudaremos o problema

$$(P) \qquad -\mathcal{L}_K u + V(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n,$$

onde $-\mathcal{L}_K$ é um operador integro-diferencial com núcleo de ordem $s \in (0,1)$. Vamos supor que o potencial V é contínuo e satisfaz

- (V_1) $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) > 0$;

Observe que, V sendo contínuo implica que

- (V_2) $V(x) \leq V_\infty$ para alguma constante $V_\infty > 0$ e para todos $x \in B_1(0)$.

Note que (V_1) implica que

- (V_3) existem $R > 0$ e $\Lambda > 0$ tais que
$$V(x) \geq \Lambda$$
para todos $|x| \geq R$.

Assumiremos também que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função satisfazendo,

- (f_1) $|f(t)| \leq c_0|t|^{p-1}$, para alguma constante $c_0 > 0$ e $p \in (2, 2_s^*)$;

- (f_2) Existe $\theta > 2$ tal que
$$\theta F(t) \leq tf(t);$$
para todos $t \in \mathbb{R}$.

- (f_3) $f(t) > 0$ para todo $t > 0$ e $f(t) = 0$ para todo $t < 0$.

O principal resultado desta seção é o Teorema 3.2.11. Em [6], Alves e Souto estudam um problema análogo, considerando o operador laplaciano em vez do operador integro-diferencial.

No problema (P) consideraremos o espaço E definido como

$$E = \left\{ u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < \infty \right\}. \tag{3.21}$$

O espaço E é um espaço de Hilbert com a norma

$$||u|| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y))^2 K(x-y) dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O Funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (P) é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx,$$

onde

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

O Funcional I pertence a $C^1(E, \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$I'(u)v = [u, v] + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)uvdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx.$$

Defina $I_0 : \mathcal{X}_{K_0}(B_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$I_0(u) := \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y))^2 K(x-y)dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx,$$

onde V_∞ é a constante dada em (V_2). O funcional I_0 possui a geometria do passo da montanha. Denotaremos por d o nível do passo da montanha associado a I_0, isto é

$$d = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_0(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], \mathcal{X}_{K_0}(B_1)); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}, \tag{3.22}$$

com e fixado e verificando $I_0(e) < 0$. Note que d depende somente de V_∞, θ e f.

Para mostrar a existência de solução para o problema acima, vamos definir um problema auxiliar.

3.2.1 Um Problema Auxiliar

Assim como em [6], modificaremos o problema, definindo um problema auxiliar. Como o operador $-\mathcal{L}_K$ é não local, não podemos usar as mesmas ideias usadas em [6].

Definiremos o problema auxiliar do seguinte modo. Para $k = \frac{2\theta}{\theta-2}$, vamos considerar

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(t) & se \quad kf(t) \le V(x)t \\ \frac{V(x)}{k}t & se \quad kf(t) > V(x)t, \end{cases}$$

$$g(x,t) = \begin{cases} f(t) & se \quad |x| \le R \\ \tilde{f}(x,t) & se \quad |x| > R. \end{cases} \tag{3.23}$$

e

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_K u + V(x)u = g(x,u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u \in E \end{cases} \tag{3.24}$$

A constante R acima, é a constante que aparece em (V_3). As funções $\tilde{f}$ e g são Caratheodory. Segue da definição de g, G, F e $\tilde{f}$ que para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$,

(1) $\tilde{f}(x,t) \leq f(t)$;

(2) $g(x,t) \leq \frac{V(x)}{k}t$,se $|x| \geq R$;

(3) $G(x,t) = F(t)$ se $|x| \leq R$;

(4) $G(x,t) \leq \frac{V(x)}{2k}t^2$ se $|x| > R$,

onde

$$G(x,t) = \int_0^t g(x,s)ds.$$

O funcional de Euler-Lagrange associado ao problema auxiliar é dado por,

$$J(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx.$$

O funcional $J \in C^1(E,\mathbb{R})$ e

$$\begin{aligned} J'(u)v = & \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x)-u(y))\,(v(x)-v(y))\,K(x-y)dxdy \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)uvdx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)vdx. \end{aligned}$$

Por argumentos usuais, o funcional J tem a geometria do passo da montanha. Pelo Teorema do passo da montanha existe uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$J'(u_n) \to 0 \text{ e } J(u_n) \to c, \tag{3.25}$$

onde $c > 0$ é o nível do passo da montanha associado a J, isto é

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)), \tag{3.26}$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],E); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$$

e e é a função fixada em (3.22). Por definição temos

$$c \leq d, \tag{3.27}$$

uniformemente em $R > 0$.

A seguir, provaremos que as sequências de Palais-Smale associadas ao funcional J são limitadas.

Lema 3.2.1 *A sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.*

Demonstração. Denotando por

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq R\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^N; |x| > R \text{ e } V(x)u(x) \geq kf(u(x))\right\}$$

e

$$B = \left\{x \in \mathbb{R}^N; |x| > R \text{ e } V(x)u(x) < kf(u(x))\right\}$$

temos por (f_2), (3) e (4)

$$\begin{aligned}
& J(u) - \frac{1}{\theta}J'(u)u \\
&= \left(\frac{\theta-2}{4\theta}\right)||u||^2 + \frac{1}{2k}||u||^2 + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{\theta}g(x,u)u - G(x,u)\right)dx \\
&= \left(\frac{\theta-2}{4\theta}\right)||u||^2 + \frac{1}{2k}||u||^2 + \int_{A}\left(\frac{1}{\theta}g(x,u)u - G(x,u)\right)dx \\
&\quad + \int_{B}\left(\frac{1}{\theta}g(x,u)u - G(x,u)\right)dx \\
&= \left(\frac{\theta-2}{4\theta}\right)||u||^2 + \frac{1}{2k}||u||^2 + \int_{A}\left(\frac{1}{\theta}f(u)u - F(u)\right)dx \\
&\quad + \int_{B}\left(\frac{1}{\theta}g(x,u)u - G(x,u)\right)dx \\
&\geq \left(\frac{\theta-2}{4\theta}\right)||u||^2 + \frac{1}{2k}||u||^2 + \int_{B}\frac{1}{\theta}g(x,u)udx - \frac{1}{2k}\int_B V(x)u^2dx \\
&= \left(\frac{\theta-2}{4\theta}\right)||u||^2 + \int_{B}\frac{1}{\theta}g(x,u)udx \\
&\quad + \left(\frac{1}{2k}||u||^2 - \frac{1}{2k}\int_B V(x)u^2dx\right) \\
&\geq \left(\frac{\theta-2}{4\theta}\right)||u||^2.
\end{aligned}$$

Assim

$$|J(u)| + |J'(u)u| \geq \left(\frac{\theta-2}{4\theta}\right)||u||^2, \tag{3.28}$$

para todos $u \in E$. Esta última inequação garante que a sequência é limitada. ∎

Agora, nosso objetivo é mostrar que o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale. Antes disso, provaremos alguns resultados preliminares.

Sejam $r > R$ e

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^N; r < |x| < 2r\right\}.$$

Considere $\eta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função, tal que

$$\eta = 1 \text{ em } B^c_{2r}(0),\ \ \eta = 0 \text{ em } B_r(0),\ \ 0 \leq \eta \leq 1 \ \text{ e } \ |\nabla\eta| < \frac{2}{r}.$$

Note que

$$(B_r \times B_r)^c = (B_r^c \times \mathbb{R}^N) \cup (B_r \times B_r^c). \tag{3.29}$$

Faremos a seguinte decomposição

$$B_r^c \times \mathbb{R}^N = (A \times \mathbb{R}^N) \cup (B_{2r}^c \times B_r) \cup (B_{2r}^c \times A) \cup (B_{2r}^c \times B_{2r}^c) \tag{3.30}$$

e

$$B_r \times B_r^c = (B_r \times A) \cup (B_r \times B_{2r}^c). \tag{3.31}$$

Lema 3.2.2 *Temos que*

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} (u_n(x)-u_n(y))(\eta(x)u_n(x)-\eta(y)u_n(y))K(x-y)dxdy \\
&\quad + \int_{B_{2r}^c}\int_{B_r} (u_n(x)-u_n(y))(\eta(x)u_n(x)-\eta(y)u_n(y))K(x-y)dxdy \\
&\geq -\int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} u_n(y)^2 K(x-y)dxdy.
\end{aligned}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} (u_n(x)-u_n(y))(\eta(x)u_n(x)-\eta(y)u_n(y))K(x-y)dxdy \\
&\quad + \int_{B_{2r}^c}\int_{B_r} (u_n(x)-u_n(y))(\eta(x)u_n(x)-\eta(y)u_n(y))K(x-y)dxdy \\
&= \int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} u_n(x)(u_n(x)-u_n(y))K(x-y)dxdy \\
&\quad - \int_{B_{2r}^c}\int_{B_r} u_n(y)(u_n(x)-u_n(y))K(x-y)dxdy \\
&= \int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} u_n(x)(u_n(x)-u_n(y))K(x-y)dxdy \\
&\quad - \int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} u_n(y)(u_n(x)-u_n(y))K(x-y)dydx \\
&= \int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} (u_n(x)-u_n(y))^2 K(x-y)dxdy \\
&\quad + \int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} (u_n(y)+u_n(x))(u_n(x)-u_n(y))K(x-y)dxdy \\
&= \int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} (u_n(x)-u_n(y))^2 K(x-y)dxdy \\
&\quad + \int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} u_n(x)^2 - u_n(y)^2 K(x-y)dxdy \\
&\geq -\int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} u_n(y)^2 K(x-y)dxdy.
\end{aligned}$$

■

Lema 3.2.3 *Seja $\epsilon > 0$. Existe $r_0 > 0$ tal que, se $r > r_0$ então*

$$\int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} u_n(y)^2 K(x-y)dxdy < \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Para cada $y \in B_r(0)$,

$$B_r(y) \subset B_{2r}(0).$$

Então

$$\begin{aligned} &\int_{B_{2r}(0)^c} K(x-y)dx \\ &\leq \int_{B_r(y)^c} K(x-y)dx \\ &= \int_{B_r(0)^c} K(z)dz. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Pelo Lema 3.2.1, existe $L > 0$ tal que $||u_n||_{L^2}^2 < L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por (K_3) (veja definição 1.1.1), existe $r_0 > 0$ tal que

$$\int_{B_r(0)^c} K(z)dz < \frac{\epsilon}{L},$$

para todo $r > r_0$. Então, por (3.32), para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r > r_0$

$$\begin{aligned} &\int_{B_r(0)}\int_{B_{2r}(0)^c} u_n(y)^2 K(x-y)dxdy \\ &= \int_{B_r(0)} u_n(y)^2 \int_{B_{2r}(0)^c} K(x-y)dxdy \\ &\leq \int_{B_r(0)} u_n(y)^2 \int_{B_r(0)^c} K(z)dzdy \\ &= \int_{B_r(0)^c} K(z)dz \int_{B_r(0)} u_n(y)^2 dy \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{L} L = \epsilon. \end{aligned}$$

■

Lema 3.2.4 *Existem constantes $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ tais que*

$$\begin{aligned} &\int_A \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(y)||(u_n(x)-u_n(y))||(\eta(x)-\eta(y))|K(x-y)dxdy \\ &\leq \frac{2K_1}{r}||u_n||_{L^2(A)}[u_n,u_n]^{\frac{1}{2}} + K_2||u_n||_{L^2(A)}[u_n,u_n]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\eta(x)-\eta(y)|^2 K(x-y)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\eta(z+y)-\eta(y)|^2 K(z)dz \\
&= \int_{B_1(0)} |\eta(z+y)-\eta(y)|^2 K(z)dz \\
&\quad + \int_{B_1^c(0)} |\eta(z+y)-\eta(y)|^2 K(z)dz \\
&\leq \frac{4}{r^2}\int_{B_1(0)} |z|^2 K(z)dz + 4\int_{B_1(0)^c} K(z)dz \\
&\leq \frac{4}{r^2}P_1 + 4P_2,
\end{aligned}$$

onde

$$P_1 = \int_{B_1} |z|^2 K(z)dz$$

e

$$P_2 = \int_{B_1^c} K(z)dz.$$

Seja $K_1 = 2\sqrt{P_1}$ e $K_2 = 2\sqrt{P_2}$. Então, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
&\int_A \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(y)||(u_n(x)-u_n(y))||(\eta(x)-\eta(y))|K(x-y)dxdy \\
&\leq (\frac{2\sqrt{P_1}}{r} + 2\sqrt{P_2}) \int_A |u_n(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |(u_n(x)-u_n(y))|^2 K(x-y)dx\right)^{\frac{1}{2}} dy \\
&\leq (\frac{K_1}{r} + K_2)||u_n||_{L^2(A)}[u_n,u_n]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

■

Lema 3.2.5 *Para as mesmas constantes $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ do Lema 3.2.4*

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r}\int_A |u_n(x)-u_n(y)||\eta(x)u_n(x)-\eta(y)u_n(y)|K(x-y)dxdy \\
&\leq \frac{K_1}{r}||u_n||_{L^2(A)}[u_n,u_n]^{\frac{1}{2}} + K_2||u_n||_{L^2(A)}[u_n,u_n]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r}\int_A |u_n(x)-u_n(y)||\eta(x)u_n(x)-\eta(y)u_n(y)|K(x-y)dxdy \\
&= \int_{B_r}\int_A |u_n(x)||u_n(x)-u_n(y)||\eta(x)|K(x-y)dxdy \\
&= \int_A\int_{B_r} |u_n(x)||u_n(x)-u_n(y)||n(x)-n(y)|K(x-y)dydx \\
&= \int_A\int_{B_r} |u_n(y)||u_n(y)-u_n(x)||n(y)-n(x)|K(y-x)dxdy.
\end{aligned}$$

Usando (K_1) e o Lema 3.2.4, provamos este lema. ■

Lema 3.2.6 *Temos que,*

$$
\begin{aligned}
&-\int_{B_{2r}^c}\int_A u_n(y)(u_n(x)-u_n(y))(\eta(x)-\eta(y))K(x-y)dxdy\\
&\leq \frac{K_1}{r}||u_n||_{L^2(A)}[u_n,u_n]^{\frac{1}{2}}+K_2||u_n||_{L^2(A)}[u_n,u_n]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
&-\int_{B_{2r}^c}\int_A u_n(y)(u_n(x)-u_n(y))(\eta(x)-\eta(y))K(x-y)dxdy\\
&=\int_{B_{2r}^c}\int_A (u_n(x)-u_n(y))^2(\eta(x)-\eta(y))K(x-y)dxdy\\
&\quad-\int_{B_{2r}^c}\int_A u_n(x)(u_n(x)-u_n(y))(\eta(x)-\eta(y))K(x-y)dxdy\\
&=\int_{B_{2r}^c}\int_A (u_n(x)-u_n(y))^2(n(x)-1)K(x-y)dxdy\\
&\quad-\int_{B_{2r}^c}\int_A u_n(x)(u_n(x)-u_n(y))(n(x)-n(y))K(x-y)dxdy\\
&\leq-\int_{B_{2r}^c}\int_A u_n(x)(u_n(x)-u_n(y))(n(x)-n(y))K(x-y)dxdy\\
&=-\int_{B_{2r}^c}\int_A u_n(x)(u_n(y)-u_n(x))(n(y)-n(x))K(x-y)dxdy\\
&\leq\int_{B_{2r}^c}\int_A |u_n(x)||u_n(y)-u_n(x)||n(y)-n(x)|K(x-y)dxdy\\
&=\int_A\int_{B_{2r}^c} |u_n(x)||u_n(y)-u_n(x)||n(y)-n(x)|K(y-x)dydx\\
&\leq \frac{K_1}{r}||u_n||_{L^2(A)}[u_n,u_n]^{\frac{1}{2}}+K_2||u_n||_{L^2(A)}[u_n,u_n]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Na última inequação, usamos o Lema 3.2.4. ■

Provaremos que o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale. Isto garantirá a existência de solução no nível c para o problema auxiliar (veja equação (3.26)).

Proposição 3.2.7 *Suponha que f satisfaz $(f_1)-(f_3)$ e V satisfaz (V_1). Então o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Pelo Lema 3.2.1 a sequência de Palais-Smale $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Podemos supor que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para algum $u\in E$. Pela Proposição 1.3.5, $\eta u_n\in\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ e $||\eta u_n||\leq C||u_n||$, para alguma constante $C>0$. Como $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então a sequência $\{\eta u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em E. Logo $I'(u_n)(\eta u_n)=o_n(1)$, ou seja,

$$[u_n,\eta u_n]+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u_n^2\eta dx=\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u_n)\eta u_n dx+o_n(1).$$

Mas, note que $[u_n,\eta u_n]=[u_n,\eta u_n]_{B_r^c\times\mathbb{R}^N}+[u_n,\eta u_n]_{B_r\times B_r^c}$, porque $\eta=0$ em B_r (veja equação (3.29)). Por (3.29), (3.30) e (3.31) temos,

$$\begin{aligned}
&[u_n,\eta u_n]_{A\times\mathbb{R}^N}+[u_n,\eta u_n]_{B_{2r}^c\times A}+[u_n,\eta u_n]_{B_{2r}^c\times B_{2r}^c}\\
&\quad+[u_n,\eta u_n]_{B_{2r}^c\times B_r}+[u_n,\eta u_n]_{B_r\times B_{2r}^c}+[u_n,\eta u_n]_{B_r\times A}\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u_n^2\eta dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u_n)\eta u_n dx+o_n(1)
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2.2,

$$\begin{aligned}
&[u_n,\eta u_n]_{A\times\mathbb{R}^N}+[u_n,\eta u_n]_{B_{2r}^c\times A}+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u_n^2\eta dx\\
&\leq\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u_n)\eta u_n dx+\int_{B_r}\int_{B_{2r}^c}u_n(y)^2K(x-y)dxdy-[u_n,\eta u_n]_{B_r\times A}+o_n(1)
\end{aligned}$$

Acima, usamos que $[u_n,\eta u_n]_{B_{2r}^c\times B_{2r}^c}=[u_n,u_n]_{B_{2r}^c\times B_{2r}^c}\geq 0$, pois $\eta=1$ em B_{2r}^c. Se C e D são subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ e $u\in E$, então

$$\begin{aligned}
[u,\eta u]_{C\times D}&=\int_C\int_D(u(x)-u(y))(\eta u(x)-\eta u(y))K(x-y)dxdy\\
&=\int_C\int_D\eta(x)(u(x)-u(y))^2K(x-y)dxdy\\
&\quad+\int_C\int_D u(y)(u(x)-u(y))(\eta(x)-\eta(y))K(x-y)dxdy.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_A\int_{\mathbb{R}^N}\eta(x)(u_n(x)-u_n(y))^2K(x-y)dxdy+\\
&\quad+\int_{B_{2r}^c}\int_A\eta(x)(u_n(x)-u_n(y))^2K(x-y)dxdy+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u_n^2\eta dx\\
&\leq\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u_n)\eta u_n dx+\int_{B_r}\int_{B_{2r}^c}u_n(y)^2K(x-y)dxdy-[u_n,\eta u_n]_{B_r\times A}\\
&\quad-\int_A\int_{\mathbb{R}^N}u_n(y)(u_n(x)-u_n(y))(\eta(x)-\eta(y))K(x-y)dxdy\\
&\quad-\int_{B_{2r}^c}\int_A u_n(y)(u_n(x)-u_n(y))(\eta(x)-\eta(y))K(x-y)dxdy+o_n(1).
\end{aligned}$$

Dos Lemas 3.2.4, 3.2.5 e 3.2.6, conseguimos constantes $K_1, K_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n^2\eta dx \\
&\leq \int_A \int_{\mathbb{R}^N} \eta(x)(u_n(x)-u_n(y))^2K(x-y)dxdy \\
&\quad + \int_{B_{2r}^c}\int_A \eta(x)(u_n(x)-u_n(y))^2K(x-y)dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n^2\eta dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)\eta u_n dx + \int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} u_n(y)^2K(x-y)dxdy \\
&\quad + \frac{K_1}{r}||u_n||_{L^2(A)}[u_n,u_n]^{\frac{1}{2}} + K_2||u_n||_{L^2(A)}[u_n,u_n]^{\frac{1}{2}} + o_n(1).
\end{aligned}$$

Por (2), (f_3) e $r > R$

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)\eta u_n dx \leq \frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^N} \eta V(x)u_n^2 dx.$$

Isto implica que,

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{k}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n^2\eta dx \\
&\leq \int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} u_n(y)^2K(x-y)dxdy \\
&\quad + \frac{K_1}{r}||u_n||_{L^2(A)}[u_n,u_n]^{\frac{1}{2}} + K_2||u_n||_{L^2(A)}[u_n,u_n]^{\frac{1}{2}} + o_n(1).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2.1, existe $C_1 > 0$ tal que $||u_n|| \leq C_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que, para alguma constante $C > 0$

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{k}\right)\int_{|x|>2r} V(x)u_n^2 dx \\
&\leq \int_{B_r}\int_{B_{2r}^c} u_n(y)^2K(x,y)dxdy + C(\frac{1}{r}+1)||u_n||_{L^2(A)} + o_n(1).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Considere $\epsilon > 0$. Pelo Lema 3.2.3, podemos tomar r, suficientemente grande, satisfazendo

$$\int_{|x|>2r} V(x)u_n^2 dx \leq \frac{\epsilon(k-1)}{3k} + C(\frac{1}{r}+1)||u_n||_{L^2(A)} + o_n(1) \tag{3.34}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Também, podemos assumir que

$$||u||_{L^2(A)} < \frac{\epsilon(k-1)}{6C(\frac{1}{r}+1)k}. \tag{3.35}$$

Pela propriedade (2) de g e (f_3)

$$g(x,u_n)u_n \leq \frac{V(x)}{k}u_n^2,$$

para todo x, com $|x| > 2r > R$. Por (3.33),

$$\int_{|x|>2r} g(x,u_n)u_n dx \leq \frac{\epsilon}{3} + C\left(\frac{1}{r}+1\right)\frac{k}{k-1}||u_n||_{L^2(A)} + o_n(1).$$

Por (3.34), (3.35) e as imersões compactas dos espaços $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$, podemos tomar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_1$ então

$$\int_{|x|>2r} g(x,u_n)u_n dx \leq \frac{5\epsilon}{6}.$$

Podemos supor que $r > 0$ satisfaz

$$\int_{|x|>2r} g(x,u)u dx \leq \frac{\epsilon}{12}.$$

Novamente, usando as imersões compactas dos espaços $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ encontramos $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0 > n_1$ e tal que se $n > n_0$ então

$$\left|\int_{|x|\leq 2r} g(x,u_n)u_n dx - \int_{|x|\leq 2r} g(x,u)u dx\right| < \frac{\epsilon}{12}.$$

Logo, para $n > n_0$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)u dx\right| < \epsilon,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)u dx.$$

De $I'(u_n)u_n = o_n(1)$ concluímos que $||u_n|| \to ||u||$ e portanto $\{u_n\}$ converge para u em E. ■

No próximo corolário, vamos usar que o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale para mostrar que o problema auxiliar possui uma solução no nível do passo da montanha c.

Corolário 3.2.8 *Suponha (V_1), $(f_1) - (f_3)$. Então, existe $u \in E$ tal que $J(u) = c$ e $J'(u) = 0$. Mais ainda, $u \geq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.*

Demonstração. Por (3.25) e Proposição 3.2.7, existe $u \in E$ tal que $J(u) = c$ e $J'(u) = 0$. Seja $A = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| > R\} \cap \{x \in \mathbb{R}^N; u(x) < 0\}$. Se $x \in A$, então, por (f_3), $g(x,u(x)) = \frac{V(x)}{k}u(x)$ e se $x \in A^c$, então $g(x,u) \geq 0$. Segue que

$$0 \geq [u,u^-] + \int_{A^c} V(x)uu^- = \left(\frac{1}{k}-1\right)\int_A V(x)uu^- + \int_{A^c} g(x,u)u^- dx \geq 0.$$

Então,

$$[u, u^-] = 0.$$

Isto implica que $u^- = 0$. ■

Como uma consequência das inequações (3.27) e (3.28) temos a proposição:

Proposição 3.2.9 *Se V e f satisfazem $(V_1), (V_2)$ e $(f_1) - (f_3)$ respectivamente, então a solução u do problema auxiliar satisfaz*

$$||u||^2 \leq 2kd,$$

uniformemente em $R > 0$.

3.2.2 Existência de Solução para o Problema (P)

Nesta seção, mostraremos que nas hipóteses listadas no início do capítulo, existe Λ^* tal que se $\Lambda > \Lambda^*$, o problema P possui uma solução fraca, mais precisamente provaremos o Teorema 3.2.11.

Pelo Corolário 3.2.8, existe $u \in E$ tal que $J(u) = c$ e $J'(u) = 0$. Usando a estimativa $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, provada neste capítulo (Proposição 3.1.6), temos a seguinte estimativa para a solução do problema auxiliar.

Lema 3.2.10 *A solução u do problema auxiliar (3.24) satisfaz*

$$||u||_\infty \leq M(2Skd)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Considere as funções

$$H(x,t) \;=\; \begin{cases} f(t) & se \quad |x| < R \quad ou \quad f(t) \leq \frac{V(x)}{k} t \\ 0 & se \quad |x| \geq R \quad e \quad\;\; f(t) > \frac{V(x)}{k} t \end{cases}$$

e

$$b(x) \;=\; \begin{cases} V(x) & se \quad |x| < R \quad ou \quad f(u) \leq \frac{V(x)}{k} u \\ \left(1 - \frac{1}{k}\right) V(x) & se \quad |x| \geq R \quad e \quad\;\; f(u) > \frac{V(x)}{k} u. \end{cases}$$

Note que a função u é solução de

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_K u + b(x)u = H(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in E. \end{cases}$$

Por (f_1),

$$|H(x,t)| \leq c_0 |t|^{p-1}$$

para $p \in (2, 2_s^*)$. Isto implica que,

$$|H(x,u)| \leq h(x)|u|,$$

onde $h(x) = C_0|u|^{p-2}$. Note que $h \in L^{\frac{2_s^*}{p-2}}$ com

$$||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C(2ksd)^{\frac{p-2}{2}},$$

como o número p satisfaz

$$p < 2_s^* = 2 + \frac{2s}{N}2_s^*,$$

então,

$$q = \frac{2_s^*}{p-2} > \frac{N}{2s}.$$

Pela Proposição 3.1.6 e imersões contínuas dos espaços $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$

$$||u||_\infty \leq M||u||_{2_s^*} \leq MS^{\frac{1}{2}}||u||,$$

Pela Proposição 3.2.9,

$$||u||_\infty \leq M(2kSd)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.36}$$

■

No próximo teorema, veremos que se Λ for maior ou igual a uma constante, que não depende de R, então a solução do problema auxiliar é uma solução do problema principal.

Teorema 3.2.11 *Suponha que V satisfaz (V_1)-(V_3) e que f satisfaz (f_1)-(f_3). Se $\Lambda > \Lambda^* := k^{\frac{p}{2}}c_0M^{p-2}(2Sd)^{\frac{p-2}{2}}$, então o problema (P) tem uma solução não negativa e não trivial.*

Demonstração. De fato, seja $|x| \geq R$. Se $u(x) = 0$ então, por definição, $f(u(x)) = g(x, u(x))$. Se $u(x) > 0$, então, como $p > 2$, usando o lema anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{f(u(x))}{u(x)} &\leq c_0|u|^{p-2} \\ &\leq c_0||u||_\infty^{p-2} \\ &= \frac{c_0||u||_\infty^{p-2}}{\Lambda}\Lambda \\ &\leq \frac{k^{\frac{p}{2}}c_0M^{p-2}(2Sd)^{\frac{p-2}{2}}}{\Lambda}\frac{V(x)}{k} \end{aligned}$$

Defina

$$\Lambda^* = k^{\frac{p}{2}}c_0M^{p-2}(2Sd)^{\frac{p-2}{2}}.$$

Se $\Lambda > \Lambda^*$, então
$$\frac{f(u(x))}{u(x)} \leq \frac{V(x)}{k}.$$
Pela definição de g temos $g(x, u(x)) = f(u(x))$. Então, $g(x, u(x)) = f(u(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Portanto, u é uma solução não negativa para o problema (P). ■

Capítulo 4

Um Teorema Abstrato do Tipo Berestycki-Lions e Aplicações para Diversos Operadores

Neste capítulo, provaremos um teorema que nos fornece ponto crítico para funcionais definidos em espaços de Banach. Além disso, veremos que este ponto crítico está em um determinado conjunto, o conjunto de Pohozaev. Como uma aplicação deste teorema abstrato, mostraremos a existência de solução para uma classe de problemas do tipo Berestycki-Lions com soma de operadores do tipo s-laplaciano com $s \in (0,1)$, além de outras importantes aplicações para outras classes de operadores. Destacamos que neste capítulo, tivemos a colaboração do professor Claudianor Oliveira Alves.

4.1 Preliminares

Seja X um espaço de Banach reflexivo e $\psi_1, ..., \psi_n, \phi : X \to \mathbb{R}$ funcionais contínuos. Vamos supor que:

- (X_1) Existe uma aplicação $* : [0, \infty) \times X \to X$ e $\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_\phi \in \mathbb{R}$ tais que

  (i) $\psi_i(*(t,u)) = t^{\lambda_i}\psi_i(u)$, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$;

  (ii) $\phi(*(t,u)) = t^{\lambda_\phi}\phi(u)$;

  (iii) $0 < \max\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} < \lambda_\phi$;

(iv) $*(0,u)=0$, para todo $u \in X$;

(v) para cada $u \in X$ fixo, a aplicação $t \longmapsto *(t,u)$ é contínua.

No que segue, vamos usar a seguinte notação

$$u_t := *(t,u),$$

$$J := \sum_{i=1}^{n} \psi_i$$

e

$$I = J - \phi.$$

Também vamos supor que X possui uma desigualdade do tipo Polya-Szegö, ou seja, vamos supor que:

- (X_2) Existem subconjuntos fracamente fechados X^+ e $\tilde{X}$ de X e uma função $Q : X^+ \to \tilde{X}$, chamada de simetrização, que cumpre as seguintes condições:

  (i) $\psi_i(Q(u)) \leq \psi_i(u)$, para todo $u \in X^+$ e para todo $i \in \{1,2,...,n\}$;

  (ii) $\phi(Q(u)) \geq \phi(u)$, para todo $u \in X^+$;

  (iii) Se $u \in \tilde{X}$, então $u_t \in \tilde{X}$, para todo $t \geq 0$.

Além do que foi posto acima, vamos supor que:

- (f_1) existe $u \in X$ tal que $\phi(u) > 0$;

- (f_2) $\phi(0) = 0$;

- (f_3) $\psi_i(u) \geq 0$ para todo $u \in X$. Além disso, $\psi_i(u) = 0,\ \forall i \in \{1,2,...,n\} \Leftrightarrow u = 0$;

- (f_4) existe $r > 0$ tal que se $0 < ||u|| < r$, então
$$\sum_{i=i}^{n} \lambda_i \psi_i(u) > \lambda_\phi \phi(u);$$

- (f_5) seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência satisfazendo $\phi(u_n) \geq 0$. Se $J(u_n) \to 0$, então
$$||u_n|| \to 0.$$

  Se $\{J(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

- (f_6) se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\tilde{X}$ que converge fracamente para $u \in \tilde{X}$, então

$$\limsup_{n\to\infty} \phi(u_n) \leq \phi(u);$$

- (f_7) se $\{u_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para u em X, então

$$\psi_i(u) \leq \liminf_{p\to\infty} \psi_i(u_p).$$

para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Definição 4.1.1 *Fixados $\psi_1, ..., \psi_n$ e ϕ definimos o conjunto de Pohozaev $\mathcal{P}$ da seguinte maneira:*

$$\mathcal{P} = \{u \in X \setminus \{0\}\,; \lambda_1\psi_1(u) + ... + \lambda_n\psi_n(u) = \lambda_\phi\phi(u)\}\,. \tag{4.1}$$

Definimos também o operador associado ao conjunto de Pohozaev como

$$K(u) = \lambda_1\psi_1(u) + ... + \lambda_n\psi_n(u) - \lambda_\phi\phi(u) \tag{4.2}$$

Note que $K^{-1}(0) = \mathcal{P} \cup \{0\}$.

Também definimos

$$\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cap X^+.$$

No que segue, vamos supor que

- (P)
$$\inf_{u\in P} I(u) = \inf_{u\in P^+} I(u).$$

Proposição 4.1.2 *Seja $u \in X$ satisfazendo $\phi(u) > 0$, então existe um único $t^* > 0$ tal que $u_{t^*} \in \mathcal{P}$. Além disso,*

$$I(u_{t^*}) = \max_{t>0} I(u_t).$$

Demonstração. Seja $u \in X$ tal que $\phi(u) > 0$. Por (f_2) temos $u \neq 0$. Para cada $t > 0$, seja

$$h(t) := I(u_t).$$

Por (i) e (ii) de (X_1),

$$h(t) = t^{\lambda_1}\psi_1(u) + ... + t^{\lambda_n}\psi_n(u) - t^{\lambda_\phi}\phi(u).$$

Por (iii) de (X_1) e (f_3), para t suficientemente pequeno, $h(t) > 0$. Além disso, como $\phi(u) > 0$ temos,

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = -\infty.$$

Isto prova que a função h possui um máximo em $t > 0$. Seja $t^* > 0$ satisfazendo

$$h(t^*) = I(u_{t^*}) = \max_{t>0} I(u_t).$$

De $h'(t^*) = 0$, concluímos que $u_{t^*} \in \mathcal{P}$.

Para mostrar que t^* é único, note que $u_t \in \mathcal{P}$ se, e somente se,

$$\lambda_1 t^{\lambda_1}\psi_1(u) + ... + \lambda_n t^{\lambda_n}\psi_n(u) = \lambda_\phi t^{\lambda_\phi}\phi(u).$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $\lambda_1 = \max\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ temos que $u_t \in \mathcal{P}$ se, e somente se,

$$\lambda_1\psi_1(u) = -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i t^{(\lambda_i-\lambda_1)}\psi_i(u) + \lambda_\phi t^{(\lambda_\phi-\lambda_1)}\phi(u). \tag{4.3}$$

Mas, por (iii) de (X_1), (f_3) e $\phi(u) > 0$, a função $m(t) = -\sum_{i=2}^n \lambda_i t^{(\lambda_i-\lambda_1)}\psi_i(u) + \lambda_\phi t^{(\lambda_\phi-\lambda_1)}\phi(u)$ possui derivada positiva em $(0, +\infty)$ e, portanto, deve existir somente um $t > 0$ que satisfaz a equação (4.3). ■

Corolário 4.1.3 *O conjunto de Pohozaev, $\mathcal{P}$, é não vazio.*

Demonstração. Basta combinar (f_1) com a proposição anterior. ■

Proposição 4.1.4 *Existe uma constante $r > 0$ tal que*

$$||u|| \geq r,$$

para todo $u \in \mathcal{P}$.

Demonstração. Para todo $u \in \mathcal{P}$

$$K(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\psi_i(u) - \lambda_\phi\phi(u) = 0$$

Por outro lado, note que, por (f_4) existe $r > 0$ tal que, se $||u|| < r$ e $u \neq 0$, então

$$K(u) \ = \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i\psi_i(u) - \lambda_\phi\phi(u) > 0.$$

Portanto, se $u \in \mathcal{P}$, então

$$||u|| \geq r.$$

■

Teorema 4.1.5 *O funcional I é limitado inferiormente em $\mathcal{P}$ e, além disso, existe $u_0 \in \mathcal{P}$ tal que*

$$I(u_0) = \inf_{u\in\mathcal{P}} I(u).$$

Demonstração. Se $u \in \mathcal{P}$, então por (f_3) e (iii) de (X_1) temos

$$I(u) = J(u) - \phi(u) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_\phi}\psi_i(u) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_\phi}\right)\psi_i(u) \geq 0 \qquad (4.4)$$

Seja

$$I_\infty = \inf_{u\in\mathcal{P}} I(u) = \inf_{u\in\mathcal{P}^+} I(u)$$

e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência minimizante em $\mathcal{P}^+$, ou seja, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^+$ e

$$I(u_n) \to I_\infty.$$

Seja $\{Q(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{X}$ satisfazendo (veja (X_2))

$$J(Q(u_n)) \leq J(u_n)$$

e

$$\phi(Q(u_n)) \geq \phi(u_n).$$

Como cada $u_n \in \mathcal{P}$, então

$$\phi(Q(u_n)) \geq \phi(u_n) > 0$$

Pela Proposição 4.1.2, existe $t_n^* > 0$ tal que $(Q(u_n))_{t_n^*} \in \mathcal{P}$. Observe que

$$I_\infty \leq I\left((Q(u_n))_{t_n^*}\right) \leq I\left((u_n)_{t_n^*}\right) \leq \max_{t>0} I\left((u_n)_t\right) = I(u_n),$$

onde na última igualdade usamos a unicidade no sentido da Proposição 4.1.2 e o fato de $u_n \in \mathcal{P}$. Portanto,

$$I\left((Q(u_n))_{t_n^*}\right) \to I_\infty.$$

e por (iii) de (X_2), $(Q(u_n))_{t_n^*} \in \tilde{X}$. Em resumo, provamos que sem perda de generalidade, podemos considerar que a sequência minimizante $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está em $\tilde{X} \cap \mathcal{P}$. Pela equação (4.4), $\{J(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Por (f_5), a sequência $\{u_n\}$ é limitada em X. Como $\tilde{X}$ é fracamente fechado, podemos supor que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para algum $u \in \tilde{X}$, a menos de subsequência. De $u_n \in \mathcal{P}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\phi(u_n) > 0.$$

Logo, por (f_6)

$$\phi(u) \geq 0.$$

Suponha, por absurdo que $\phi(u) = 0$. Então, temos

$$\phi(u_n) \to 0.$$

Mas, cada u_n pertence à $\mathcal{P}$. Logo,

$$J(u_n) \to 0.$$

Por (f_5), temos

$$||u_n|| \to 0,$$

contradizendo a Proposição 4.1.4. Portanto

$$\phi(u) > 0.$$

Isto implica que $u \neq 0$. Pela Proposição 4.1.2, existe $t^* > 0$ tal que

$$u_{t^*} \in \mathcal{P}.$$

Por (i) e (ii) de (X_1), para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I(u_p) &= \max_{t>0} I\left((u_p)_t\right) \\ &\geq I\left((u_p)_{t^*}\right) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \psi_i((u_p)_{t^*}) - \phi((u_p)_{t^*}) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n (t^*)^{\lambda_i} \psi_i(u_p) - (t^*)^{\lambda_\phi} \phi(u_p) \end{aligned}$$

Esta desigualdade, (f_6) e (f_7) implicam que

$$\begin{aligned} I_\infty &\geq \liminf_{p\to\infty} \left(\textstyle\sum_{i=1}^n (t^*)^{\lambda_i} \psi_i(u_p) - (t^*)^{\lambda_\phi} \phi(u_p)\right) \\ &\geq \textstyle\sum_{i=1}^n (t^*)^{\lambda_i} \psi_i(u) - (t^*)^{\lambda_\phi} \phi(u) \\ &= I(u_{t^*}). \end{aligned}$$

E, como $u_{t^*} \in \mathcal{P}$, então

$$I_\infty = I(u_{t^*}).$$

■

Proposição 4.1.6 *Temos que,*

$$\inf_{u\in\mathcal{P}} I(u) > 0.$$

Demonstração. Pela equação (4.4) temos $\inf_{u\in\mathcal{P}} I(u) \geq 0$. Se $\inf_{u\in\mathcal{P}} I(u) = 0$, então, novamente pela equação (4.4), poderíamos selecionar uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{P}$ tal que $J(u_n) \to 0$. Mas, pela hipótese (f_5) isto implicaria que $||u_n|| \to 0$. Esta última convergência contradiz a Proposição 4.1.4. Portanto,

$$\inf_{u\in\mathcal{P}} I(u) > 0.$$

$\blacksquare$

4.2 Prova do Teorema Principal

Lema 4.2.1 *Sejam $u \in \mathcal{P}$ e $t \geq 0$. Defina $\gamma(t) := u_t$. Então*

$$\lim_{t\to\infty} I(\gamma(t)) = -\infty.$$

Demonstração. De fato,

$$I(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^{n} t^{\lambda^i}\psi_i(u) - t^{\lambda_\phi}\phi(u). \tag{4.5}$$

Como $u \in \mathcal{P}$, segue que,

$$\phi(u) > 0.$$

Esta última desigualdade e a hipótese (iii) de (X_1) demonstram o lema. $\blacksquare$

Lema 4.2.2 *Seja $\gamma : \mathbb{R} \to X$ uma função contínua, satisfazendo*

- $\gamma(0) = 0$;
- $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} I(\gamma(t)) = -\infty$.

Então, existe $t_0 > 0$ tal que $\gamma(t_0) \in \mathcal{P}$.

Demonstração. Suponha que $\gamma(t) \neq 0$ para todo $t > 0$. Seja

$$K(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\psi_i(u) - \lambda_\phi\phi(u).$$

Por (f_4), existe $r > 0$ tal que se $0 < ||u|| < r$ então

$$K(u) > 0.$$

Como $\gamma(0) = 0$, γ e K são contínuas, então para t suficientemente pequeno, temos

$$K(\gamma(t)) > 0.$$

Note que, por (iii) de (X_1) e (f_3)

$$K(u) = \lambda_\phi I(u) + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_\phi)\psi_i(u) \leq \lambda_\phi I(u).$$

Assim, por hipótese e pela última desigualdade, temos, para t suficientemente grande, que $K(\gamma(t)) < 0$. Pelo teorema do valor intermediário, existe $\bar{t} > 0$ tal que

$$K(\gamma(\bar{t})) = 0.$$

Portanto, $\gamma(\bar{t}) \in \mathcal{P}$. Para o caso geral, considere γ satisfazendo as hipóteses do lema. Por hipótese, existe $t_0 > 0$ tal que $I(\gamma(t)) < 0$ para todo $t > t_0$. Como $I(0) = 0$ (hipóteses (f_2) e (f_3)), então $\gamma(t) \neq 0$ para todo $t > t_0$. Defina

$$\tilde{t} = \sup \{t \in [0, +\infty); \gamma(t) = 0\}.$$

Por continuidade, $\gamma(\tilde{t}) = 0$. Defina,

$$\beta(t) = \gamma(t + \tilde{t})$$

e note que $\beta(0) = 0$, $\lim_{t \to \infty} I(\beta(t)) = -\infty$ e $\beta(t) \neq 0$, para todo $t > 0$. Pela primeira parte do que provamos, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\beta(t_0) \in \mathcal{P}.$$

Portanto $\gamma(t_0 + \tilde{t}) \in \mathcal{P}$. ■

A seguir, usaremos o lema de deformação que se encontra em [32] para mostrar o teorema principal desta seção. Este lema de deformação é uma versão para operadores localmente lipschitz do lema de deformação usual (veja Lema 1.14 de [53]). Uma função $u \in X$ é um ponto crítico de um funcional localmente lipschitz $I : X \to \mathbb{R}$, se $0 \in \partial I(u)$, onde $\partial I(u)$ denota o gradiente generalizado de I. Recordamos que o gradiente generalizado de I em u é o conjunto

$$\partial I(u) = \{\mu \in X^* \,:\, I^0(u, v) \geq \langle \mu, v\rangle,\, \forall v \in X\}$$

onde $I^0(u, v)$ denota a derivada direcional de I em u na direção de $v \in X$ e é definido por

$$I^0(u, v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \downarrow 0} \frac{I(u + h + \lambda v) - I(u + h)}{\lambda}.$$

Para mais informações sobre funcionais localmente lipschtz e gradiente generalizado, indicamos os trabalhos de Chang em [18], Clarke em [20] e Santos em [49].

Teorema 4.2.3 *(Lema de Deformação) Sejam X um espaço de Banach, I um funcional localmente lipschitz. Quando $a \in \mathbb{R}$, vamos denotar por $I^a = \{u \in X; I(u) \leq a\}$. Suponha que existem $c \in \mathbb{R}, S \subset E$ e $\alpha, \delta, \epsilon_0 > 0$ satisfazendo*

$$\beta(x) := \min\{||z||_{E^*}; z \in \partial I(x)\} \geq \alpha, \text{ para todo } x \in I^{-1}([c-\epsilon_0, c+\epsilon_0]) \cap S_{2\delta},$$

onde $S_{2\delta}$ é uma 2δ-vizinhança de S, então para $0 < \epsilon < \min\{\frac{\delta\alpha}{2}, \epsilon_0\}$ existe $\eta : E \to E$, um homeomorfismo, satisfazendo:

- *$\eta(u) = u$, se $u \notin I^{-1}([c-\epsilon_0, c+\epsilon_0]) \cap S_{2\delta}$;*
- *$\eta(I^{c+\epsilon} \cap S) \subset I^{c-\epsilon}$;*
- *$I(\eta(u)) \leq I(u)$ para todo $u \in X$.*

Observação 4.2.4 *Seja $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional localmente lipschitz. Seja $x_0 \in X$ e suponha que*

$$0 \notin \partial I(x_0).$$

Então existe $\epsilon > 0$ tal que, se $|x - x_0| < \epsilon$ então

$$\beta(x) := \inf\{||z||_{E^*}; z \in \partial I(x)\} > \epsilon.$$

De fato, caso contrário, para cada $\epsilon = \frac{1}{n}$, existiria x_n em X satisfazendo

$$|x_0 - x_n| < \frac{1}{n} \text{ e } \beta(x_n) < \frac{1}{n}.$$

Consequentemente, existiria $z_n \in \partial I(x_n)$ satisfazendo

$$||z_n||_{X^*} < \frac{1}{n}.$$

Pela propriedade (A_4) da página 18 de [49], temos

$$\begin{aligned} I^0(x,v) &\geq \limsup_{n\to\infty} I^0(x_n, v) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} z_n(v) \\ &= 0 = 0(v). \end{aligned}$$

para todo $v \in E$. Portanto $0 \in \partial I(x_0)$, uma contradição.

Com este resultado, provaremos o principal teorema deste capítulo.

Teorema 4.2.5 *Sejam X, ϕ, ψ_1,..., ψ_n satisfazendo $(f_1) - (f_7), (X_1)$, (X_2) e (P). Então, existe $u \in \mathcal{P}$ tal que $I(u) = \inf_{w\in\mathcal{P}} I(w)$, onde*

$$I = \sum_{i=1}^{n} \psi_i - \phi.$$

Se I é localmente lipschtz, então u é um ponto crítico de I em X, ou seja,

$$0 \in \partial I(u).$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.1.5, existe $u \in \mathcal{P}$ tal que

$$I(u) = \inf_{w \in \mathcal{P}} I(w).$$

Suponha por absurdo que $u \notin \partial I(x_0)$. Neste caso, pela Observação 4.2.4, existe $\epsilon' > 0$ tal que

- Se $|x - u| < \epsilon'$ então $\beta(x) > \epsilon'$.

Aplicando o Teorema 4.2.3 para $c = \inf_{u \in \mathcal{P}} I(u)$, $\delta = \frac{\epsilon'}{4}$, $\epsilon_0 = \frac{c}{2}$, $\alpha = \epsilon'$ e $S = B_{\frac{\epsilon'}{2}}(u)$, conseguimos um fluxo η satisfazendo

- $\eta(u) = u$, se $u \notin I^{-1}([c - \epsilon_0, c + \epsilon_0]) \cap S_{2\delta}$;

- $\eta(I^{c+\epsilon} \cap S) \subset I^{c-\epsilon}$;

- $I(\eta(u)) \leq I(u)$ para todo $u \in X$,

para algum $\epsilon > 0$. Defina

$$\beta(t) := \eta(\gamma(t)),$$

onde $\gamma(t) = u_t$. Por (v) de (X_1), a função β é contínua. E, ainda por (iv) de (X_1) e $I(0) < c - \epsilon_0$,

$$\beta(0) = \eta(\gamma(0)) = \eta(0) = 0.$$

Pelo Lema 4.2.1

$$\lim_{t \to +\infty} I(\beta(t)) = \lim_{t \to +\infty} I(\eta(\gamma(t))) \leq \lim_{t \to +\infty} I(\gamma(t)) = -\infty. \tag{4.6}$$

Agora, pelo Lema 4.2.2, existe $t^* > 0$ tal que $\beta(t^*) \in \mathcal{P}$. Portanto,

$$c \leq I(\beta(t^*)) \leq \max_{t > 0} I(\beta(t)). \tag{4.7}$$

Como $I(u) = c < c + \epsilon$, $\gamma(1) = u$, I e γ são contínuas, então podemos tomar $\tau > 0$ tal que se $t \in [1 - \tau, 1 + \tau]$ então $\gamma(t) \in I^{c+\epsilon} \cap S_{2\delta}$. Assim, se $t \in [1 - \tau, 1 + \tau]$ temos pelo lema de deformação que

$$I(\beta(t)) = I(\eta(\gamma(t))) \leq c - \epsilon.$$

Suponha agora que $t \notin [1 - \tau, 1 + \tau]$. Neste caso,

$$I(\beta(t)) = I(\eta(\gamma(t))) \leq I(\gamma(t)) < \max_{t > 0} I(\gamma(t)) = I(\gamma(1)) = c$$

(Na penúltima igualdade, usamos a Proposição 4.1.2). Em qualquer caso, temos

$$I(\beta(t)) < c.$$

Pela equação (4.6) e continuidade de $I(\beta(t))$, existe $t_1 > 0$ tal que

$$\max_{t>0} I(\beta(t)) = I(\beta(t_1)) < c. \tag{4.8}$$

As equações (4.7) e (4.8) geram uma contradição. Portanto

$$0 \in \partial I(u).$$

$\blacksquare$

Corolário 4.2.6 *Sejam X, ϕ, ψ_1,..., ψ_n satisfazendo $(f_1) - (f_7), (X_1)$, (X_2) e (P). Suponha que ϕ, ψ_1,..., $\psi_n \in C^1(X, \mathbb{R})$. Existe $u \in \mathcal{P}$ que satisfaz $I(u) = \inf_{w\in\mathcal{P}} I(w)$, onde*

$$I = \sum_{i=1}^{n} \psi_i - \phi.$$

Além disso, u é um ponto crítico de I em X, ou seja,

$$I'(u) = 0.$$

Demonstração. Basta notar que se $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, então

$$\partial I(u) = \{I'(u)\},$$

para todo $u \in X$. Portanto, o corolário segue como consequência do teorema anterior.

$\blacksquare$

Nas próximas seções, mostraremos algumas aplicações do Corolário 4.2.6 e uma aplicação do Teorema 4.2.5.

4.3 Aplicações - Soma de s-Laplacianos com $0 < s < 1$

Considere $s_m \in (0, 1)$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo:

(i) $\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s} = 0$;

(ii) $\limsup_{s\to+\infty} \frac{|f(s)|}{|s|^{q-1}} < \infty$, para algum $q \in (1, 2^*_{s_m} - 1)$ onde

$$2^*_{s_m} = \frac{2N}{N - 2s_m}.$$

(iii) Existe $\tau > 0$ tal que $G(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau g(s)ds > 0$, onde

$$g(s) = f(s) - s. \tag{4.9}$$

Vamos supor também que $f(s) = 0$, para $s \leq 0$ e $f(s) > 0$ para $s > 0$. Defina

$$F(z) = \int_0^z f(t)dt$$

e

$$G(z) = \int_0^z g(t)dt.$$

Teorema 4.3.1 *Sejam $0 < s_1 \leq ... \leq s_m < 1$ e $N > 2s_m$. Defina $I : H^{s_m}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ por*

$$I(u) = J(u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx.$$

onde

$$J(u) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s_i}}dxdy.$$

Então, existe $u_0 \in \mathcal{P}$ tal que

$$I'(u_0) = 0.$$

Além disso,

$$I(u_0) = \inf_{u\in\mathcal{P}} I(u),$$

onde

$$\mathcal{P} = \left\{ u \in H^{s_m}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; \sum_{i=1}^m \frac{(N-2s_i)}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s_i}}dxdy = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx \right\}.$$

Demonstração. Defina, para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$

$$\phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx,$$

$$\psi_i(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s_i}}dxdy$$

e

$$*(t, u) := u_t,$$

onde

$$u_t(x) := u\left(\frac{x}{t}\right) \text{ se } t \neq 0 \text{ e } u_0(x) := 0.$$

É fácil ver que

- $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m, \phi \in C^1(H^{s_m}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$;

- Para todo $t \geq 0$, $u \in H^{s_m}(\mathbb{R}^N)$ e $i \in \{1, 2, ...m\}$

$$\phi(u_t) = t^N \phi(u) \text{ e } \psi_i(u_t) = t^{N-2s_i}\psi_i(u).$$

Portanto as hipóteses, $(i), (ii), (iii)$ e (iv) de (X_1) estão verificadas. Vamos provar a seguinte afirmação:

Afirmação 4.3.0.1 *Para cada $u \in H^{s_m}(\mathbb{R}^N)$, a aplicação $t \longmapsto u_t$ é contínua.*

Demonstração. De fato, suponha que $u = \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Seja $\{t_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergindo para t. Pela continuidade de ϕ, é fácil ver que $\left\{\phi_{t_p}\right\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge q.t.p. para ϕ_t. Além disso,

$$||\phi_{t_p}||^2 = t_p^{N-2s_m}\psi_m(\phi) + t_p^N||\phi||_2,$$

implicando que $||\phi_{t_p}||^2 \to ||\phi_t||^2$. Note que, $\left\{\phi_{t_p}\right\}_{p\in\mathbb{N}}$ é limitada, então esta sequência converge fracamente para algum $w \in H^{s_m}(\mathbb{R}^N)$. Em particular, $\left\{\phi_{t_p}\right\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge q.t.p. para w. Logo, $w = \phi_t$. Em resumo:

(i) $\left\{\phi_{t_p}\right\}_{p\in\mathcal{N}}$ converge fracamente para ϕ_t;

(ii) $||\phi_{t_p}||^2 \to ||\phi_t||^2$.

Isto implica que $\phi_{t_p} \to \phi_t$ em $H^{s_m}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, a aplicação $t \mapsto \phi_t$ é contínua. Para o caso geral, seja $u \in H^{s_m}(\mathbb{R}^N)$ e considere $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma sequência de funções com suporte compacto convergindo para u em $H^{s_m}(\mathbb{R}^N)$. Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ um intervalo fechado. Para todo $t \in [a, b]$ temos,

$$\begin{aligned} ||(\phi_n)_t - u_t||^2 &= \psi_i((\phi_n)_t - u_t) + ||(\phi_n)_t - u_t||_2^2 \\ &= \psi_i((\phi - u)_t) + ||\phi_t - u_t||_2^2 \\ &\leq C||u - \phi_n||^2, \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Assim, a sequência de funções contínuas $t \mapsto (\phi_n)_t$ converge uniformemente em $[a, b]$ para a função $t \mapsto u_t$. Portanto, $t \mapsto u_t$ é contínua em $[a, b]$. Como $[a, b]$ foi qualquer, então esta função é contínua. ■

Definindo,

$$\begin{aligned} Q: \ H^{s_m}(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow H_{rad}^{s_m}(\mathbb{R}^N) \\ u &\longmapsto (u^+)^* \end{aligned}$$

onde $(u^+)^*$ é a simetrização de Schwartz de u^+ (veja [31] e [41] para mais detalhes sobre a simetrização de Schwartz), temos por [44], que a condição (X_2) é satisfeita para $X^+ = H^{s_m}(\mathbb{R}^N)$ e $\tilde{X} = H^{s_m}_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

Afirmação 4.3.0.2 *Existe $u \in H^{s_m}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\phi(u) > 0$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\phi_n \in C_0^\infty(B_{1+\frac{1}{n}}(0))$ tal que $\phi_n = \tau$ em $B_1(0)$ e $|\phi_n| \leq \tau$. Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\phi)dx = \int_{B_1(0)} G(\phi)dx + \int_{B_{1+\frac{1}{n}}(0)\setminus B_1} G(\phi)dx$$

e

$$\left|\int_{B_{1+\frac{1}{n}}(0)\setminus B_1(0)} G(\phi)dx\right| \leq \left(\sup_{\{|t|\leq\tau\}} G(t)\right)|B_{1+\frac{1}{n}} \setminus B_1(0)|.$$

Como

$$|B_{1+\frac{1}{n}} \setminus B_1(0)| \to 0$$

quando $n \to \infty$, então podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} G(\phi)dx &= \int_{B_1(0)} G(\phi)dx + \int_{B_{1+\frac{1}{n}}(0)\setminus B_1} G(\phi)dx \\ &\geq G(\tau)|B_1(0)| - \left(\sup_{\{|t|\leq\tau\}} G(t)\right)|B_{1+\frac{1}{n}} \setminus B_1(0)| \\ &> 0, \end{aligned}$$

pois $G(\tau) > 0$. Isto completa a prova da afirmação 2. ■

Também é fácil ver que:

- $\phi(0) = 0$;
- $\psi_i(u) \geq 0$ para todo $u \in X$. Além disso, $\psi_i(u) = 0,\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \Leftrightarrow u = 0$; .

Afirmação 4.3.0.3 *Exite $r > 0$ tal que se $0 < ||u|| < r$ então*

$$\sum_{i=i}^{n} \lambda_i \psi_i(u) > \lambda_\phi \phi(u).$$

Demonstração. Para $\epsilon < \frac{1}{2}$, encontramos $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \lambda_m\psi_m(u) - N\phi(u) &= \lambda_m\psi_m(u) + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2dx - N\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \\ &\geq \lambda_m\psi_m(u) + N(\frac{1}{2} - \epsilon)\int_{\mathbb{R}^N} u^2dx - NC_\epsilon\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \\ &\geq C||u||^2 - C_1||u||^q, \end{aligned}$$

onde $C, C_1 > 0$ são constantes. Como $q > 2$, temos o resultado. ■

Afirmação 4.3.0.4 *Suponha que $\{u_n\}$ é uma sequência em $H^{s_m}(\mathbb{R}^N)$, satisfazendo $J(u_n) \to 0$ e $\phi(u_n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $||u_n|| \to 0$. Além disso, se $\{J(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ também é limitada.*

Demonstração. Seja u, com $\phi(u) \geq 0$. Pelas condições de crescimento em f, encontramos $C_{\frac{1}{4}} > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \leq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx + C_{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*_{s_m}} dx.$$

Se $\phi(u) \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx &\leq \phi(u) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \\ &\leq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx + C_{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*_m} dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade crítica de Sobolev (veja teorema 6.5 em [24]),

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \leq C_{\frac{1}{4}} C_1 [\psi_m(u)]^{2^*_{s_m}} \leq C_{\frac{1}{4}} C_1 [J(u)]^{2^*_{s_m}},$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Portanto,

$$||u||^2 \leq J(u) + 2C_1 C [J(u)]^{2^*_{s_m}}.$$

Por esta última desigualdade é fácil concluir a prova da afirmação 4.3.0.4. ∎

Afirmação 4.3.0.5 *Se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para u em $H^{s_m}_{rad}(\mathbb{R}^N)$, então*

$$\limsup_{n\to\infty} \phi(u_n) \leq \phi(u).$$

Demonstração. Note que a condição de crescimento de f na origem e no infinito garantem que para cada $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$F(s) \leq \frac{\epsilon}{6L}s^2 + C_\epsilon |s|^p.$$

onde $||u_n||^2 < L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para $r > 0$

$$\int_{B_r^c} |F(u_n)|dx \leq \frac{\epsilon}{6} + C_\epsilon \int_{B_r^c} |u_n|^p dx.$$

Sabemos que $H^{s_m}_{rad}(\mathbb{R}^N)$ está imerso compactamente em $L^a(\mathbb{R}^N)$ para $a \in (2, 2^*)$. Assim, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Podemos selecionar r e n_0 suficientemente grandes tais que

$$\int_{B_r^c} |F(u_n)|dx < \frac{\epsilon}{3} \text{ e } \int_{B_r^c} |F(u)|dx < \frac{\epsilon}{3}$$

para $n > n_0$. Como $H^{s_m}(\mathbb{R}^N)$ está imerso compactamente em $L^a(B_r)$, para $a \in [2, 2^*_m)$ e f possui crescimento subcrítico, então

$$\int_{B_r} |F(u_n) - F(u)| dx \to 0.$$

Logo, para n suficientemente grande, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(u_n) - F(u)| dx \leq \epsilon.$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) dx \to \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx.$$

Esta última convergência, implica que

$$\begin{aligned} \liminf \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) dx \right) &\geq \liminf \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx \right) - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx = -\phi(u), \end{aligned}$$

ou seja, $\liminf(-\phi(u_n)) \geq -\phi(u)$. Isto prova a desigualdade desejada. ■

Afirmação 4.3.0.6 *Se $\{u_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para u em $H^{s_m}(\mathbb{R}^N)$, então*

$$\psi_i(u) \leq \liminf_{p\to\infty} \psi_i(u_p).$$

Demonstração. Note que, $u \longmapsto \psi_i(u)^{\frac{1}{2}}$ define uma norma em $H^{s_m}(\mathbb{R}^N)$ e que $(H^{s_m}(\mathbb{R}^N), ||\cdot||)$ está imerso continuamente em $(H^{s_m}(\mathbb{R}^N), \psi_i^{\frac{1}{2}})$. Logo,

$$\{u_n\} \text{ converge fracamente para } u \text{ em } (H^{s_m}(\mathbb{R}^N), \psi_i^{\frac{1}{2}}).$$

Com isso

$$\begin{aligned} \psi_i(u) &= (\psi_i(u)^{\frac{1}{2}})^2 \\ &\leq (\liminf_{n\to\infty} (\psi_i(u_n))^{\frac{1}{2}})^2 \\ &= \liminf_{n\to\infty} \psi(u_n). \end{aligned}$$

■

Portanto, todas as hipóteses do Corolário 4.2.6 estão satisfeitas e o Teorema 4.3.1 segue como consequência do Corolário 4.2.6. ■

4.4 Aplicações - Soma de s Laplaciano para $0 < s < 1$ com o Laplaciano

Nesta aplicação, consideraremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo:

(i) $\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s} = 0$;

(ii) $\limsup_{s\to +\infty} \frac{|f(s)|}{|s|^{q-1}} < \infty$, para algum $q \in (1, 2^* - 1)$ onde

$$2^* = \frac{2N}{N-2};$$

(iii) Existe $\tau > 0$ tal que $G(\tau) = \int_0^\tau g(s)ds > 0$, onde

$$g(s) = f(s) - s. \tag{4.10}$$

Vamos supor também que $f(s) = 0$, para $s < 0$. Defina

$$F(z) = \int_0^z f(t)dt$$

e

$$G(z) = \int_0^z g(t)dt.$$

Teorema 4.4.1 *Sejam $0 < s < 1$ e $n > 2$. Defina $I : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ por*

$$I(u) = J(u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx,$$

onde

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy.$$

Então, existe $u_0 \in \mathcal{P}$, não nulo, tal que

$$I'(u_0) = 0.$$

Além disso,

$$I(u_0) = \inf_{u\in\mathcal{P}} I(u),$$

onde

$$\mathcal{P} = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}; \frac{(N-2)}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{N-2s}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx \right\}.$$

Demonstração. Defina, para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$

$$\phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx,$$

$$\psi_1(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx,$$

$$\psi_2(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy$$

e $*(t, u) := u_t$, onde

$$u_t(x) := u\left(\frac{x}{t}\right) \text{ e } u_0(x) := 0.$$

É fácil ver que

- $\psi_1, \psi_2, \phi \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.
- Para todo $t \geq 0$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\phi(u_t) = t^N \phi(u) \ , \ \psi_1(u_t) = t^{N-2}\psi_1(u) \text{ e } \psi_2(u_t) = t^{N-2s}\psi_2(u).$$

Portanto as hipóteses, $(i), (ii), (iii)$ e (iv) de (X_1) estão verificadas. Também temos:

Afirmação 4.4.0.1 *Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ a aplicação, $t \longmapsto u_t$ é contínua.*

Demonstração. A demonstração da afirmação 4.4.0.1 é análoga a demonstração da afirmação 4.3.0.1, por isso omitiremos. ∎

Definindo

$$\begin{array}{rccc} Q: & H^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \\ & u & \longmapsto & (u^+)^*, \end{array}$$

onde $(u^+)^*$ é a simetrização de Schwartz de u^+, temos pelo Corolário 3.3 de [37], que a condição (X_2) é satisfeita para $\tilde{X} = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e $X^+ = H^1_+(\mathbb{R}^N) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); u(x) \geq 0\}$.

Afirmação 4.4.0.2 *Existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\phi(u) > 0$.*

Demonstração. A demonstração da afirmação 4.4.0.2 é análoga a demonstração da afirmação 4.3.0.2. ∎

Também é fácil ver que:

- $\phi(0) = 0$;
- $\psi_i(u) \geq 0$ para todo $u \in X$. Além disso, $\psi_i(u) = 0, \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \Leftrightarrow u = 0$; .

Afirmação 4.4.0.3 *Exite $r > 0$ tal que se $0 < ||u|| < r$ então,*

$$\sum_{i=i}^{n} \lambda_i \psi_i(u) > \lambda_\phi \phi(u).$$

Demonstração. Análoga a demonstração da afirmação 4.3.0.3. ∎

Afirmação 4.4.0.4 *Suponha que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$, satisfazendo $J(u_n) \to 0$ e $\phi(u_n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $||u_n|| \to 0$. Além disso, se $\{J(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ então $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.*

Demonstração. Análoga a demonstração da afirmação 4.3.0.4. ∎

Afirmação 4.4.0.5 *Se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para u em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, então*

$$\limsup_{n\to\infty} \phi(u_n) \leq \phi(u).$$

Demonstração. Basta usar o Teorema $II.1$ de [42] e proceder como na demonstração da afirmação 4.3.0.5. ∎

Afirmação 4.4.0.6 *Se $\{u_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para u em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então*

$$\psi_i(u) \leq \liminf_{p\to\infty} \psi_i(u_p).$$

Demonstração. Análoga a demonstração da afirmação 4.3.0.6. ∎

A seguir, provaremos que

$$\inf_{w\in\mathcal{P}} I_2(w) = \inf_{w\in\mathcal{P}^+} I_2(w).$$

Observe que por definição de I, é fácil ver que

$$I(u) \geq I(u^+), \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$. Para cada $u \in \mathcal{P}$, sabemos que $u^+ \neq 0$, então existe $t^+ > 0$ tal que $(u^+)_{t^+} \in \mathcal{P}$. Logo,

$$\inf_{w\in\mathcal{P}^+} I(w) \leq I((u^+)_{t^+}) \leq I((u)_{t^+}) \leq \max_{t>0} I_1(u_t) = I(u), \quad \forall u \in \mathcal{P},$$

mostrando que

$$\inf_{w\in\mathcal{P}^+} I(w) \leq \inf_{w\in\mathcal{P}} I(w)$$

Como $\mathcal{P}^+ \subset \mathcal{P}$, temos a igualdade.

Portanto, todas as hipóteses do Corolário 4.2.6 estão satisfeitas e consequentemente o Teorema 4.4.1 segue do Corolário 4.2.6. ∎

4.5 Aplicações - Soma de p-Laplacianos para $p > 1$.

Considere números naturais $1 < p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_m$. O espaço

$$W = \bigcap_{i=1}^{m} W^{1,p_i}(\mathbb{R}^N),$$

munido com a norma

$$||u|| = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p_i} dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_i} dx \right)^{\frac{1}{p_i}},$$

é um espaço de Banach reflexivo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo:

(i) $\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s^{p_1}} = 0$;

(ii) $\limsup_{s\to+\infty} \frac{|f(s)|}{|s|^{q-1}} < \infty$, para algum $q \in (p_m, p_1^*)$ onde

$$p_1^* = \frac{Np_1}{N - p_1};$$

(iii) Existe $\tau > 0$ tal que $G(\tau) = \int_0^\tau g(s)ds > 0$, onde

$$g(s) = f(s) - \sum_{i=1}^{m} |s|^{p_i-2}s. \tag{4.11}$$

Vamos supor também que $f(s) = 0$, para $s < 0$ e $f(s) > 0$ para $s > 0$. Defina,

$$F(z) = \int_0^z f(t)dt$$

e

$$G(z) = \int_0^z g(t)dt.$$

Teorema 4.5.1 *Sejam $1 < p_1 \leq ... \leq p_m$ e $N > p_m$. Defina, $I : W \to \mathbb{R}$ por*

$$I(u) = J(u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx,$$

onde

$$J(u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p_i} dx.$$

Então, existe $u_0 \in \mathcal{P}$ tal que

$$I'(u_0) = 0.$$

Além disso,

$$I(u_0) = \inf_{u\mathcal{P}} I(u),$$

onde P

$$\mathcal{P} = \left\{ u \in W \setminus \{0\}; \sum_{i=1}^{m} \frac{(N - p_i)}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p_i} dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx \right\}. \tag{4.12}$$

Demonstração. Defina, para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$

$$\phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx,$$

$$\psi_i(u) = \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p_i} dx$$

e

$$*(t, u) := u_t,$$

onde

$$u_t(x) := u\left(\frac{x}{t}\right) \text{ se } t \neq 0 \text{ e } u_0(x) := 0.$$

É fácil ver que

- $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m, \phi \in C^1(H^{s_m}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$;

- Para todo $t \geq 0$, $u \in H^{s_m}(\mathbb{R}^N)$ e $i \in \{1, 2, ...m\}$

$$\phi(u_t) = t^n \phi(u) \text{ e } \psi_i(u_t) = t^{n-p_i}\psi_i(u).$$

Portanto as hipóteses, $(i), (ii), (iii)$ e (iv) de (X_1) estão verificadas. Vamos provar a seguinte afirmação:

Afirmação 4.5.0.1 *Para cada $u \in W$ a aplicação, $t \longmapsto u_t$ é contínua.*

Demonstração. Suponha que $u = \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Seja $\{t_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergindo para t. Note que, $\{\phi_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para ϕ_t q.t.p. e $\{\nabla\phi_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge q.t.p. para $\nabla\phi_t$. Como $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então podemos supor que $t_n < \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$. Logo, se $\text{supp}(\phi) \subset B_r(0)$, então $\text{supp}(\phi_{t_n}) \subset B_{r\epsilon}(0)$. Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi_{t_n} - \phi_t|^p dx \to 0.$$

Note que, $\nabla\phi_{t_n} = \frac{1}{t_n}(\nabla\phi)_{t_n}$. Logo, se $\text{supp}(\nabla\phi) \subset B_s(0)$ então $\text{supp}(\nabla\phi_{t_n}) \subset B_{s\epsilon}(0)$. Novamente pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi_{t_n} - \nabla\phi_t|^p dx \to 0.$$

Portanto, a função $t \longmapsto \phi_t$ é contínua. Agora, basta usar a densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em W e proceder como na afirmação 4.3.0.1, para concluir que a função

$$t \longmapsto u_t$$

é contínua. ■

Definindo

$$Q: \begin{array}{rcl} W & \longrightarrow & W_{rad} \\ u & \longmapsto & (u^+)^*, \end{array}$$

onde $(u^+)^*$ é a simetrização de Schwartz de u^+ e $W_{rad} = \{u \in W; u(x) = u(y) \text{ se } |x| = |y|\}$. Temos pelo Corolário 3.3 de [37], que a condição (X_2) é satisfeita para $\tilde{X} = W_{rad}$ e $X^+ = W_+ = \{u \in W; u \geq 0\}$.

Afirmação 4.5.0.2 *Existe $u \in W$ tal que $\phi(u) > 0$.*

Demonstração. Basta repetir a demonstração da afirmação 4.3.0.2. ■

Também é fácil ver que:

- $\phi(0) = 0$;
- $\psi_i(u) \geq 0$ para todo $u \in X$. Além disso, $\psi_i(u) = 0,\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \Leftrightarrow u = 0$.

Afirmação 4.5.0.3 *Exite $r > 0$ tal que se $0 < ||u|| < r$ então*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \psi_i(u) > \lambda_\phi \phi(u),$$

onde $\lambda_i = N - p_i$.

Demonstração. Para $\epsilon < \frac{1}{p_1}$, encontramos $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \psi_i(u) - N\phi(u) &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \psi_i(u) + \sum_{i=1}^{m} \frac{N}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i} dx - N \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx \\ &\geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \psi_i(u) + \sum_{i=2}^{m} \frac{N}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i} dx \\ &+ N(\frac{1}{p_1} - \epsilon) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_1} dx - NC_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \\ &\geq C \sum_{i=1}^{m} ||u||^{p_i}_{W^{1,p_i}} - C_1 ||u||^q_{W^{1,p_1}} \\ &\geq C ||u||^{p_1}_{W^{1,p_1}} - C_1 ||u||^q_{W^{1,p_1}}, \end{aligned}$$

onde $C, C_1 > 0$ são constantes. Como $q > p_1$, então podemos selecionar r suficientemente pequeno, tal que se $u \in W \setminus \{0\}$ e $||u||_{W^{1,p_1}} \leq ||u|| < r$, então

$$C ||u||^{p_1}_{W^{1,p_1}} - C_1 ||u||^q_{W^{1,p_1}} > 0.$$

Isto completa a prova desta afirmação. ■

Afirmação 4.5.0.4 *Suponha que* $\{u_n\}$ *é uma sequência em* W*, satisfazendo* $J(u_n) \to 0$ *e* $\phi(u_n) \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Então* $||u_n|| \to 0$*. Além disso, se* $\{J(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada, então* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada.*

Demonstração. Seja u, com $\phi(u) \geq 0$. Pelas condições de crescimento em f, encontramos $C_{\frac{1}{2p_1}} > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \leq \frac{1}{2p_1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_1}dx + C_{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_m^*}dx \leq \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2p_i}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i}dx + C_{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_m^*}dx.$$

Usando que $\phi(u) \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i}dx &\leq \phi(u) + \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx\\ &\leq \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2p_i}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i}dx + C_{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_m^*}dx\end{aligned}$$

Sabemos que existe $C_1 > 0$ tal que, se $u \in W^{1,p_m}(\mathbb{R}^N)$, então

$$||u||_{L^{p_m^*}} \leq C_1\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p_m}dx\right)^{\frac{1}{p_m}}.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{4p_i}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i}dx \leq C_{\frac{1}{4}}C_1[\psi_m(u)]^{\frac{p_m^*}{p_m}} \leq C_{\frac{1}{4}}C_1[J(u)]^{\frac{p_m^*}{p_m}}.$$

Com esta última desigualdade, concluímos a demonstração desta afirmação. ■

Afirmação 4.5.0.5 *Se* $\{u_n\}$ *fracamente para* u *em* W_{rad}*, então*

$$\limsup_{n\to\infty} \phi(u_n) \leq \phi(u).$$

Demonstração. Note que, a condição de crescimento de f na origem e no infinito garante que para cada $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$F(s) \leq \frac{\epsilon}{6L}s^{p_1} + C_\epsilon|s|^q,$$

onde $||u_n||^{p_1}_{W^{1,p_1}} < L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para $r > 0$

$$\int_{B_r^c} |F(u_n)|dx \leq \frac{\epsilon}{6} + C_\epsilon\int_{B_r^c} |u_n|^q dx.$$

Observe que W_{rad} está imerso continuamente em $W^{1,p_i}(\mathbb{R}^N)$. Pelo Teorema II.1 de [42], o espaço W_{rad} está imerso compactamente em $L^a(\mathbb{R}^N)$ para $a \in (p_m, p_1^*)$. Isto implica que $\{u_n\}$ converge para u em $L^q(\mathbb{R}^N)$. Podemos selecionar r e n suficientemente grandes tais que

$$\int_{B_r^c} |F(u_n)|dx < \frac{\epsilon}{3} \text{ e } \int_{B_r^c} |F(u)|dx < \frac{\epsilon}{3},$$

para $n > n_0$. Como W está imerso compactamente em $L^a(B_r)$, para $a \in [p_1, p_m^*)$ e f possui crescimento subcrítico, então

$$\int_{B_r} |F(u_n) - F(u)|dx \to 0.$$

Logo, para m suficientemente grande, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(u_m) - F(u)|dx \leq \epsilon.$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

Esta última convergência, implica que

$$\begin{aligned}\liminf \quad & \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p_i}dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx\right) \\ & \geq \liminf \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p_i}dx\right) - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \\ & \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_i}dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \\ & = -\phi(u),\end{aligned}$$

ou seja, $\liminf(-\phi(u_n)) \geq -\phi(u)$. Isto prova a desigualdade desejada. ■

Afirmação 4.5.0.6 *Se $\{u_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para u em X, então*

$$\psi_i(u) \leq \liminf_{p\to\infty} \psi_i(u_p).$$

Demonstração. Análoga a demonstração da afirmação 4.3.0.6. ■

Seguindo de maneira análoga ao que fizemos na seção anterior, temos

$$\inf_{u\mathcal{P}} I(u) = \inf_{u\in\mathcal{P}^+} I(u).$$

Portanto, todas as hipóteses do Corolário 4.2.6 estão satisfeitas e consequentemente o Teorema 4.5.1 segue como do Corolário 4.2.6. ■

4.6 Aplicações - O caso Anisotrópico

Nesta aplicação, vamos considerar números $1 < p_1 \leq ... \leq p_N$ com $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} > 1$ e $p_N < p^* := \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} - 1}$. Vamos considerar também $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função contínua, dada por

$$g(s) = f(s) - |s|^{p_1 - 2}s, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo :

(i) $\displaystyle\lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{|s|^{p_1 - 1}} = 0.$

(ii) $\displaystyle\limsup_{s \to +\infty} \frac{|f(s)|}{|s|^{q-1}} < \infty$ para algum $q \in (p_1, p^*)$ onde

$$p^* = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} - 1}.$$

(iii) Existe $\tau > 0$ tal que $G(\tau) = \displaystyle\int_0^{\tau} g(s)ds > 0.$

(iv) $f(s) > 0$ para todo $s > 0$ e $f(s) = 0$ para $s \leq 0$.

Para $\overrightarrow{p} = (p_1, ..., p_N)$ definimos o espaço de Sobolev anisotrópico, $W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)$, por

$$W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

munido da norma

$$||u|| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} + \sum_{i=0}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Sobre o espaço $(W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N), ||\ ||)$, é conhecido na literatura que este espaço é reflexivo e que $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, este espaço $W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todos $q \in [p_1, p^*]$. Para mais detalhes, referenciamos Nikolśkii [43] e Rakosnik [46, 47].

Teorema 4.6.1 *Sejam $1 < p_1 \leq ... \leq p_N$. Defina $I : W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ por*

$$I(u) = J(u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx.$$

onde

$$J(u)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i}dx.$$

Então, existe $u_0\in\mathcal{P}$ *tal que*

$$I'(u_0)=0.$$

Além disso,

$$I(u_0)=\inf_{u\mathcal{P}}I(u),$$

onde

$$\mathcal{P}=\left\{u\in W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\};\sum_{i=1}^{N}\frac{(N-p_i)}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i}dx=N\int_{\mathbb{R}^N}G(u)dx\right\}. \quad (4.13)$$

A prova do lema seguinte segue as mesmas ideias do Lema 2.5 e do Teorema 3.1 de [37], por isso omitiremos aqui. Trata-se de uma versão da desigualdade de Polya-Szegö, para os espaços anisotrópicos.

Lema 4.6.2 *Se* $u\in W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)$ *é não negativa, então*

$$\left|\left|\frac{\partial u^*}{\partial x_i}\right|\right|_{p_i}^{p_i}\leq\left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right|_{p_i}^{p_i},$$

para todo $i\in\{1,2,3,...,N\}$*, onde* u^* *é a simetrização de Schwartz de* u*.*

Note que I pertence a $C^1(W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$. Defina $\psi_i,\Phi:W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$ por

$$\psi_i(u)=\frac{1}{p_i}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i}dx,\quad \text{para}\quad i\in\{1,2,...,n\}$$

$$\Phi(u)=\int_{\mathbb{R}^N}G(u)dx=\int_{\mathbb{R}^N}F(u)dx-\frac{1}{p_1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p_1}dx$$

e considere

$$X=W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N),\quad X^+=\{u\in W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)\,:\,u(x)\geq 0\quad\text{q.t.p. em}\quad\mathbb{R}^N\}$$

$$\tilde{X}=\{u\in W^{1,\overrightarrow{p}}_{rad}(\mathbb{R}^N)\cap X^+\,:\,0\leq u(x)\leq u(y)\quad\text{se}\quad 0<|y|\leq|x|\}.$$

Procedendo como em [10, Radial Lemma A.IV] é possível provar que se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\tilde{X}$ que converge fracamente para $u\in\tilde{X}$ em X, então $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q\in(p_1,p^*)$.

Como na seção anterior, definiremos $*(t,u):=u_t:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ por

$$u_t(x)=\begin{cases}u\left(\frac{x}{t}\right), & \text{para}\quad t\neq 0,\\ 0, & \text{para}\quad t=0.\end{cases}$$

Por um cálculo simples,

$$\psi_i(u_t) = t^{N-p_i}\psi_i(u) \quad \text{e} \quad \Phi(u_t) = t^N\Phi(u), \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad \forall u \in W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N).$$

A aplicação $t \mapsto u_t$ é contínua em $t \in [0, +\infty)$ para todo $u \in W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)$ e

$$u_t \in \tilde{X} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad u \in \tilde{X}.$$

No que segue, definiremos $Q : W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \tilde{X}$ por

$$Q(u) = (u^+)^*.$$

Usando o Lema 4.6.2 e as propriedades das funções radialmente simétricas, temos

$$\psi_i(Q(u)) \leq \psi_i(u) \quad \text{e} \quad \Phi(u) \leq \Phi(Q(u)), \quad \forall u \in X^+.$$

As seguintes afirmações seguem de maneira análoga as afirmações provadas nas seções anteriores.

- (1) Existe $u \in W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\Phi(u) > 0$.

- (2) $\psi_i(u) = 0, \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \Leftrightarrow u = 0$.

- (3) Existe $r > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(N - p_i)}{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx - N\Phi(u) > 0 \quad \text{para} \quad 0 < \|u\| < r.$$

- (4) Usando o Lema 1 de [38] encontramos uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_1} dx \leq C_2 \left(\sum_{i=1}^{N} (\psi_i(u))^{\frac{1}{p_i}}\right)^{p^*} \quad \forall u \in W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N) \quad \text{com} \quad \Phi(u) \geq 0.$$

  Desta última desigualdade segue (f_5).

- (5) Se $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \tilde{X}$ converge fracamente para $u \in \tilde{X}$ em X, pelo que foi discutido acima, temos que para todo $q \in (p_0, p^*)$ a sequência $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para u em $L^q(\mathbb{R}^N)$. Isto implica que

$$\limsup_{k\to+\infty} \Phi(u_k) \leq \Phi(u).$$

Observe que se $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ é fracamente convergente para u em $W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)$, então

$$\liminf_{k\to+\infty} \psi_i(u_k) \geq \psi_i(u),$$

pois cada ψ_i é uma função convexa em $W^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)$.

Seguindo de maneira análoga ao que fizemos na seção 4.4, temos

$$\inf_{u\mathcal{P}} I(u) = \inf_{u\in\mathcal{P}^+} I(u).$$

O Teorema 4.6.1 segue como consequência do Corolário 4.2.6.

4.7 Aplicações - Caso em que o Funcional é Localmente Lipschitz.

Nesta seção, vamos considerar $N \geq 3$ e f uma função com uma quantidade finita de pontos de descontinuidade, satisfazendo:

- $f_1)$ $\lim\limits_{s\to 0} \frac{f(s)}{s} = 0$;
- $f_2)$ $|f(s)| \leq A|s| + B|s|^q, \quad \forall s \in \mathbb{R}$, e algum $q \in (1, 2^* - 1)$.
- $f_3)$ Existe $\tau > 0$ tal que $G(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau g(z)dz > 0$, onde
$$g(s) = f(s) - s.$$
- $f_4)$ $f(s) > 0$ para $s > 0$ e $f(s) = 0$ para $s \leq 0$.

Nosso objetivo, é obter solução para a equação

$$-\Delta u(x) \in \partial G(u(x)), \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{4.14}$$

onde $N \geq 3$ e $\partial G(s)$ gradiente generalizado de G em $s \in \mathbb{R}$, que é dado por

$$\partial G(s) = [\underline{g}(s), \overline{g}(s)]$$

onde

$$\underline{g}(s) = \lim_{r\downarrow 0} \text{ess inf}\,\{g(t); |s-t| < r\} \quad \text{and} \quad \overline{g}(s) = \lim_{r\downarrow 0} \text{ess sup}\,\{g(t); |s-t| < r\}.$$

Quando g é uma função contínua então $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e neste caso

$$\partial G(s) = \{g(s)\}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Para mais detalhes sobre o gradiente generalizado e funcionais localmente lipschitz, indicamos [49] e [18].

Para este tipo de problema, uma solução fraca é uma função $u \in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ que verifica (4.14), ou equivalentemente, satisfaz o problema abaixo

$$-\Delta u(x) + u(x) \in \left[\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))\right], \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Quando f é contínua, a solução acima verifica

$$-\Delta u(x) + u(x) = f(u(x)), \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Para obter solução não trivial para o problema, definiremos $I_3 : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ por

$$I_3(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx.$$

O funcional I_3 é localmente lipschitz. Nosso principal resultado desta seção é o teorema abaixo.

Teorema 4.7.1 *Assuma que (f_1)−(f_4) são verdadeiras, então (4.14) tem uma solução não trivial.*

Vamos considerar aqui

$$X = H^1(\mathbb{R}^N), \quad X^+ = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \,:\, u(x) \geq 0 \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N\},$$

$$\tilde{X} = \{u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \cap X^+ \,:\, 0 \leq u(x) \leq u(y) \quad \text{se} \quad 0 < |y| \leq |x|\},$$

$$J(u) = \psi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx$$

e

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx.$$

com estas notações

$$I_3(u) = J(u) - \Phi(u), \quad \forall u \in X = H^1(\mathbb{R}^N).$$

Por argumentos usuais Φ é localmente lipschitz, $J \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e portanto I_3 é localmente lipschitz.

Definiremos também $*(t,u) := u_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$u_t(x) = \begin{cases} u\left(\frac{x}{t}\right), & \text{para} \quad t \neq 0, \\ 0, \quad \text{para} \quad t = 0. \end{cases}$$

Por definição de ψ e Φ, temos

$$\Phi(u_t) = t^N \Phi(u) \text{ e } \psi(u_t) = t^{N-2}\psi(u), \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Logo $(i), (ii), (iii)$ e (iv) de (X_1) estão satisfeitas. De maneira análoga as seções anteriores, temos

Afirmação 4.7.0.1 *Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, a aplicação $t \longmapsto u_t$ é contínua.*

Definindo

$$\begin{array}{llll} Q: & H^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \tilde{X} \\ & u & \longmapsto & (u^+)^*, \end{array}$$

onde $(u^+)^*$ é o rearranjo simétrico de u^+ (simetrização de Schwartz's), temos que a condição (X_2) também é verdadeira.

Afirmação 4.7.0.2 *Existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\Phi(u) > 0$ e $\Phi(0) = 0$.*

Demonstração. A afirmação segue as mesmas ideias de 4.3.0.2. ■

Afirmação 4.7.0.3 *Existe $r > 0$ tal que*

$$(N-2)\psi(u) > N\Phi(u), \quad \textit{para} \quad 0 < ||u|| < r.$$

Demonstração. Veja a demonstração 4.3.0.3 ■

Afirmação 4.7.0.4 *Seja $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\Phi(u_k) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $\{J(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ também é limitada. Além disso, se $J(u_k) \to 0$, então $||u_k|| \to 0$.*

Demonstração. Segue as mesmas ideias de 4.3.0.4. ■

Afirmação 4.7.0.5 *Se $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fraco para u em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, então*

$$\limsup_{k\to\infty} \Phi(u_k) \leq \Phi(u).$$

Demonstração. Veja prova da afirmação 4.3.0.5. ■

Afirmação 4.7.0.6 *Se (u_k) é fracamente convergente para u em $H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, então*

$$\psi(u) \leq \liminf_{k\to+\infty} \psi(u_k).$$

Demonstração. Veja a afirmação 4.3.0.6. ■

Afirmação 4.7.0.7 *O funcional I_3 verifica a igualdade abaixo*

$$\inf_{w\in\mathcal{P}} I_3(w) = \inf_{w\in\mathcal{P}^+} I_3(w).$$

Demonstração. Fizemos uma demonstração análoga na seção 4.5. ■

Pelo que vimos acima I_3 satisfaz todas as condições do Teorema 4.2.5. Disto, segue que existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$0 \in \partial I_3(u_0) \quad \text{e} \quad I_3(u_0) = \inf_{w\in\mathcal{P}} I_3(w) > 0.$$

Como J é C^1 e $\Phi(u) = \Phi_1(u) - \Phi_2(u)$, com

$$\Phi_2(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \text{ e } \Phi_1(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$$

temos

$$J'(u_0) + \Phi_2'(u_0) \in \partial\Phi(u_0).$$

Pela Proposição 2.2 de [4], existe $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ verificando

$$\rho(x) \in [\underline{f}(u_0(x)), \overline{f}(u_0(x))], \quad \text{a.e. in} \quad \mathbb{R}^N \tag{4.15}$$

e u_0 é uma solução fraca do problema

$$-\Delta u_0 + u_0 = \rho, \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N.$$

Por (4.15), $\rho \in L_{loc}^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$, então, por resultados de regularidade temos $u_0 \in W_{loc}^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$, mostrando que u_0 é uma solução não trivial de (4.14).

4.8 Aplicações - Caso em que X não é um Espaço de Funções.

Seja H um espaço de Hilbert e $\{v_1, ..., v_n\}$ um conjunto ortonormal em H. Seja, E=span $\{v_1, ..., v_n\}$ e defina

$$\psi(u) = ||u||$$

e

$$\phi(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i \rangle^2.$$

Defina $* : [0, +\infty) \times H \to H$ por,

$$*(t, u) = tu.$$

Observe que (X_1) é satisfeita

(i) $\psi(*(t, u)) = t\psi(u)$;

(ii) $\phi(t, u) = t^2\psi(u)$;

(iii) $*(0, u) = 0$;

(iv) Para cada u fixo, a aplicação $t \longmapsto *(t, u) = tu$, é contínua.

Quanto a hipótese (X_2), defina $Q : H \to E$ por

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i \rangle v_i.$$

- E é fracamente fechado;
- $\psi(Q(u)) \leq \psi(u)$; (Desigualdade de Bessel);
- $\phi(Q(u)) = \phi(u)$;
- Se $u \in E$, então $u_t \in E$ para todo $t > 0$;

Além disso,

- $\phi(v_1) = 1 > 0$;
- $\phi(0) = 0$;
- $\psi(u) > 0$, se $u \neq 0$ e $\psi(0) = 0$;
- Note que, pela desigualdade de Bessel,

  $$\psi(u) - \phi(u) \geq ||u|| - ||u||^2.$$

  Logo, existe $r > 0$, suficientemente pequeno, tal que se $0 < ||u|| < r$ então

  $$\psi(u) > \phi(u).$$

- Se $\{u_n\}$ converge fracamente para u em E, então $\{u_n\}$ converge para u na topologia forte (porque E tem dimensão finita e portanto estas duas topologias coincidem). Logo,
$$\limsup \phi(u_n) = \lim \phi(u_n) = \phi(u).$$

- Se $\{u_n\}$ converge fracamente para u, então
$$\psi(u) = ||u|| \leq \liminf ||u_n|| = \liminf \psi(u_n).$$

Pelo Teorema 4.2.5, existe $u_0 \neq 0$ tal que
$$I'(u_0) = 0;$$
onde
$$I(u) = ||u|| - \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i \rangle^2.$$
Além disso,
$$u_0 \in \mathcal{P},$$
onde
$$P = \left\{ u \in H \setminus \{0\} \, ; ||u|| = 2 \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i \rangle^2 \right\}.$$

Capítulo 5

Uma Desigualdade de Polya-Szegö para Operadores Integro-Diferenciais

Neste capítulo, mostraremos uma versão da desigualdade de Polya-Szegö para operadores integro-diferencias. Park em [44] mostrou que para toda $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, não negativa, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u^*(x)-u^*(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy$$

onde u^* é o rearranjo simétrico de u. Em [44] foi fundamental a relação dada na proposição 1.3.2, ou seja, a relação entre o laplaciano fracionário e a transformada de Fourier. Por isso, no nosso caso, usaremos outro argumento.

5.1 Desigualdade de Polia-Szegö

Definição 5.1.1 *Diremos que uma função mensurável $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ se anula no infinito se para todo $t > 0$*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^N; \phi(x) > t\right\}\right| < \infty.$$

Seja u se anulando no infinito. Sabemos que existe u^*, mensurável, satisfazendo (veja [31] e [41]):

(i) u^* é não negativa;

(ii) u^* é radialmente simétrica;

(iii) para toda função positiva e monótona, ϕ, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(u^*)dx;$$

(iv) (Desigualdade do rearranjo de Riesz) (Teorema 3.7 em [41]) Para todas v, w funções não negativas, se anulando no infinito

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x-y)w(y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^*(x)v^*(x-y)w^*(y)dxdy.$$

Seja u uma função que se anula no infinito, a u^* cujas propriedades foram mencionadas acima, é chamada de rearranjo simétrico de u e é definida da seguinte forma: se A é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^N$, definimos o rearranjo simétrico A^* de A, como sendo a bola fechada, centrada na origem que tem mesma medida de A. Mais precisamente

$$A^* = \overline{B_{\left(\frac{|A|}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}}(0)}$$

onde ω_n é o volume da bola unitária de $\mathbb{R}^N$. Definimos o rearranjamento simétrico $\mathcal{X}_A^*$ de uma função característica $\mathcal{X}_A$ como sendo

$$\mathcal{X}_A^* := \mathcal{X}_{A^*}.$$

Se u é uma função não negativa, então podemos escrever

$$u(x) = \int_0^{u(x)} 1dt = \int_0^{\infty} \mathcal{X}_{\{x\in\mathbb{R}^N; u(x)\geq t\}}(x)dt.$$

Assim, definimos o rearranjo simétrico u^* de u como sendo

$$u^*(x) = \int_0^{\infty} \mathcal{X}^*_{\{x\in\mathbb{R}^N; u(x)\geq t\}}(x)dt.$$

No que segue, vamos considerar $K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ um núcleo de ordem s, contínuo em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Para cada $0 < \delta < 1$ vamos definir K_δ da seguinte maneira.

$$K_\delta(x) := \begin{cases} |x|^2K(x) & se \quad |x| < \delta \\ K(x) & se \quad |x| \geq \delta. \end{cases}$$

Por (K_3) (veja definição 1.1.1),

- $\displaystyle\int_{B_\delta(0)} K_\delta dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} K\gamma dx < \infty;$

- $\displaystyle\int_{B_1(0)\setminus B_\delta(0)} K_\delta(x)dx < \infty$, pois K é contínua em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$;

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} K_\delta(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} K\gamma dx < \infty$,

onde $\gamma(x) = \min\{1, |x|^2\}$. Logo,

$$K_\delta \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Proposição 5.1.2 *Seja u uma função não negativa se anulando no infinito. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)K_\delta(x-y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u^*)^2(x)K_\delta^*(x-y)dxdy$$

para todo $0 < \delta < 1$.

Demonstração. De fato, usando o teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)K_\delta(x-y)dxdy &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)K_\delta(x-y)dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)\int_{\mathbb{R}^N} K_\delta(z)dzdx \qquad (5.1) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} K_\delta(z)dz\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)dx\right).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u^*)^2(x)K_\delta^*(x-y)dxdy = \left(\int_{\mathbb{R}^N} K_\delta^*(z)dz\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N}(u^*)^2dx\right). \qquad (5.2)$$

Mas por (iii),

$$\int_{\mathbb{R}^N}(u^*)^2dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^2dx \qquad (5.3)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_\delta^*(z)dz = \int_{\mathbb{R}^N} K_\delta(z)dz$$

Combinando esta última igualdade com as equações (5.1), (5.2) e (5.3), concluímos o resultado. ■

Corolário 5.1.3 *Seja u uma função não negativa e se anulando no infinito. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(y)K_\delta(x-y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u^*)^2(y)K_\delta^*(x-y)dxdy,$$

para todo $0 < \delta < 1$.

Demonstração. A demonstração é análoga ao teorema anterior. ■

Proposição 5.1.4 *Seja $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ uma função não negativa. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u^*(x)-u^*(y))^2K_\delta^*(x-y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))^2K_\delta(x-y)dxdy$$

Demonstração. Note que, como $K_\delta \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ então pela equação (5.1)

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)K_\delta(x-y)dxdy < \infty. \tag{5.4}$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(y)K_\delta(x-y)dxdy < \infty. \tag{5.5}$$

Assim, (5.4) e (5.5), $K_\delta \leq K$ e $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ implicam que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)u(y)K_\delta(x-y)dxdy < \infty. \tag{5.6}$$

Pelas equações (5.4), (5.5) e (5.6) temos,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))^2K_\delta(x-y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)K_\delta(x-y)dxdy \\
&\quad -2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)u(y)K_\delta(x-y)dxdy \\
&\quad +\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(y)K_\delta(x-y)dxdy < \infty.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Pela desigualdade do rearranjo de Riesz temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)u(y)K_\delta(x-y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^*(x)u^*(y)K_\delta^*(x-y)dxdy. \tag{5.8}$$

Pela inequação (5.8), equação (5.7), Proposição 5.1.2 e Corolário 5.1.3 temos,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))^2K_\delta(x-y)dxdy \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u^*)^2(x)K_\delta^*(x-y)dxdy \\
&\quad +\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u^*)^2(y)K_\delta^*(x-y)dxdy \\
&\quad -2\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^*(x)u^*(y)K_\delta^*(x-y)dxdy.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder, Proposição 5.1.2, Corolário 5.1.3, inequação

(5.4) e inequação (5.5),

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^*(x)u^*(y)K_\delta^*(x-y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^*(x)K_\delta^*(x-y)^{\frac{1}{2}}u^*(y)K_\delta^*(x-y)^{\frac{1}{2}}dxdy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u^*)^2(x)K_\delta^*(x-y)dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u^*)^2(y)K_\delta^*(x-y)dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)K(x-y)dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^2(y)K(x-y)dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Pela inequação (5.4) e Proposição 5.1.2, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u^*)^2(x)K_\delta^*(x-y)dxdy < \infty,$$

e por (5.5) e Corolário 5.1.3, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u^*)^2(y)K_\delta^*(x-y)dxdy < \infty.$$

Portanto, essas três últimas desigualdades combinadas com a inequação (5.9) implicam que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u^*(x)-u^*(y))^2K_\delta^*(x-y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x)-u(y))^2K_\delta(x-y)dxdy$$

Isto conclui a prova da proposição. ■

A seguir, mostraremos outra versão da desigualdade de Polya-Szegö. Primeiro, faremos duas observações:

Observação 5.1.5 *Se $f \leq g$ são funções não negativas, se anulando no infinito, então $f^* \leq g^*$. De fato, para cada x, temos por definição*

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi^*_{\{x\in\mathbb{R}^N; f(x)\geq t\}}(x)dt.$$

Note que $\left\{x \in \mathbb{R}^N; f(x) \geq t\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^N; g(x) \geq t\right\}$, e portanto esta inclusão implica que $\left\{x \in \mathbb{R}^N; f(x) \geq t\right\}^* \subset \left\{x \in \mathbb{R}^N; g(x) \geq t\right\}^*$. Logo, $\chi^*_{\{x\in\mathbb{R}^N;f(x)\geq t\}}(x) \leq \chi^*_{\{x\in\mathbb{R}^N;g(x)\geq t\}}(x)$ para todo $t > 0$. Isto nos dá a desigualdade desejada.

Observação 5.1.6 *Se f é radialmente simétrica, decrescente e se anula no infinito, então $f^* = f$. Basta observar que os conjuntos da forma $\{f \geq t\}$ são bolas fechadas e centradas na origem ou são conjuntos vazios, e portanto*

$$\{f \geq t\}^* = \{f \geq t\}.$$

Observação 5.1.7 *A função*

$$t \to B_t^*$$

é injetiva, onde

$$B_t = \{x \in \mathbb{R}^N; K(x) \geq t\}$$

e B_t^* é a simetrização de B_t. De fato, suponha que $s \neq t$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $s < t$. Observe que

$$B_t \subset B_s.$$

Vamos mostrar que existe um conjunto $W \subset B_s \setminus B_t$, com medida não nula. Como $\gamma K \in L^1(\mathbb{R}^N)$ então existe $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tal que $K(x_0) < s$. Além disso, por (K_3), $\lim\limits_{t \to 0} K(tx_0) = \infty$. Pela continuidade de K e teorema do valor intermediário, existe $y = t_0 x_0$ tal que

$$s < K(y) < t$$

Novamente pela continuidade de K, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B_\delta(y)$ temos

$$s < K(x) < t.$$

Assim,

$$B_\delta(y) \subset B_s$$

e

$$B_\delta(y) \cap B_t = \emptyset,$$

implicando que

$$|B_t| < |B_s|.$$

Portanto, $|B_t^*| < |B_s^*|$, ou seja $B_t^* \neq B_s^*$.

Observação 5.1.8 *Com a mesma notação da observação anterior. Seja $x \in \mathbb{R}^N$ e suponha que existam $s, t \in \mathbb{R}$ tais que $x \in \partial B_s^* \cap \partial B_t^*$. Da definição da simetrização temos*

$$B_s^* = B_{|x|}(0) = B_t^*.$$

Pela observação anterior, $s = t$. Portanto, existe um único t tal que $x \in \partial B_t^*$.

Observação 5.1.9 *Nesta observação vamos mostrar que $K_\delta^*(x) \to K^*(x)$, quando $\delta \to 0$, para todo $x \neq 0$. Fixe $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Para cada $1 > \delta > 0$ seja $L_\delta : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$L_\delta(t) = \chi^*_{\{x \in \mathbb{R}^N; K_\delta(x) \geq t\}}(x_0) = \chi_{\{x \in \mathbb{R}^N; K_\delta(x) \geq t\}^*}(x_0).$$

Defina também

$$L(t) = \chi^*_{\{x \in \mathbb{R}^N; K(x) \geq t\}}(x_0) = \chi_{\{x \in \mathbb{R}^N; K(x) \geq t\}^*}(x_0).$$

Seja $t \in (0,\infty)$ *e suponha que* $x \notin \partial B_t^*$. *Vamos denotar,*

$$A_\delta = \left\{x \in \mathbb{R}^N; K_\delta(x) \geq t\right\}$$

e

$$B = B_t = \left\{x \in \mathbb{R}^N; K(x) \geq t\right\}.$$

Uma aplicação do teorema da convergência dominada de Lebesgue, mostra que

$$|A_\delta| \to |B|$$

quando $\delta \to 0$. *Sabemos que a simetrização* B^* *é uma bola fechada e centrada na origem e com*

$$|B^*| = |B|.$$

Analogamente, a simetrização A_δ^* *é uma bola fechada, centrada na origem e com*

$$|A_\delta| = |A_\delta^*|.$$

Portanto,

$$|A_\delta^*| \to |B^*|. \tag{5.10}$$

Além disso, temos

$$A_1 \subset A_{\frac{1}{2}} \subset \cdots \subset A_{\frac{1}{n}} \cdots \subset B.$$

De onde segue que

$$A_1^* \subset A_{\frac{1}{2}}^* \subset \cdots \subset A_{\frac{1}{n}}^* \cdots \subset B^*. \tag{5.11}$$

Suponha que x_0 *está no interior de* B^*. *Mostraremos que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_0 \in A_{\frac{1}{n}}^*$. *Se* $x_0 \notin A_{\frac{1}{n}}^*$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então o raio de cada bola fechada* $A_{\frac{1}{n}}^*$, *seria menor ou igual a* $|x_0|$, *ou seja,* $A_{\frac{1}{n}}^*$ *estaria contido na bola fechada de centro em* 0 *e raio* $|x_0|$. *Isto implicaria que*

$$\left|A_{\frac{1}{n}}^*\right| \leq |B_{|x_0|}(0)| < B^*,$$

contradizendo (5.10). Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_0 \in A_{\frac{1}{n_0}}^*$. *Pela equação (5.11),*

$$x_0 \in A_{\frac{1}{n}}^*$$

para todo $n > n_0$.

Portanto, para $n > n_0$, *temos*

$$\chi_{A_{\frac{1}{n}}^*}(x_0) = 1 = \chi_{B^*}(x_0).$$

Dessa forma,

$$\lim_{n\to\infty} L_{\frac{1}{n}}(t) = L(t).$$

Por outro lado, se $x_0 \notin B^*$*, então* $x_0 \notin A^*_{\frac{1}{n}}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Daí*

$$\chi_{A^*_{\frac{1}{n}}}(x_0) = 0 = \chi_{B^*}(x_0),$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} L_{\frac{1}{n}}(t) = L(t).$$

Da observação 5.1.7, existe um único t *tal que* x_0 *está na fronteira de* B^*_t*. Assim, para quase todo* t *temos*

$$\lim_{n\to\infty} L_{\frac{1}{n}}(t) = L(t).$$

Além disso, para todo $\delta \in (0,1)$*,*

$$K_s \leq K.$$

Isto implica que

$$\left\{x \in \mathbb{R}^N; K_\delta(x) \geq t\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^N; K(x) \geq t\right\},$$

e consequentemente

$$\left\{x \in \mathbb{R}^N; K_\delta(x) \geq t\right\}^* \subset \left\{x \in \mathbb{R}^N; K(x) \geq t\right\}^*.$$

Assim,

$$\chi_{\{x\in\mathbb{R}^N; K_\delta(x)\geq t\}^*}(x_0) \leq \chi_{\{x\in\mathbb{R}^N; K(x)\geq t\}^*}(x_0),$$

ou seja,

$$0 \leq L_\delta(t) \leq L(t).$$

Por definição, $\displaystyle\int_0^\infty L(t)dt = K^*(x_0) < \infty$*, e pelo Teorema da Convergência dominada de Lebesgue, temos*

$$\lim_{\delta\to 0} \int_0^\infty L_\delta(t)dt = \int_0^\infty L(t)dt.$$

Por outro lado, $\displaystyle\int_0^\infty L_\delta(t)dt = K^*_\delta(x_0)$*. Portanto, acabamos de provar que para todo* $x \neq 0$

$$\lim_{\delta\to 0} K^*_\delta(x) = K(x).$$

Teorema 5.1.10 *Seja* $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ *uma função não negativa. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u^*(x) - u^*(y))^2 K^*(x-y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y))^2 K(x-y)dxdy$$

Demonstração. Pela proposição anterior, para cada $0 < \delta < 1$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u^*(x) - u^*(y))^2 K^*_\delta(x-y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y))^2 K_\delta(x-y)dxdy \quad (5.12)$$

Para cada $\delta \in (0,1)$ defina $h_\delta : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$h_\delta(x,y) := (u^*(x) - u^*(y))^2 K^*_\delta(x-y).$$

Note que, se $1 > \delta_1 > \delta_2$, então $K_{\delta_2} \geq K_{\delta_1}$. Pela Observação 5.1.5, $K^*_{\delta_2} \geq K^*_{\delta_1}$ e portanto

$$h_{\delta_2} \geq h_{\delta_1} \geq 0.$$

Considere a sequência $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $\delta_n > \delta_{n+1}$ e $\lim_{n\to} \delta_n = 0$, e observe que a sequência $(h_{\delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona não decrescente. Além disso, fixado $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ com $x \neq y$ temos, pela Observação 5.1.9,

$$\lim_{n\to\infty} h_{\delta_n}(x,y) = (u^*(x) - u^*(y))^2 K^*(x-y).$$

Pelo teorema da convergência monótona,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u^*(x)-u^*(y))^2 K^*_{\delta_n}(x-y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u^*(x)-u^*(y))^2 K^*(x-y)dxdy.$$

Também temos,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x)-u(y))^2 K_{\delta_n}(x-y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x)-u(y))^2 K(x-y)dxdy.$$

Estes últimos dois limites e a desigualdade (5.12), mostram que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u^*(x)-u^*(y))^2 K^*(x-y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x)-u(y))^2 K(x-y)dxdy.$$

■

Corolário 5.1.11 *Seja $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$. Então existe w não negativa e radialmente simétrica satisfazendo:*

- *Para toda função positiva e monótona, ϕ*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(w)dx.$$

- *Além disso,*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (w(x)-w(y))^2 K^*(x-y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x)-u(y))^2 K(x-y)dxdy.$$

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$. Sabemos que $|u| \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$ e portanto $|u|$ se anula no infinito. Seja $w = |u|^*$ o rearranjo simétrico de $|u|$. Para toda função positiva e monótona, ϕ

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(w)dx.$$

Pelo Teorema 5.1.10, a função w também satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (w(x) - w(y))^2 K^*(x-y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} ||u(x)| - |u(y)||^2 K(x-y)dxdy.$$

Mas, para todos x e y

$$||u(x)| - |u(y)|| \leq |u(x) - u(y)|.$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (w(x) - w(y))^2 K^*(x-y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y))^2 K(x-y)dxdy.$$

■

Corolário 5.1.12 *Suponha que K satisfaça (K_2), (K_3), K seja radialmente simétrica e decrescente. Então, para toda $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$, existe w radialmente simétrica, não negativa e tal que para toda função positiva e monótona ϕ*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(w)dx.$$

Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (w(x) - w(y))^2 K(x-y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y))^2 K(x-y)dxdy.$$

Demonstração. Basta combinar o corolário anterior com a Observação 5.1.6. ■

Corolário 5.1.13 *Suponha que K satisfaça $(K_1), (K_2), (K_3)$ e*

- (K_4) *Existe $c_1 > 0$ tal que $c_1 \geq K(x)|x|^{N+2s}$.*

Então para toda $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$, existe w radialmente simétrica, não negativa e tal que para toda função positiva e monótona ϕ

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(w)dx.$$

Além disso

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (w(x) - w(y))^2 K(x-y)dxdy \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x) - u(y))^2 K(x-y)dxdy$$

onde $\lambda = \frac{c_1}{c}$ e c é a constante que aparece em (K_3).

Demonstração. Note que

$$\frac{c}{|x|^{N+2s}} \leq K(x) \leq \frac{c_1}{|x|^{N+2s}}.$$

Pelas Observações 5.1.5 e 5.1.6, temos

$$\frac{c}{|x|^{n+2s}} \leq K^*(x) \leq \frac{c_1}{|x|^{N+2s}}.$$

Com esta última relação e o Corolário 5.1.11, concluímos a prova deste corolário. ■

Corolário 5.1.14 *Para toda $u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$, existe w radialmente simétrica, não negativa e tal que para toda função positiva e monótona ϕ*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|u|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(w)dx.$$

Além disso

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(w(x)-w(y))^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy.$$

Demonstração. Faça $K(x) = |x|^{n+2s}$ no Corolário 5.1.12. ■

Apêndices

Apêndice A

Sobre o Conjunto de Nehari

Neste apêndice, mostraremos as afirmações contidas na Observação 2.3.1.

Seja K um núcleo de ordem s, com $s > \frac{3}{4}$ e $I : \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$I(u) = \frac{1}{2}[u,u] + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} u^2 V(x)dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u - \int_{\mathbb{R}^3} F(u)dx$$

onde V, ϕ_u, F e f são definidas como no capítulo 2.

Definimos o conjunto de Nehari $\mathcal{N}$, associado a I, como sendo o conjunto

$$\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^3); u \neq 0 \text{ e } I'(u)(u) = 0\}$$

Proposição A.1 *Para cada $u \neq 0$ em $\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^3)$, existe um único $t(u) > 0$ tal que $t(u)u \in \mathcal{N}$. Além disso,*

$$I(t(u)u) = \max_{t>0} I(tu).$$

Demonstração. Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ não nulo, então definindo $g(t) = I(tu)$ temos

$$g'(t) = I'(tu)(u) = t[u,u] + t\int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2dx + t^3\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(tu)udx.$$

Segue que $g'(t) = 0$ se e somente se,

$$||u||^2 = t^2\left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(tu)u}{t^3}dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2 dx\right),$$

onde

$$||u||^2 = [u,u] + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2dx.$$

Note que

$$g(0) = 0$$

Seja $C > 0$ tal que $C\int_{\mathbb{R}^3} u^4dx > \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2dx$. Por $(A4)$ e $(A6)$ (veja capítulo 2), existe uma constante positiva $M > 0$ tal que $F(s) \geq Cs^4 - Ms^2$. Assim, para todo $t > 0$

$$I(tu) \leq \left(\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2 - C\int_{\mathbb{R}^3} u^4dx\right)t^4 + \left(M\int_{\mathbb{R}^3} u^2dx + \frac{1}{2}||u||^2\right)t^2$$

Podemos concluir que $g(t) < 0$, para t suficientemente grande. Mostraremos que para t suficientemente pequeno, $g(t) > 0$. Para isto, seja $\epsilon > 0$ tal que $\frac{\epsilon}{\min\left(\frac{1}{2},\alpha\right)} < \frac{1}{2}$. Pelo Corolário 2.2.5 e $(A5)$,

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2 - \int_{\mathbb{R}^3} F(u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \epsilon||u||_2^2 - C_\epsilon||u||_p^p \\
&\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\epsilon}{\min\left(\frac{1}{2},\alpha\right)}||u||^2 - C||u||^p \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{\min\left(\frac{C(s)}{2},\alpha\right)} - C||u||^{p-2}\right)||u||^2.
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Conseguimos $r > 0$ tal que se $||u|| < r$ então $I(u) > 0$. Logo

$$g(t) > 0$$

para t pequeno. Por continuidade de g, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(t_0) = \max_{t\in\mathbb{R}} g(t)$, ou seja, $I(t_0u) = \max_{t>0} I(tu)$. Segue que

$$t_0u \in \mathcal{N}.$$

Mostraremos agora, a unicidade. Pelo que vimos acima, t_0 satisfaz

$$||u||^2 = t_0^2\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(t_0u)u}{t_0^3}dx - \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2dx\right).$$

Logo, $d(t_0) > 0$, onde

$$d(t) = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(tu)u}{t^3}dx - \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2dx.$$

Por $(A7)$, a função d também é crescente em $t > 0$. Suponha que exista outro $s > 0$ tal que $su \in \mathcal{N}$. De $I'(su)u = 0$, teríamos que $d(s) > 0$. Veja que não pode ocorrer $s < t_0$. De fato, no intervalo $[s, +\infty)$ a função d é positiva e crescente, então a função $e(t) = t^2d(t)$ é crescente em $[s, +\infty)$. Em particular $||u||^2 = e(t_0) \neq e(s)$ e portanto $su \notin \mathcal{N}$. Se ocorresse $s > t_0$, então por um raciocínio análogo teríamos que $su \notin \mathcal{N}$. Portanto $s = t_0$, ou seja, existe um único $t(u) > 0$ tal que $t(u)u \in \mathcal{N}$. ■

Proposição A.2 *Seja $C_{\mathcal{N}}$ definido por*

$$C_{\mathcal{N}} = \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u).$$

Então

$$C_{\mathcal{N}} = c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H^s(\mathbb{R}^3)); \gamma(0) = 0; I(\gamma(1)) < 0)\}$$

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}$. Pela Proposição A.1, $I(u) = \max_{t>0} I(tu) > 0$. Isto implica que a constante $C_{\mathcal{N}}$ está bem definida. Seja $C_M = \inf_{u\neq 0}\sup_{t>0} I(tu)$. Note que

$$C_{\mathcal{N}} = C_M \geq c.$$

A primeira igualdade acima é imediata. Provaremos a desigualdade. Para isto, considere $\gamma(t) = tu$. Existe $M > 0$ tal que $I(\gamma(M)) < 0$. Além disso, o supremo de $I(\gamma(t))$ é atingido em $(0, M)$. Defina $\beta : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^N)$, dada por

$$\beta(t) = \gamma\left(\frac{t}{M}\right).$$

Observe que $\beta \in \Gamma$. Logo,

$$\sup_{t>0} I(\gamma(t)) = \sup_{t\in[0,M]} I(\gamma(t)) = \sup_{t\in[0,1]} I(\beta(t)) \geq c.$$

Tomando o ínfimo em $u \neq 0$, obtemos a desigualdade desejada. A seguir, provaremos que $C_{\mathcal{N}} \leq c$. Seja $\gamma \in \Gamma$. Defina o conjunto

$$A = \left\{u \in \mathcal{X}_K(\mathbb{R}^3); I'(u)u > 0\right\}$$

Se $u \in A$, então

$$4I(u) \geq 4I(u) - I^{'}(u)(u) = ||u||^2 + \int_{\mathbb{R}^3} H(u)dx > 0.$$

Como $I(\gamma(1)) < 0$, então, para t suficientemente próximo de 1, temos $\gamma(t) \notin A$. Por outro lado,

$$I'(u)(u) > 0$$

para $||u||$ suficientemente pequena. Como $\gamma(0) = 0$ e $I \in C^1(\mathcal{X}_K(\mathbb{R}^3)$, temos também pontos de $\gamma([0,1])$ em A. Pelo teorema da alfândega, existe pelo menos um $t \in (0,1)$ tal que $\gamma(t) \in \mathcal{N}$. Ou seja,

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq C_{\mathcal{N}}$$

Como $\gamma \in \Gamma$ foi qualquer, temos

$$c \geq C_{\mathcal{N}}.$$

De onde segue a igualdade entre as constantes. ■

Apêndice B

Resultado Auxiliar

Fixe $t \in [-n^{\frac{1}{\beta-1}}, n^{\frac{1}{\beta-1}}]$ e defina

$$g_t(s) = 2(ns - t|t|^{\beta-1})^2 - C(s-t)(n^2 s - t|t|^{2(\beta-1)}).$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $\beta > 1$ e

$$C = 2 + \frac{2(\beta-1)^2}{2\beta - 1}$$

Nosso objetivo é provar que $g_t(s) \leq 0$ para todo s com $|s| > n^{\frac{1}{\beta-1}}$. Primeiro vamos provar alguns resultados sobre a seguinte função

$$\begin{aligned} q: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto -4nt^{\beta} + Cn^2 t + Ct^{2\beta-1} \end{aligned}$$

Lema B.1 *Para todo* $t \in [0, n^{\frac{1}{\beta-1}}]$ *temos*

$$q'(t) > 0$$

Demonstração. Primeiro note que

$$q'(t) = -4\beta n t^{\beta-1} + Cn^2 + (2\beta-1)Ct^{2(\beta-1)}$$

A segunda derivada de q é dada por

$$\begin{aligned} q''(t) &= -4\beta(\beta-1)nt^{\beta-2} + 2C(2\beta-1)(\beta-1)t^{2\beta-3} \\ &= t^{\beta-2}\left(-4\beta(\beta-1)n + 2C(2\beta-1)(\beta-1)t^{\beta-1}\right) \end{aligned}$$

Defina

$$m = \frac{4\beta}{2(2\beta-1)C}$$

então

Afirmação B.0.0.1 *Afirmamos que* $0 < m < 1$.

De fato,

$$\begin{aligned} C = 2 + \tfrac{2(\beta-1)^2}{2\beta-1} &= \tfrac{4\beta-2}{2\beta-1} + \tfrac{2\beta^2-4\beta+2}{2\beta-1} \\ &= \tfrac{2\beta^2}{2\beta-1} \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{4\beta}{2(2\beta-1)C} \\ &= \tfrac{4\beta}{4\beta^2} \\ &= \tfrac{1}{\beta} \end{aligned}$$

Isto completa a prova da afirmação.

Afirmação B.0.0.2 *Com a mesma notação do lema anterior*

- $q''((mn)^{\frac{1}{\beta-1}}) = 0$;
- $q''(t) < 0$ *em* $[0, (mn)^{\frac{1}{\beta-1}}]$
- $q''(t) > 0$ *em* $[(mn)^{\frac{1}{\beta-1}}, n^{\frac{1}{\beta-1}}]$

De fato, note que $q''(t) < 0$ em $[0, mn^{\frac{1}{\beta-1}}]$ se e somente se

$$-4\beta(\beta-1)n + 2C(2\beta-1)(\beta-1)t^{\beta-1} < 0$$

Equivalentemente

$$+2C(2\beta-1)(\beta-1)t^{\beta-1} < 4\beta(\beta-1)n$$

Equivalentemente

$$t^{\beta-1} < \frac{4\beta}{2(2\beta-1)C} n = mn$$

ou seja

$$t < (mn)^{\frac{1}{\beta-1}}$$

Analogamente $q''(t) > 0$ em $[(mn)^{\frac{1}{\beta-1}}, n^{\frac{1}{\beta-1}}]$ e $q''((mn)^{\frac{1}{\beta-1}}) = 0$. Isto conclui a prova da afirmação.

Da afirmação B.0.0.2 temos que $(mn)^{\frac{1}{\beta-1}}$ é um ponto de mínimo de q' em $[0, n^{\frac{1}{\beta-1}}]$.

$$\begin{aligned} q'[(mn)^{\frac{1}{\beta-1}}] &= -4\beta mn^2 + Cn^2 + (2\beta-1)C(nm)^2 \\ & n^2(-4\beta m + C + (2\beta-1)C(m)^2) \end{aligned}$$

Observe também que

$$\begin{aligned} C = 2 + \tfrac{2(\beta-1)^2}{2\beta-1} &= \tfrac{4\beta-2}{2\beta-1} + \tfrac{2\beta^2-4\beta+2}{2\beta-1} \\ &= \tfrac{2\beta^2}{2\beta-1} \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{4\beta}{2(2\beta-1)C} \\ &= \tfrac{4\beta}{4\beta^2} \\ &= \tfrac{1}{\beta} \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} -4\beta m + C + (2\beta-1)Cm^2 &= -4 + \tfrac{2\beta^2}{2\beta-1} + 2 \\ &= \tfrac{2\beta^2}{2\beta-1} - 2 > 0 \end{aligned}$$

pois, por hipótese $\beta > 1$. Portanto

$$q'[(mn)^{\frac{1}{\beta-1}}] = n^2(-4\beta m + C + (2\beta-1)Cm^2) > 0.$$

Consequentemente temos para todo $t \in [0, n^{\frac{1}{\beta-1}}]$ que

$$q'(t) \geq q'[(mn)^{\frac{1}{\beta-1}}] > 0.$$

Isto prova o Lema B.1.

$\blacksquare$

No que segue, vamos considerar

$$\begin{aligned} p: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto -4nt|t|^{\beta-1} + Cn^2t + Ct|t|^{2(\beta-1)} \end{aligned}$$

e note que, para todo $t > 0$

$$p(t) = q(t)$$

e que se $t < 0$ então

$$\begin{aligned} p(t) &= -4nt|t|^{\beta-1} + Cn^2t + Ct|t|^{2(\beta-1)} \\ &= -4nt(-t)^{\beta-1} + Cn^2t + Ct(-t)^{2(\beta-1)} \\ &= 4n(-t)^{\beta} - Cn^2(-t) - C(-t)^{2\beta-1} \\ &= -q(-t) \\ &= -p(-t) \end{aligned}$$

Lema B.2 *Para cada* $t \in [-n^{\frac{1}{\beta-1}}, n^{\frac{1}{\beta-1}}]$ *temos*

$$\lambda n^2 n^{\frac{1}{\beta-1}} \geq p(t) \geq -\lambda n^2 n^{\frac{1}{\beta-1}}$$

onde $\lambda = \frac{4(\beta-1)^2}{2\beta-1}$.

Demonstração. Pelo Lema B.1, para cada $0 < t < n^{\frac{1}{\beta-1}}$ temos

$$0 = p(0) \leq p(t) \leq p(n^{\frac{1}{\beta-1}}) = \lambda n^2 n^{\frac{1}{\beta-1}}$$

Como p é ímpar, se $0 > t > n^{\frac{1}{\beta-1}}$ temos

$$p(t) = -p(-t) \geq -\lambda n^2 n^{\frac{1}{\beta-1}}$$

e

$$p(t) \leq p(0) = 0$$

■

Lema B.3 *Fixe* $t \in [-n^{\frac{1}{\beta-1}}, n^{\frac{1}{\beta-1}}]$. *Então*

- $g_t(-n^{\frac{1}{\beta-1}}) \leq 0$
- $g_t(n^{\frac{1}{\beta-1}}) \leq 0$

Demonstração. Não é difícil provar que para todos $x, y \in \mathbb{R}$

$$2(x|x|^{\beta-1} - y|y|^{\beta-1})^2 - C(x-y)(x|x|^{2(\beta-1)} - y|y|^{2(\beta-1)}) \leq 0.$$

Na verdade, esta última desigualdade é equivalente ao Lema 3.1.5. Para $x = n^{\frac{1}{\beta-1}}$ e $y = t$ temos

$$\begin{aligned}
&2(x|x|^{\beta-1} - y|y|^{\beta-1})^2 - C(x-y)(x|x|^{2(\beta-1)} - y|y|^{2(\beta-1)}) \\
&= 2(nn^{\frac{1}{\beta-1}} - t|t|^{\beta-1})^2 - C(n^{\frac{1}{\beta-1}} - t)(n^2 n^{\frac{1}{\beta-1}} - t|t|^{2(\beta-1)}) \\
&= g_t(n^{\frac{1}{\beta-1}}).
\end{aligned}$$

Analogamente, para $x = -n^{\frac{1}{\beta-1}}$ e $y = t$ temos

$$\begin{aligned}
&2(x|x|^{\beta-1} - y|y|^{\beta-1})^2 - C(x-y)(x|x|^{2(\beta-1)} - y|y|^{2(\beta-1)}) \\
&= 2(n(-n^{\frac{1}{\beta-1}}) - t|t|^{\beta-1})^2 - C(-n^{\frac{1}{\beta-1}} - t)(n^2(-n^{\frac{1}{\beta-1}}) - t|t|^{2(\beta-1)}) \\
&= g_t(-n^{\frac{1}{\beta-1}}).
\end{aligned}$$

■

Teorema B.4 *Fixe* $t \in [-n^{\frac{1}{\beta-1}}, n^{\frac{1}{\beta-1}}]$. *Então,*

$$g_t(s) \leq 0$$

para todo s *com* $|s| > n^{\frac{1}{\beta-1}}$.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} g_t'(s) &= 4n(ns - t|t|^{\beta-1}) - C(n^2 s - t|t|^{2(\beta-1)}) - C(s-t)n^2 \\ &= (4-2C)n^2 s - 4nt|t|^{\beta-1} + Ct|t|^{2(\beta-1)} + Ctn^2 \\ &= -\lambda n^2 s - 4nt|t|^{\beta-1} + Ct|t|^{2(\beta-1)} + Ctn^2 \end{aligned}.$$

Se $s < -n^{\frac{1}{\beta-1}}$ então

$$\begin{aligned} g_t'(s) &= -\lambda n^2 s + p(t) \\ &\geq -\lambda n^s s - \lambda n^2 n^{\frac{1}{\beta-1}} \\ &= \lambda n^2(-s - n^{\frac{1}{\beta-1}}) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto $g_t(s)$ é crescente em $(-\infty, -n^{\frac{1}{\beta-1}})$. Neste caso

$$g_t(s) \leq g_t(-n^{\frac{1}{\beta-1}}) \leq 0$$

Se porém $s > n^{\frac{1}{\beta-1}}$ temos

$$\begin{aligned} g_t'(s) &= -\lambda n^2 s + p(t) \\ &\leq -\lambda n^2 s + \lambda n^2 n^{\frac{1}{\beta-1}} \\ &= \lambda n^2(-s + n^{\frac{1}{\beta-1}}) < 0 \end{aligned}$$

Portanto $g_t(s)$ é decrescente em $(n^{\frac{1}{\beta-1}}, +\infty)$. Neste caso

$$g_t(s) \leq g_t(n^{\frac{1}{\beta-1}}) \leq 0.$$

Em qualquer caso, temos para todo $|s| < n^{\frac{1}{\beta-1}}$ que

$$g_t(s) \leq 0.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] G. Alberti, G. Bellettini, *A nonlocal anisotropic model for phase transitions. I. The optimal profile problem*, Math. Ann., **310** (1998), 527-560.

[2] F. Almgren, E. Lieb, *Symmetric Decreasing Rearrangement is Ssometimes Continuous*, J. of the Am. Math. soc., **2** (1989), 683-773.

[3] C. O. Alves, A. El Hamidi, *Existence of solution for an Anisotropic equation with criticial exponent*, Diff. Int. Equ., **21** (2008), 25-40.

[4] C. O. Alves, G. M. Figueiredo, R. G. Nascimento, *On existence and concentration of solutions for an elliptic problem with discontinuous nonlinearity via penalization method*, Z. Angew. Math. Phys **63** (2013), 1-22.

[5] C. O. Alves, O. H. Miyagaki, *A critical nonlinear fractional elliptic equation with saddle-like potential in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Phys, **57** (2016), 081501.

[6] C. O. Alves, M.A.S. Souto, *Existence of solutions for a class of elliptic equations in* $\mathbb{R}^n$ *with vanishing potentials*, J. Differential Equations, **252** (2012), 5555-5568.

[7] C. O. Alves, M. A. S. Souto, S. Soares, *Schrödinger-Poisson equations without Ambrosetti-Rabinowitz condition*, J. Math. Anal Appl, **377** (2011), 584-592.

[8] V. Ambrosio, *A Fractional Landesman-Lazer Type Problem set on* $\mathbb{R}^N$, Le Matematiche, **71.2** (2017), 99-116.

[9] V. Ambrosio, *Ground state for superlinear fractional schrödinger equations in* $\mathbb{R}^N$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **41** (2016), 745-756.

[10] H. Berestycki, P-L. Lions, *Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state,* Arch. Ration. Mech. Anal., **82** (1983), 313-345.

[11] G. M. Bisci, V. D. Radulescu, R. Servadei, *Variational methods for nonlocal fractional problems*, Cambridge University Press, **162** (2016).

[12] X. Cabré, X. Sola-Morales, *Layer solutions in a half-space for boundary reactions*, Comm. Pure Appl. Math., **58** (2005), 1678-1732.

[13] L. Caffarelli, L. Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equation, **32.8** (2007), 1245-1260.

[14] L. Caffarelli, L. Silvestre, *Regularity theory for fully nonlinear integro-differential equations*, Comm. Pure Appl. Math, **62 (5)** (2009), 597-638.

[15] S. Carl, V. K. Le, D. Motreanu, *Nonsmooth variational problems and their inequalities: Comparison principles and applications*, Springer Science & Business Media, (2007).

[16] X. Chang, *Ground States of some Fractional Schrödinger Equations on* $\mathbb{R}^N$, Proc. Edinb. Math. Soc, **58** (2015), 305-321.

[17] X. Chang, *Ground state solutions of asymptotically linear fractional Schrödinger equations*, J. Math. Phys., **54.6** (2013), 061504.

[18] K. C. Chang, *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations*, J. math. Analysis Aplic., **80** (1981), 102-129.

[19] C. Chen, *Infinitely many solutions for fractional schrödinger equations in* $\mathbb{R}^N$, Electron. J. Differential Equations, **88** (2016), 1-15.

[20] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, JSociety for Industrial and Applied Mathematics, (1990).

[21] P. d'Avenia, M. Squassina, M. Zenari, *Fractional logarithmic Schrödinger equations*, Math. Methods Appl. Sci., **38** (2015), 5207-5216.

[22] F. Demengel, G. Demengel, R. Erné *Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations*, London, UK: Springer, (2012).

[23] A. Di Castro, T. Kuusi, G. Palatucci, G., *Local behavior of fractional p-minimizers*, Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire, **33** (2015), 1279-1299.

[24] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math., **136** (2012), 512-573.

[25] R. C. Duarte, M. A. S. Souto, *Fractional Schrodinger-Poisson equations with general nonlinearities*, Electron. J. Differential Equations, **319** (2016), 1-19.

[26] R. C. Duarte, M. A. S. Souto, *Nonlocal Schrodinger Equations for Integro-Differential Operators with Measurable Kernels and Asymptotic Potentials*, arXiv preprint arXiv:1612.05696 (2016).

[27] G. Duvaut, J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer Science & Business Media, (2012).

[28] Evans, L. C.; *Partial Differential Equations*, Hardcover, **19** (2010).

[29] M. M. Fall, E. Valdinoci, *Uniqueness and Nondegeneracy of Positive Solutions of* $(-\Delta)^s u + u = u^p$ *in* $\mathbb{R}^N$ *when* s *is Close to* 1, Comm. Math. Phys., **329** (2014), 383-404.

[30] P. Felmer, A. Quaas, J. Tan, *Positive solutions of nonlinear Schrödinger equation with the fractional Laplacian*, Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A., **142** (2012), 1237-1262,.

[31] P. Felmer, C. Torres, *Radial Symmetry of ground states for a regional fractional nonlinear Schroinger equation*, Comm. on Pure And Aplied analysis, **13** (2014).

[32] G. M. Figueiredo, M. T. O. Pimenta, *Strauss and Lions Type Results in* $BV(\mathbb{R}^n)$*, with an Application to 1- Laplacian problem*, arXiv, preprint arXiv:1610.07369 (2016).

[33] S. Gaetano, M. Squassina, P. D'avenia, *On fractional choquard equations*, Math. Models Methods Appl. Sci., **25** (2015), 1447-1476.

[34] A. R. Giammetta, *Fractional Schrödinger-Poisson-Slater system in one dimension*, arXiv: 1405.2796v1.

[35] G. Gilboa, S. Osher, *Nonlocal operators with applications to image processing*, Multiscale Model. Simul., **7** (2008), 1005-1028.

[36] T. Gou, H. Sun, *Solutions of nonlinear Schrödinger equation with fractional Laplacian without the Ambrosetti-Rabinowitz condition*, Appl. Math. Comput., textbf257 (2014), 409-416.

[37] H. Hajaiej, *Generalized Polya-Szego Inequality*, arXiv preprint arXiv:1007.0176 (2010).

[38] A. L. Hamidi, J. M. Rakotoson, *Extremal functions for the anisotropic Sobolev Inequalities* Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´eaire, **24** (2007), 741-756.

[39] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points Critiquis et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer-Verlag, (1993).

[40] R. Lehrer, L. A. Maia, M. Squassina, *Asymptotically linear fractional Schrodinger equations*, Complex Var. Elliptic Equ., **60.4** (2015), 529-558.

[41] E. Lieb, M. Loss, *Analysis*, Graduate studies in mathematics, **14** (2001).

[42] P-L. Lions, *Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev*, Journal of Functional Analysis, **49** (1982), 315-334.

[43] S.M. Nikolškii, *On embedding continuation and approximation theorems for differentiable functions of several variables*, Russian Math. Surv., **16** (1961), 55-104.

[44] Y. Park, *Fractional Polya-Szego Inequality*, J. Chungcheong Math. Soc., **24.2** (2011), 267-271.

[45] G. Polya, G. Szegö, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Ann. of Math. Stud., **27** (1951).

[46] J. Rakosnik, *Some remarks to anisotropic Sobolev spaces I*, Beiträge Anal., **13** (1979), 55-68.

[47] J. Rakosnik, *Some remarks to anisotropic Sobolev spaces II*, Beiträge Anal., **15** (1981). 127-140.

[48] X. Ros Oton, *Integro-differential equations: Regularity theory and Pohozaev identities*, (2014).

[49] J. A. Santos, *Teoremas Minimax para Funcionais Localmente Lipschitz e Aplicações*, (2007).

[50] S. Secchi, *Ground state solutions for nonlinear fractional Schrödinger equations in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Phys., **54** (2013), 031501.

[51] L. Silvestre, *Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator.*, Comm. Pure Appl. Math., **60 (1)** (2007), 67-112.

[52] Y. Wan, Z. Wang, *Bound state for fractional Schrödinger equation with saturable nonlinearity*, Appl. Math. Comput., **273** (2016), 735-740.

[53] M. Willem, Minimax Theorems, Birkhauser, (1996).

[54] J. Xu, Z. Wei, W. Dong, *Existence of weak solutions for a fractional Schrödinger equation* , Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **22** (2015), 1215-1222.

[55] J. Zhang, *Existence and Multiplicity results for the Fractional Schrödinger-Poisson Systems*, arXiv:1507.01205v1.

[56] J. Zhang, J. M. Do Ó, M. Squassina, *Fractional Schrödinger-Poisson Systems with a general subcritical or critical nonlinearity*, Adv. Nonlinear Stud., **16** (2016), 15-30.

[57] H. Zhang, J. Xu, F. Zhang, *Existence and multiplicity of solutions for superlinear fractional Schrödinger equations in* $\mathbb{R}^N$., J. Math. Phys., **56** (2015), 091502.