Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Existência de soluções via métodos variacionais para uma classe de problemas quasilineares com expoentes variáveis

por

Marcelo Carvalho Ferreira

Campina Grande - PB
fevereiro/2014

Existência de soluções via métodos variacionais para uma classe de problemas quasilineares com expoentes variáveis

por

Marcelo Carvalho Ferreira

sob orientação do

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Campina Grande - PB

fevereiro/2014

Universidade Federal da Paraíba

Universidade Federal de Campina Grande

Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática

Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Análise

Aprovada em:

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Prof. Dr. Minbo Yang

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

fevereiro/2014

Agradecimentos

Em primeiro lugar, como não poderia deixar de ser, agradeço aos meus queridos pais, Hélio e Juçara, pela minha vida, pelo amor e carinho infinitos dados a mim desde o meu nascimento e também pelas oportunidades que me proporcionaram.

A minha avó Iracema, pelo amor, cuidado e dedicação concedidos a mim desde os meus primeiros dias de vida.

A minha tia Jaciara, meu tio Paulo e meu primo Rafael agradeço pelo carinho que sempre tiveram comigo, pelo apoio e torcida constantes.

A minha amada esposa Nara, pela dedicação, apoio e paciência sem limites, por todos os maravilhosos anos que temos passado juntos e, sobretudo, pelo presente mais valioso que recebi na minha vida: meu filho João Hélio.

Aos amigos do doutorado Alciônio, Gabriela, Jamilson, Lindomberg e Sibério, pela ajuda em momentos oportunos. Em especial ao Alciônio e Lindomberg pela constante e valiosa troca de informações sobre a bela teoria das Equações Diferenciais Parciais.

A amigos da Matemática que sempre demonstraram estar na torcida por mim: Anselmo, Cícero, Damião, Feliciano, Henrique, Marco Antônio, Silvana e Tony.

A todos os professores da extinta Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística por todo apoio recebido e por aprovarem em assembléia meu afastamento das atividades letivas durante 36 meses.

Aos professores Giovany, Marco Aurélio, Minbo e Olímpio pela disposição em participar da banca de minha defesa de tese e pelas importantes sugestões dadas no sentido de melhorar a redação do presente texto.

Por fim, um agradecimento especial ao professor Claudianor, com quem tenho a

honra de trabalhar, pela confiança em mim depositada e por sua infinita generosidade em transmitir parte de seu grande conhecimento na área de Equações Diferenciais Parciais Elípticas. Seus conselhos e ensinamentos, sem sombra de dúvidas, foram muito importantes para o meu amadurecimento profissional e pessoal.

"Quando as coisas se tornam muito complicadas, às vezes faz sentido parar e pensar: será que fiz a pergunta certa?"

Enrico Bombieri, "Prime Territory", The Sciences

Dedicatória

Para os meus amores, Nara e João Hélio.

Resumo

Nesta tese estabelecemos resultados de existência e multiplicidade de soluções para algumas classes de problemas sobre $\mathbb{R}^N$ envolvendo o operador $p(x)$-laplaciano. Na primeira parte, consideramos classes de problemas com não-linearidades tendo crescimento crítico. Na parte final, consideramos uma classe de problemas com não-linearidade tendo um crescimento subcrítico. Neste último caso, buscamos soluções do tipo multi-bump. Entre as ferramentas utilizadas estão o Teorema do Passo da Montanha, Príncipio de Concentração de Compacidade, Lema de Lions, Princípio Variacional de Ekeland e o Método de Penalização.

Palavras-Chave: Expoentes Variáveis; $p(x)$-laplaciano; Métodos Variacionais; Crescimento Crítico.

Abstract

In this thesis we establish existence and multiplicity results for solutions to some classes of problems on $\mathbb{R}^N$ involving the $p(x)$-Laplacian operator. In the first part, we consider classes of problems dealing with nonlinearities possessing critical growth. Ultimately, we consider a class of problems with a nonlinearity possessing a subcritical growth. In this latter case, we searched for multi-bump solutions. Among the tools we used are Mountain Pass Theorem, Concentration-Compactness Principle, Lion's Lemma, Ekeland's Variational Principle and Penalization Method.

Keywords: Variable Exponents; $p(x)$-Laplacian; Variational Methods; Critical Growth.

Conteúdos

Indíce de Notações 1

Introdução 5

1 Preliminares **15**

1.1 Espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis 17

1.1.1 Espaços de Lebesgue com expoente variável 17

1.1.2 Espaços de Sobolev com expoente variável 25

1.2 Um teorema do tipo Brezis-Lieb 30

1.3 O Teorema do Passo da Montanha 33

1.4 O Princípio Variacional de Ekeland 34

1.5 O gênero de Krasnoselski 36

2 Perturbações não-periódicas de uma equação do tipo $p(x)$-laplaciano com crescimento crítico em $\mathbb{R}^N$. **39**

2.1 Introdução 41

2.2 O problema periódico 43

2.2.1 Resultados preliminares 45

2.2.2 Demonstração do Teorema 2.2.1 58

2.3 Demonstração do Teorema 2.1.2 66

3 Equações do tipo $p(x)$-laplaciano envolvendo uma não-linearidade côncava-convexa com crescimento crítico em $\mathbb{R}^N$ **73**

3.1 Introdução 75

3.2 Existência e multiplicidade de soluções não-negativas 77
3.2.1 Resultados preliminares 77
3.2.2 Existência de uma solução com energia positiva 84
3.2.3 Existência de uma solução com energia negativa 87
3.2.4 Demonstração do Teorema 3.1.1 89
3.3 Existência e multiplicidade de soluções com energia negativa 89
3.3.1 Resultados preliminares 90
3.3.2 O funcional truncado 92
3.3.3 Demonstração do 3.1.2 97

4 Soluções do tipo multi-bump para uma classe de problemas quasilineares em $\mathbb{R}^N$ envolvendo expoentes variáveis e crescimento subcrítico 99
4.1 Introdução 101
4.2 O problema auxiliar (A_λ) 103
4.2.1 A geometria do passo da montanha 106
4.2.2 A limitação das sequências Palais-Smale 107
4.2.3 A condição Palais-Smale 108
4.3 A limitação das soluções para (A_λ) 112
4.4 A condição $(PS)_\infty$ 119
4.5 Um valor crítico especial para ϕ_λ 123
4.6 A existência de soluções multi-bump para (P_λ) 130

Apêndices

A Espaços modulares 139

B Uma Aplicação do Método de Iteração de Moser ao Problema (P_∞) 145

C Uma propriedade do nível do passo da montanha correspondente a I_∞. 153

Bibliografia 157

Indíce de Notações

Definições e Notações Gerais:

- Neste tese, C e C_i denotam constantes positivas genéricas, as quais podem variar de linha para linha;
- A^c denota o complementar do conjunto A;
- Nos Capítulos 2, 3 e 4, em todas as integrais omitimos o símbolo dx;
- $\mathbb{R}^N$ denota o espaço euclidiano N-dimensional;
- $B_r(x)$ é a bola aberta de centro x e raio $r > 0$;
- Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável à Lebesgue, então $\big|\Omega\big|$ denota a medida de Lebesgue de Ω;
- A expressão *q.t.p.* é uma abreviação para *quase todo ponto*;
- supp(u) denota o suporte da função u;
- $x_n = o_n(1)$ se, e só se, $x_n \to 0$;
- $x_n \downarrow x$ significa que $x_n \to x$ e $x_{n+1} < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $x_n \uparrow x$ significa que $x_n \to x$ e $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- O símbolo $\to$ significa convergência em norma;
- O símbolo $\rightharpoonup$ significa convergência fraca;
- $X \hookrightarrow Y$ denota que X está imerso continuamente em Y;

- Se $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável, então u^- e u^+ denotam as partes negativa e positiva de u respectivamente. Ou seja,
$$u^-(x) = \min\big\{u(x), 0\big\} \text{ e } u^+(x) = \max\big\{u(x), 0\big\};$$

- Se $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável, então
$$u_- = \inf_{\Omega}\text{ess}\, u \text{ e } u_+ = \sup_{\Omega}\text{ess}\, u;$$
- Dadas $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mensuráveis, o símbolo $u \ll v$ denota que
$$\inf_{\Omega}\text{ess}\, \big(v(x) - u(x)\big) > 0;$$
- $\mathcal{M}\big(\mathbb{R}^N\big)$ denota o espaço das medidas de Radon;
- $X^\star$ é o dual topológico de X.

Espaços de Funções:

- $\mathcal{C}\big(\Omega\big)$ denota o espaço das funções contínuas;
- $\mathcal{C}^k\big(\Omega\big) = \big\{u \in \mathcal{C}\big(\Omega\big)\, ; \, u \text{ é } k\text{-vezes continuamente diferenciável}\big\};$
- $\mathcal{C}^\infty\big(\Omega\big) = \bigcap_{k\geq 1} \mathcal{C}^k\big(\Omega\big);$
- $\mathcal{C}_0^\infty\big(\Omega\big) = \big\{u \in \mathcal{C}^\infty\big(\Omega\big)\, ; \, \text{supp}(u) \subset \Omega \text{ é compacto}\big\};$
- $L^h\big(\Omega\big) = \left\{u\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável}\, ; \, \int_\Omega |u|^h < \infty\right\}$ munido da norma
$$|u|_h = \left(\int_\Omega |u|^h\right)^{\frac{1}{h}};$$
- $L^\infty\big(\Omega\big) = \left\{u\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável}\, ; \, \sup_{\Omega}\text{ess}\, |u| < \infty\right\}$ munido da norma
$$|u|_\infty = \sup_{\Omega}\text{ess}\, |u|;$$
- $L_+^\infty\big(\Omega\big) = \big\{h \in L^\infty\big(\Omega\big)\, ; \, h_- \geq 1\big\};$
- Se $h \in L_+^\infty\big(\Omega\big)$, definimos
$$L^{h(x)}\big(\Omega\big) = \left\{u\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável}\, ; \, \int_\Omega |u|^{h(x)} < \infty\right\}$$
munido da norma
$$|u|_{h(x)} = \inf\left\{\lambda > 0\, ; \, \int_\Omega \left|\frac{u}{\lambda}\right|^{h(x)} dx \leq 1\right\};$$

- Se $h \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$, definimos
$$W^{1,h(x)}(\Omega) = \left\{u \in L^{h(x)}(\Omega)\,;\, |\nabla u| \in L^{h(x)}(\mathbb{R}^N)\right\}$$
munido da norma
$$|u| = |\nabla u|_{h(x)} + |u|_{h(x)}.$$

Introdução

Desde a última década do século passado, considerável atenção têm sido dada a problemas envolvendo o operador $p(x)$-laplaciano, ou seja,

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\nabla u\right).$$

Acreditamos que uma das motivações para tal fato são as aplicações deste operador a uma ampla variedade de campos de pesquisa. Entre tais está a Mecânica dos Fluidos, mais exatamente, os fluidos eletrorreológicos, descobertos por Willis Winslow [84] na década de 40. Os fluidos eletrorreológicos possuem a interessante e útil propriedade de que sua viscosidade pode se alterar drasticamente em questão de milésimos de segundos pela ação de um campo elétrico externo. Eles são utilizados, por exemplo, em Robótica e Tecnologia Espacial. De acordo com [74], a pesquisa experimental relativa aos fluidos eletrorreológicos tem sido realizada sobretudo nos EUA, algumas destas em laboratórios da NASA.

Um modelo Matemático para os fluidos eletrorreológicos é apresentado com detalhes no texto de Růžička [76] (veja também Rajagopal & Růžička [75]). Neste modelo, as equações que descrevem o movimento de um fluido eletrorreológico incompressível, homogêneo e isotérmico são dadas por

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u + \operatorname{div} S(u) + \left[\nabla u\right]u + \nabla\pi = f + \left[\nabla E\right]P, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases}$$

onde $u\colon \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$ é a velocidade do fluido em um ponto do espaço-tempo, $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ é operador gradiente, $\left[\nabla u\right]u = \left(\sum_{j=1}^{3} u_j\partial_j u_i\right)_{i=1,2,3}$ é o termo convectivo,

$\pi\colon \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}$ é a pressão, $f\colon \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$ representa forças externas, $E\colon \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$ é o campo elétrico, $P\colon \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$ é a polarização elétrica e $S\colon W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^{3+1}) \to \mathbb{R}^{3x3}$ é o tensor stress. Além disso, E e P estão sujeitos às equações quase-estáticas de Maxwell, isto é,

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\varepsilon_0 E + P\right) = 0, \\ \operatorname{curl} E = 0, \end{cases}$$

onde ε_0 denota a constante dielétrica no vácuo.

Assumindo que a polarização elétrica P seja constante e que o tensor stress S satisfaça uma dependência adequada em E, obtemos

$$S(u)(x) = \mu(x)\left(1 + \left|Du(x)\right|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} Du(x),$$

sendo $Du = \frac{1}{2}\left(\left[\nabla u\right] + \left[\nabla u\right]^T\right)$ é a parte simétrica do gradiente de u. Assim, chegamos a uma equação à expoentes variáveis.

Uma outra aplicação do operador $p(x)$-laplaciano, devida a Chen, Levine & Rao [35], encontra-se no campo de processamento de imagens. Em [35], os autores combinaram dois modelos conhecidos para restauração de imagens e obtiveram um novo modelo. Neste, deve-se minimizar a energia

$$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left|\nabla u(x)\right|^{p(x)} + |u(x) - I(x)|^2\,dx,$$

onde Ω é tipicamente um retângulo no plano e o expoente p varia entre 1 e 2, para recuperar a imagem real u a partir da imagem com ruído observada I. A grande virtude do modelo de Chen, Levine & Rao, possível devido ao caráter variável do expoente, é que os modelos anteriores são combinados de modo que as deficiências de qualquer um deles sejam substituídas pelas qualidades do outro.

Mais aplicações do operador $p(x)$-laplaciano são encontradas em Antontsev & Rodrigues [23], Antontsev & Shmarev [24] e Zhikov [85].

O objetivo da presente tese é o estudo da existência e multiplicidade de soluções para alguns problemas envolvendo o operador $p(x)$-laplaciano. Devido a perda da homogeneidade, tal operador é mais complexo do que o operador p-laplaciano e, de um modo geral, quando lidamos com este operador quase sempre devemos procurar por métodos e ferramentas distintas daquelas utilizadas no caso constante.

A tese está organizada da seguinte forma. No Capítulo 1, é apresentada uma breve introdução ao espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis. O objetivo é informar ao leitor os principais conceitos e resultados utilizados. Apresentamos um Teorema do tipo Brezis-Lieb muito adequado ao nosso trabalho, cuja demonstração para expoentes constantes encontra-se fragmentada nos artigos [5] e [64]. Adaptamos as demonstrações no caso constante para o contexto dos expoentes variáveis e reunimo-as em uma única proposição. O restante do Capítulo consiste de uma revisão de importantes ferramentas utilizadas: o Teorema do Passo da Montanha, o Princípio Variacional de Ekeland e o gênero de Krasnoselski.

No Capítulo 2, consideramos a classe de problemas

$$(P_\infty)\quad \begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + V(x)|u|^{p(x)-2}u = \mu|u|^{q(x)-2}u + |u|^{p^*(x)-2}u, \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, \end{cases}$$

a um parâmetro $\mu > 0$, supondo a $\mathbb{Z}^N$-periodicidade dos expoentes contínuos $p\colon \mathbb{R}^N \to (1, N)$ e $q\colon \mathbb{R}^N \to (1, N)$ e do potencial contínuo $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

No primeiro Teorema apresentado no Capítulo 2, demonstramos que se

$$V(x) \geq V_0 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

e o termo da não-linearidade afetado pelo parâmetro é superlinear ($p_+ < q_-$) e uniformemente subcrítico ($q \ll p^*$), então para valores suficientemente grandes de $\mu > 0$, o problema (P_∞) possui uma *solução ground-state* (energia mínima entre todas as soluções) não-negativa.

No contexto dos expoentes constantes, Alves, Carrião & Miyagaki demonstraram em [20] a existência de uma solução ground-state para o análogo semilinear de (P_∞). Em vista dos expoentes variáveis, diferentemente de [20], tivemos que aprender a contornar a ausência de extremos (em geral) para a imersão de Sobolev $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*(x)}(\mathbb{R}^N)$. Isto foi alcançado utilizando-se uma importante propriedade do nível do passo da montanha associado com (P_∞) (veja apêndice C), após a descoberta de um substituto para o número $\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$ no contexto dos expoentes variáveis.

Ainda no Capítulo 2, após o estudo de (P_∞), consideramos uma classe de problemas relacionados a uma perturbação não-periódica de (P_∞), a saber,

$$(P)\ \begin{cases} -\Delta_{p(x)+\sigma(x)}u + U(x)|u|^{p(x)+\sigma(x)-2}u = \mu|u|^{q(x)-\tau(x)-2}u + |u|^{p^*(x)-2}u, \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p(x)+\sigma(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, \end{cases}$$

a um parâmetro $\mu > 0$. Neste caso, adicionamos as hipóteses de que o potencial U satisfaz

$$U(x) > U_0 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

e

$$U(x) \uparrow V(x), \quad |x| \to \infty.$$

O expoente p cumpre a condição

$$p(x) = m, \forall x \in B_{R_1}(z), \tag{1}$$

onde $m \in (1, N)$, $z \in (0,1)^N$ e $R_1 \approx 0^+$. As perturbações $\sigma, \tau\colon \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ são pequenas no sentido de que o termo da não-linearidade afetado pelo parâmetro é superlinear e subcrítico. Além disso, existe $0 < R < R_1$ tal que

$$\operatorname{supp}\sigma, \operatorname{supp}\tau \subset \overline{B_R(z)}.$$

No segundo Teorema apresentado no Capítulo 2, demonstramos que com as hipóteses acima, para valores suficientemente grandes de $\mu > 0$, o problema perturbado (P) possui uma *solução ground-state* não-negativa.

Problemas envolvendo potenciais periódicos ou assintoticamente periódicos no infinito possuem uma extensa bibliografia. Há numerosos trabalhos relevantes no caso de expoentes constantes. Uma pequena lista poderia incluir, por exemplo, Pankov [70], Rabinowitz [73], Coti-Zelati & Rabinowitz [37], Montecchiari [66], Alves, Carrião & Miyagaki [20] e Alves, do Ó & Miyagaki [19] no caso de problemas definidos. No caso indefinido, Kryszewski & Szulkin [60], Troestler & Willem [80], Pankov & Pflüger [71], Bartsch & Ding [26], Willem & Zou [83], Chabrowski & Yang [34] e Schechter & Zou [77].

Seguindo sugestão de Pankov, Fan considerou problemas periódicos no contexto de expoentes variáveis. Em [43], Fan considerou uma classe de perturbações não-periódicas como no problema (P), porém com a não-linearidade tendo um crescimento subcrítico. Mais precisamente, uma classe de problemas estudados foi

$$(P_1) \begin{cases} -\Delta_{p(x)+\sigma(x)}u + a(x)V(x)|u|^{p(x)+\sigma(x)-2}u = b(x)|u|^{-\tau(x)}f(x,u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, \; u > 0, \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $p\colon \mathbb{R}^N \to (1,N)$, $\sigma, \tau, V, a, b\colon \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ e $f\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo algumas hipóteses, entre estas, p e V sendo $\mathbb{Z}^N$-periódicas e f tendo um crescimento uniformemente subcrítico. A principal ferramenta utilizada foi o método variacional, mais exatamente, algumas caracterizações do passo da montanha correspondente ao funcional energia associado com o problema (P_1).

A partir do trabalho de Fan supracitado, nos motivamos a procurar por uma solução ground-state para o problema (P). Até certo ponto, utilizamos argumentos semelhantes àqueles em [43]. Todavia, uma parte crucial dos argumentos naquele trabalho é que a solução do problema periódico relacionado a (P_1) possui um comportamento adequado no infinito. Isto é obtido via uma teoria de regularidade válida somente na hipótese de crescimento subcrítico e, portanto, não se mantém quando lidamos com crescimento crítico. Para contornar a ausência de uma teoria de regularidade válida na hipótese de crescimento crítico, impomos a condição adicional (1) ao expoente p. Tal condição permite aplicar o Método de Iteração de Moser para concluir um comportamento adequado para uma transladada adequada da solução obtida para (P_∞). Observamos que para problemas envolvendo o operador $p(x)$-laplaciano, perdemos o controle sobre os expoentes nas estimativas necessárias à iteração de Moser. Assim, sem uma hipótese adicional como (1), não seria claro que o Método de Iteração de Moser fosse uma boa ferramenta para obter as estimativas que necessitávamos. Destacamos que os resultados do Capítulo 2 desta tese originaram um artigo de pesquisa, o qual foi aceito para publicação na revista *Mathematische Nachrichten* no ano de 2014 (veja [13]).

No Capítulo 3, após perturbarmos a equação em (P_∞), consideramos a seguinte classe de problemas

$$(P_{\lambda,\mu})\begin{cases}-\Delta_{p(x)}u+V(x)|u|^{p(x)-2}u=\lambda h|u|^{r(x)-2}u+\mu|u|^{q(x)-2}u+|u|^{p^*(x)-2}u, \text{ em } \mathbb{R}^N,\\ u\in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)\setminus\{0\},\end{cases}$$

a dois parâmetros $\lambda,\mu>0$, onde $r\colon \mathbb{R}^N\to(1,N)$ é contínua e satisfaz $r_+<p_-$. A função h é não-negativa e pertence a $L^{\Theta(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$ com

$$\Theta(x)=\frac{Np(x)}{Np(x)-r(x)\big(N-p(x)\big)}.$$

Nosso interesse neste problema teve origem em Alves [4]. Neste artigo, Alves considerou a existência de soluções para a seguinte classe de problemas

$$(P_2)\begin{cases}-\Delta_p u=\lambda g(x)u^{r-1}+u^{p^*-1}, \text{ em } \mathbb{R}^N,\\ u\in D^{1,p}\big(\mathbb{R}^N\big)\setminus\{0\},\ u\geq 0, \text{ em } \mathbb{R}^N,\end{cases}$$

a um parâmetro $\lambda>0$, onde $2\leq p\leq N$, $1<r<p$ é constante e g é uma função não-negativa pertecente a $L^{\theta}(\mathbb{R}^N)$ com

$$\theta=\frac{Np}{Np-r(N-p)}.$$

Utilizando métodos variacionais, Alves estabeleceu a existência de duas soluções com energias opostas quando $\lambda>0$ é suficientemente pequeno.

Uma extensa pesquisa sobre problemas que apresentam uma perturbação do termo crítico tem sido desenvolvida desde o artigo seminal de Brezis & Nirenberg [32]. Encontramos na literatura numerosos trabalhos neste sentido, tanto sobre domínios limitados quanto ilimitados. Citamos, por exemplo, Guedda & Veron [53], Tarantelo [79], Pan [69], Azorero & Peral [51], Ambrosetti, Brezis & Cerami [22], Cao, Li & Zhou [33] e Gonçalves & Alves [52]. Entretanto, considerando expoentes variáveis, conhecemos somente Bonder & Silva [30], onde o domínio considerado é limitado.

Motivados pelas informações acima, mostramos que resultados análogos àqueles encontrados em [4] são válidos no contexto de expoentes variáveis.

No primeiro Teorema apresentado no Capítulo 3, demonstramos a existência de $\mu^*>0$ com a seguinte propriedade: para cada $\mu\geq\mu^*$, existe $\lambda_\mu=\lambda(\mu)>0$ tal que o problema $(P_{\lambda,\mu})$ possui duas soluções não-negativas $\Psi_1, \Psi_2 \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ com energias opostas, para todo $\lambda \in (0, \lambda_\mu)$.

Uma parte fundamental da demonstração é que para valores suficientemente grandes do parâmetro $\mu > 0$, o funcional energia considerado para $(P_{\lambda,\mu})$ satisfaz uma condição de compacidade do tipo (PS) abaixo de um determinado nível (*condição* (PS) *local*), o qual é uma função do parâmetro $\lambda > 0$. Novamente, a principal dificuldade da demonstração é contornar a ausência de extremos (em geral) para a imersão de Sobolev $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*(x)}(\mathbb{R}^N)$ e, devido a uma relação existente entre os funcionais energia considerados para $(P_{\lambda,\mu})$ e (P_∞), resultados do Capítulo 2 são utilizados.

Ainda no Capítulo 3, adaptamos ao contexto dos expoentes variáveis, as idéias desenvolvidas por Azorero & Peral em [51]. Naquele trabalho, Azorero & Peral demonstraram um resultado de multiplicidade de soluções para

$$(P_3) \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{r-2}u + u^{p^*-2}u, \text{ em } \Omega, \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}, \end{cases}$$

quando $1 < r < p$. Em vista de uma condição (PS) local e sem a exigência de soluções com sinal, puderam utilizar a Teoria do gênero de Krasnoselski para obter uma infinidade de soluções com energias negativas. Motivados por [51], obtivemos um resultado análogo para $(P_{\lambda,\mu})$.

No segundo Teorema apresentado no Capítulo 3, demonstramos a existência de $\mu^* > 0$ com a seguinte propriedade: para cada $\mu \geq \mu^*$, existe $\lambda_\mu = \lambda(\mu) > 0$ tal que o problema $(P_{\lambda,\mu})$ possui infinitas soluções com energias negativas, para todo $\lambda \in (0, \lambda_\mu)$.

Observamos que embora encontremos numerosos trabalhos envolvendo o operador $p(x)$-laplaciano na literatura atual, dentre estes, os trabalhos tratando de problemas com crescimento crítico formam um conjunto extremamente reduzido. Neste sentido, acreditamos que com os resultados dos Capítulos 2 e 3 demos uma pequena contribuição para a pesquisa de tais tipos de problemas. Destacamos que os resultados do Capítulo 3 desta tese originaram um artigo de pesquisa, o qual foi aceito para publicação na revista *Topological Methods in Nonlinear Analysis* no ano de 2014 (veja [14]).

No Capítulo 4, consideramos a existência de soluções do tipo *multi-bump* para a classe de problemas

$$
(P_\lambda)\quad \begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + \big(\lambda V(x) + Z(x)\big)|u|^{p(x)-2}u = f(x,u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big) \setminus \{0\},\, u \geq 0, \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases}
$$

a um parâmetro $\lambda > 0$, onde supomos o expoente $p\colon \mathbb{R}^N \to (1, N)$ contínuo (lipschitziano), os potenciais $V, Z\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ contínuos, $V \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$ e $f \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}\big)$ possuindo um crescimento subcrítico. Além disso, existem $M > 0$ e $K > 0$ tais que

$$
\lambda V(x) + Z(x) \geq M,\ \forall x \in \mathbb{R}^N, \lambda \geq 1,
$$

e

$$
\big|Z(x)\big| \leq K,\ \forall x \in \mathbb{R}^N.
$$

Observamos que no contexto de expoentes constantes, existem importantes trabalhos relacionados a existência e mutiplicidade de soluções do tipo multi-bump para este tipo de problema. No caso semilinear, citamos Bartsch & Wang [27], [28], Wang [81], Bartsch, Pankov & Wang [29], Ding & Tanaka [40], Clapp & Ding [36], Alves, de Morais & Souto [18] e Alves [8]. No caso quasilinear, citamos Alves [6], [7] e Alves & Ding [12].

Em [40], Ding & Tanaka consideraram o problema $\big(P_\lambda\big)$ com $p = 2$ e $f(u) = u^q$, $q \in \big(1, \frac{N+2}{N-2}\big)$ se $N \geq 3$; $q \in (1, \infty)$ se $N = 1, 2$. Naquele trabalho, os autores demonstraram que o número de soluções do tipo multi-bump para $\big(P_\lambda\big)$ está relacionado a uma geometria do conjunto $V^{-1}(0)$. Mais precisamente, nas hipóteses de que $\Omega := \operatorname{int} V^{-1}(0)$ seja limitado, não-vazio, $\overline{\Omega} = V^{-1}(0)$ e

$$
\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i,
$$

com as componentes conexas $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ de Ω tais que $\operatorname{dist}\big(\Omega_i, \Omega_j\big) > 0$, se $i \neq j$, o problema $\big(P_\lambda\big)$ possui pelo menos $2^k - 1$ soluções u_λ, desde que os valores de λ sejam grandes, sendo uma solução para cada subconjunto não-vazio Υ de $\{1, \ldots, k\}$. Além disso, fixado Υ, de toda sequência $\lambda_n \to \infty$ podemos extrair uma subsequência λ_{n_i} tal que $u_{\lambda_{n_i}}$ converge em $H^1\big(\mathbb{R}^N\big)$ para uma função u, a qual satisfaz $u = 0$ fora de $\Omega_\Upsilon = \bigcup_{j\in\Upsilon} \Omega_j$ e

$u_{|\Omega_j}$, $j \in \Upsilon$, é uma solução de energia mínima para

$$(P_4) \begin{cases} -\Delta u + Z(x)u = u^q, \text{ em } \Omega_j, \\ u \in H_0^1(\Omega_j),\ u > 0, \text{ em } \Omega_j. \end{cases}$$

Alguns argumentos explorados em [40] foram adaptados de argumentos encontrados em del Pino & Felmer [38] e Seré [78].

Em [7], empregando argumentos diferentes daqueles utilizados em [40], Alves estendeu os resultados em [40] para o operador p-laplaciano, assumindo que em (P_λ) a não-linearidade $f = f(u)$ possui um crescimento subcrítico e $2 \leq p < N$.

Motivados pelos resultados descritos acima, estudamos a existência e multiplicidade de soluções do tipo multi-bump para o problema (P_λ) no contexto de expoentes variáveis. No principal resultado apresentado no Capítulo 4 estendemos os resultados em [7] ao operador $p(x)$-laplaciano, completando assim os estudos em [7] e [40].

Observamos que em [7], o método de iteração de Moser foi utilizado como uma ferramenta básica para obtenção de estimativas na norma L^∞. Infelizmente, como já dissemos anteriormente, a menos de alguma hipótese adicional, não é claro que o referido método seja uma boa ferramenta para obter as estimativas na norma L^∞ quando lidamos com equações envolvendo o operador $p(x)$-laplaciano. Por outro lado, como estamos lidando com um crescimento subcrítico, pudemos adaptar algumas idéias diferentes exploradas em [44] e [50] para obter tais estimativas sem o uso do Método de Iteração de Moser e, portanto, sem a imposição de uma hipótese adicional.

Ressaltamos que no contexto de expoente variáveis, até onde sabemos, este é o primeiro estudo relacionado a soluções do tipo multi-bump.

Para finalizar a tese, no Apêndice A, apresentamos uma breve introdução ao conceito abstrato de espaço modular. Os espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis são exemplos concretos de tais espaços. Nos Apêndices B e C, demonstramos alguns resultados utilizados no Capítulo 2. Escolhemos separá-los em apêndices devido às tecnicalidades envolvidas. Assim é que no Apêndice B demonstramos a importante estimativa na norma L^∞ para uma transladada da solução obtida para (P_∞), enquanto no Apêndice C a importante propriedade do nível do passo da montanha associado com

(P_∞), citados anteriormente.

Capítulo 1

Preliminares

Conteúdo

1.1 Espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis . . . 17

1.1.1 Espaços de Lebesgue com expoente variável 17

1.1.2 Espaços de Sobolev com expoente variável 25

1.2 Um teorema do tipo Brezis-Lieb 30

1.3 O Teorema do Passo da Montanha 33

1.4 O Princípio Variacional de Ekeland 34

1.5 O gênero de Krasnoselski 36

1.1 Espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis

Nesta seção reunimos alguns fatos acerca de espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis. Tais espaços diferem dos espaços usuais L^p e $W^{k,p}$ no sentido de que o expoente p não é uma constante, mas uma função.

O leitor encontrará exposições mais completas sobre o assunto, contendo demonstrações aqui omitidas ou tocando outros pontos não relevantes para esta tese, nos artigos introdutórios [45] e [59]. Um estudo compreensivo, incluindo uma breve introdução histórica e aplicações, é apresentado no livro-texto [39].

1.1.1 Espaços de Lebesgue com expoente variável

Com o intuito de definir os espaços de Lebesgue com expoente variável (e portanto os espaços de Sobolev), necessitamos introduzir a classe dos expoentes que serão considerados. Esta classe é descrita na próxima definição.

Definição 1.1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto Lebesgue mensurável. Então*

$$L^\infty_+(\Omega) = \{h \in L^\infty(\Omega)\,;\, h_- \geq 1\}.$$

Dada $h \in L^\infty_+(\Omega)$, escrevemos h' para denotar seu *expoente conjugado pontual*, isto é,

$$\frac{1}{h(x)} + \frac{1}{h'(x)} = 1 \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

com a convenção de que $1/\infty = 0$.

Introduzimos agora os espaços de Lebesgue com expoente variável.

Definição 1.1.2. *Para cada $h \in L^\infty_+(\Omega)$, definimos o* espaço de Lebesgue com expoente variável $L^{h(x)}(\Omega)$ *como*

$$L^{h(x)}(\Omega) = \left\{u\colon \Omega \to \mathbb{R} \textit{ mensurável}\,;\, \int_\Omega |u|^{h(x)}\,dx < \infty\right\},$$

munido da norma de Luxemburg

$$|u|_{L^{h(x)}(\Omega)} = |u|_{h(x)} = \inf\left\{\lambda > 0\,;\, \int_\Omega \left|\frac{u}{\lambda}\right|^{h(x)} dx \leq 1\right\}.$$

Equipado com esta norma, $L^{h(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável . Se Ω é um aberto, $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é um subconjunto denso. Além disso, se $h_- > 1$, então $L^{h(x)}(\Omega)$ também é um espaço reflexivo e $L^{h'(x)}(\Omega)$ é identificado ao espaço dual topológico de $L^{h(x)}(\Omega)$.

Observamos que sendo $h(x) = h$ constante, q.t.p em Ω, a norma de Luxemburg coincide com a norma usual sobre $L^h(\Omega)$.

O conceito apresentado na definição seguinte se revelará um dos mais relevantes para a teoria dos espaços $L^{h(x)}(\Omega)$.

Definição 1.1.3. *O funcional* $\rho_{h(x)} \colon L^{h(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definido como*

$$\rho_{h(x)}(u) = \int_\Omega |u|^{h(x)} \, dx,$$

é denominado a modular *relativa ao espaço* $L^{h(x)}(\Omega)$

Para $u \in L^{h(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ fixo, a função $\lambda \in [0, \infty) \mapsto \rho_{h(x)}(\lambda u)$ é convexa, estritamente crescente, contínua e (devido a falta de homogeneidade de $\rho_{h(x)}$) verifica

- Se $\lambda < 1$, então $\lambda^{h_+} \rho_{h(x)}(u) \le \rho_{h(x)}(\lambda u) \le \lambda^{h_-} \rho_{h(x)}(u)$;
- Se $\lambda > 1$, então $\lambda^{h_-} \rho_{h(x)}(u) \le \rho_{h(x)}(\lambda u) \le \lambda^{h_+} \rho_{h(x)}(u)$.

Evidentemente

$$|u|_{h(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0 \, ; \, \rho_{h(x)} \left(\frac{u}{\lambda} \right) \le 1 \right\}.$$

Proposição 1.1.4. *Seja* $u \in L^{h(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$. *Então, existe um único* $a > 0$ *tal que* $\rho_{h(x)}\left(\frac{u}{a}\right) = 1$. *Além disso,* $a = |u|_{h(x)}$.

Demonstração. Dado $u \in L^{h(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$, a função $\lambda \in (0, \infty) \mapsto \rho_{h(x)}(\lambda^{-1} u)$ é contínua, estritamente decrescente e verifica

$$\rho_{h(x)}(\lambda^{-1} u) \to \infty, \text{ se } \lambda \to 0^+; \ \rho_{h(x)}(\lambda^{-1} u) \to 0, \text{ se } \lambda \to \infty.$$

Portanto, existe um único $a > 0$ tal que $\rho_{h(x)}(a^{-1} u) = 1$. Obviamente

$$a = \min \left\{ \lambda > 0 \, ; \, \rho_{h(x)} \left(\frac{u}{\lambda} \right) \le 1 \right\} = |u|_{h(x)}.$$

■

Uma importante estimativa que será frequentemente utilizada neste trabalho é dada na próxima proposição.

Proposição 1.1.5. *Seja* $m \in L^{\infty}(\Omega)$ *com* $0 < m_{-} \leq m(x) \leq h(x)$ *q.t.p em* Ω. *Se* $u \in L^{h(x)}(\Omega)$, *então* $|u|^{m(x)} \in L^{\frac{h(x)}{m(x)}}(\Omega)$ *e*

$$\left||u|^{m(x)}\right|_{\frac{h(x)}{m(x)}} \leq \max\left\{|u|_{h(x)}^{m_{-}}, |u|_{h(x)}^{m_{+}}\right\} \leq |u|_{h(x)}^{m_{-}} + |u|_{h(x)}^{m_{+}}.$$

Demonstração. Suponha $|u|_{h(x)} \leq 1$. Pela Proposição 1.1.4 obtemos

$$\int_{\Omega}\left|\frac{|u|^{m(x)}}{|u|_{h(x)}^{m_{-}}}\right|^{\frac{h(x)}{m(x)}} dx \leq 1$$

e, portanto, $\left||u|^{m(x)}\right|_{\frac{h(x)}{m(x)}} \leq |u|_{h(x)}^{m_{-}} = \max\left\{|u|_{h(x)}^{m_{-}}, |u|_{h(x)}^{m_{+}}\right\}$. No caso em que $|u|_{h(x)} > 1$, o raciocínio é análogo. ■

Temos a seguinte generalização da desigualdade de Hölder.

Proposição 1.1.6 (Desigualdade de Hölder). *Se* $h_{-} > 1$, *então quaisquer* $u \in L^{h(x)}(\Omega)$ *e* $v \in L^{h'(x)}(\Omega)$ *satisfazem*

$$\int_{\Omega}|uv|\, dx \leq \left(\frac{1}{h_{-}} + \frac{1}{h'_{-}}\right)|u|_{h(x)}|v|_{h'(x)}.$$

Demonstração. Podemos admitir que $u, v \neq 0$. Escrevemos $|u|_{h(x)} = a$ e $|v|_{h'(x)} = b$. Pela desigualdade de Young e Proposição 1.1.4, concluímos que

$$\int_{\Omega}\frac{|u(x)|}{a}\frac{|v(x)|}{b}\, dx \leq \frac{1}{h_{-}}\int_{\Omega}\left|\frac{u(x)}{a}\right|^{h(x)} dx + \frac{1}{h'_{-}}\int_{\Omega}\left|\frac{v(x)}{b}\right|^{h'(x)} dx = \frac{1}{h_{-}} + \frac{1}{h'_{-}}.$$

Portanto

$$|uv|_{1} \leq \left(\frac{1}{h_{-}} + \frac{1}{h'_{-}}\right)|u|_{h(x)}|v|_{h'(x)}.$$

■

Proposição 1.1.7 (Fórmula de Interpolação). *Sejam* $h, m, s \in L_{+}^{\infty}(\Omega)$, *sendo* $h \ll m \ll s$, *e* (u_n) *uma sequência em* $L^{h(x)}(\Omega) \cap L^{s(x)}(\Omega)$ *tal que*

$$|u_n|_{h(x)}, |u_n|_{s(x)} \leq \eta, \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $\eta > 0$. *Então,* (u_n) *é uma sequência em* $L^{m(x)}(\Omega)$ *e existem* $C > 0$ *e* $\alpha \in L^{\infty}(\Omega)$ *satisfazendo*

$$0 \ll \alpha \ll 1, \ \frac{1}{m(x)} = \frac{1-\alpha(x)}{s(x)} + \frac{\alpha(x)}{h(x)} \ \textit{q.t.p. em } \Omega,$$

tais que

$$|u_n|_{m(x)} \leq C|u_n|_{s(x)}^{1-\alpha_{+}}|u_n|_{h(x)}^{\alpha_{-}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Seja $v_n = \frac{u_n}{\eta}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $|v_n|_{h(x)}, |v_n|_{s(x)} \leq 1$, obtemos

$$\int_\Omega \left| \frac{v_n}{|v_n|_{s(x)}^{1-\alpha_+} |v_n|_{h(x)}^{\alpha_-}} \right|^{m(x)} dx \leq \int_\Omega \left| \frac{v_n}{|v_n|_{s(x)}} \right|^{m(x)(1-\alpha(x))} \left| \frac{v_n}{|v_n|_{h(x)}} \right|^{m(x)\alpha(x)} dx,$$

onde q.t.p em Ω vale $1/m(x) = \big(1-\alpha(x)\big)/s(x) + \alpha(x)/h(x)$. Da desigualdade de Hölder (Proposição 1.1.6) e Proposição 1.1.4 deduzimos

$$\int_\Omega \left| \frac{v_n}{|v_n|_{s(x)}^{1-\alpha_+} |v_n|_{h(x)}^{\alpha_-}} \right|^{m(x)} dx \leq 2,$$

implicando que

$$\int_\Omega \left| \frac{v_n}{2|v_n|_{s(x)}^{1-\alpha_+} |v_n|_{h(x)}^{\alpha_-}} \right|^{m(x)} dx \leq 1.$$

Desta maneira

$$|u_n|_{m(x)} \leq C |u_n|_{s(x)}^{1-\alpha_+} |u_n|_{h(x)}^{\alpha_-}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

sendo $C = 2\eta^{\alpha_+ - \alpha_-}$. ■

A despeito de todas as boas propriedades apontadas acima, em uma primeira vista, a norma de Luxemburg possui uma expressão inadequada para aplicação dos Métodos Variacionais. Idealmente, gostaríamos que tal norma fosse parte integrante dos funcionais energia correspondentes aos problemas considerados como ocorre no caso de expoentes constantes. Neste sentido, a próxima proposição é extremamente útil.

Proposição 1.1.8. *Seja* $u \in L^{h(x)}\big(\Omega\big) \setminus \{0\}$. *Então*

(i) $|u|_{h(x)} \leq 1 \Longrightarrow |u|_{h(x)}^{h_+} \leq \rho_{h(x)}(u) \leq |u|_{h(x)}^{h_-}$;

(ii) $|u|_{h(x)} \geq 1 \Longrightarrow |u|_{h(x)}^{h_-} \leq \rho_{h(x)}(u) \leq |u|_{h(x)}^{h_+}$.

Demonstração. Escrevemos $|u|_{h(x)} = a$. Se $a \leq 1$, então

$$a^{h_+} \rho_{h(x)}\big(a^{-1}u\big) \leq \rho_{h(x)}(u) \leq a^{h_-} \rho_{h(x)}\big(a^{-1}u\big).$$

Pela Proposição 1.1.4 obtemos (i). O raciocínio para (ii) é análogo. ■

Corolário 1.1.9. *Para quaisquer* $u \in L^{h(x)}\big(\Omega\big)$ *e* $S \subset L^{h(x)}\big(\Omega\big)$, *são válidos:*

(i) $\min\left\{|u|_{h(x)}^{h_-}, |u|_{h(x)}^{h_+}\right\} \leq \rho_{h(x)}(u) \leq \max\left\{|u|_{h(x)}^{h_-}, |u|_{h(x)}^{h_+}\right\}$;

(ii) $\min\left\{\rho_{h(x)}(u)^{\frac{1}{h_-}}, \rho_{h(x)}(u)^{\frac{1}{h_+}}\right\} \leq |u|_{h(x)} \leq \max\left\{\rho_{h(x)}(u)^{\frac{1}{h_-}}, \rho_{h(x)}(u)^{\frac{1}{h_+}}\right\}$;

(iii) $|u|_{h(x)} < 1(=1, > 1)$ *se, e somente se,* $\rho_{h(x)}(u) < 1(=1, > 1)$;

(iv) S *é limitado em* $L^{h(x)}(\Omega)$ *se, e somente se,* $\rho_{h(x)}(S)$ *é limitado em* $\mathbb{R}$.

Devido à sua importância, decidimos destacar o seguinte resultado.

Corolário 1.1.10. *Seja* (u_n) *uma sequência em* $L^{h(x)}(\Omega)$. *Então, dado* $u \in L^{h(x)}(\Omega)$,

$$|u_n - u|_{h(x)} \to 0 \text{ se, e somente se, } \rho_{h(x)}(u_n - u) \to 0.$$

Relativamente ao espaço $L^{h(x)}(\Omega)$, a inclusão entre espaços de Lebesgue generaliza-se naturalmente.

Proposição 1.1.11. *Sejam* $h, m \in L^\infty_+(\Omega)$. *Se* $|\Omega| < \infty$ *e* $h(x) \leq m(x)$ *q.t.p em* Ω, *então*

$$L^{m(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{h(x)}(\Omega).$$

Demonstração. Seja $u \in L^{m(x)}(\Omega)$. Como $h(x) \leq m(x)$ q.t.p em Ω, é válida a relação

$$|u|^{h(x)} \leq 1 + |u|^{m(x)} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto, $u \in L^{h(x)}(\Omega)$ e temos

$$\rho_{h(x)}(u) \leq |\Omega| + \rho_{m(x)}(u),$$

o que mostra a limitação da inclusão. ■

Podemos definir *espaços de Lebesgue com expoente variável à valores vetoriais*. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto Lebesgue mensurável, dizemos que $u = (u_1, \ldots, u_L)\colon \Omega \to \mathbb{R}^L \in L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$ se, e somente se, $u_i \in L^{h(x)}(\Omega)$, para $i = 1, \ldots, L$. Sobre $L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$, consideramos a norma $|u|_{L^{h(x)}(\Omega,\mathbb{R}^L)} = \sum_{i=1}^{L} |u_i|_{h(x)}$.

Enunciamos abaixo generalizações dos Lemas de Brezis-Lieb aos espaços de Lebesgue com expoente variável. As demonstrações seguem os mesmos argumentos utilizados em [58]. Nestes lemas, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denota um aberto.

Proposição 1.1.12 (Lema de Brezis-Lieb, primeira versão). *Seja* (u_n) *uma sequência limitada em* $L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$ *tal que* $u_n(x) \to u(x)$ *q.t.p em* Ω. *Então,* $u \in L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$ *e*

$$\int_\Omega \left| |u_n|^{h(x)} - |u_n - u|^{h(x)} - |u|^{h(x)} \right| dx = o_n(1).$$

Demonstração. Em primeiro lugar, segue-se diretamente do Lema de Fatou que

$$u \in L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L).$$

Em segundo lugar, dado $\epsilon > 0$, verificamos que existe uma constante $C_\epsilon > 0$ dependente somente de ϵ tal que

$$\left| |y + k|^{h(x)} - |y|^{h(x)} \right| \le \epsilon |y|^{h(x)} + C_\epsilon |k|^{h(x)} \text{ q.t.p. em } \Omega, \forall y, k \in \mathbb{R}^L. \tag{1.1}$$

De fato, considerando a função

$$\varphi(x, y, k, t) = |y + tk|^{h(x)}, \ x \in \Omega, y, k \in \mathbb{R}^L, t \in [0, 1],$$

se $x \in h^{-1}\big((1, \infty)\big)$ aplicamos o Teorema do valor médio a $\varphi(x, y, k, \cdot)$, obtendo

$$\left| |y + k|^{h(x)} - |y|^{h(x)} \right| \le h(x) |y + t_0 k|^{h(x)-1} |k|,$$

para algum $t_0 = t_0(x, y, k) \in (0, 1)$. Logo,

$$\left| |y + k|^{h(x)} - |y|^{h(x)} \right| \le h_+ 2^{h_+ - 1} \left(|y|^{h(x)-1} |k| + |k|^{h(x)} \right).$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, o qual sem perda da generalidade é suposto suficientemente pequeno, da desigualdade acima combinada com a desigualdade de Young, concluímos que

$$\left| |y + k|^{h(x)} - |y|^{h(x)} \right| \le \epsilon |y|^{h(x)} + C_\epsilon |k|^{h(x)},$$

para todo $x \in h^{-1}\big([1, \infty)\big)$, $y, k \in \mathbb{R}^L$, onde $C_\epsilon = h_+ 2^{h_+ - 1} \left(\frac{h_+ - 1}{h_-} \left(\frac{h_+ 2^{h_+ - 1}}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{h_- - 1}} + 1 \right)$.

Definimos agora, para $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$f_{\epsilon,n}(x) = \max \left\{ \left| |u_n|^{h(x)} - |u_n - u|^{h(x)} - |u|^{h(x)} \right| - \epsilon |u_n - u|^{h(x)}, 0 \right\}, \ x \in \Omega.$$

Temos

$$f_{\epsilon,n}(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ quando } n \to \infty, \text{ e, por } (1.1),$$

$$0 \le f_{\epsilon,n}(x) \le \big(C_\epsilon + 1\big) |u|^{h(x)} \text{ q.t.p. em } \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desta maneira, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega f_{\epsilon,n}(x)\, dx \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Como

$$\left| |u_n|^{h(x)} - |u_n - u|^{h(x)} - |u|^{h(x)} \right| \leq f_{\epsilon,n}(x) + \epsilon |u_n - u|^{h(x)}, \; x \in \Omega,$$

após passagem ao limite superior, o último limite acima assegura que

$$\limsup_n \int_\Omega \left| |u_n|^{h(x)} - |u_n - u|^{h(x)} - |u|^{h(x)} \right| dx \leq \epsilon C, \; \forall \epsilon > 0,$$

implicando que

$$\lim_n \int_\Omega \left| |u_n|^{h(x)} - |u_n - u|^{h(x)} - |u|^{h(x)} \right| dx = 0.$$

■

Corolário 1.1.13. *Seja* (u_n) *uma sequência em* $L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$ *tal que* $\rho_{h(x)}(u_n) \to \rho_{h(x)}(u)$ *e* $u_n(x) \to u(x)$ *q.t.p. em* Ω*. Então*

$$u_n \to u \text{ em } L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L).$$

Proposição 1.1.14 (Lema de Brezis-Lieb, segunda versão)**.** *Seja* (u_n) *uma sequência limitada em* $L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$*, sendo* $h_- > 1$*. Suponha que* $u_n(x) \to u(x)$ *q.t.p em* Ω*. Então*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L).$$

Demonstração. Suponha que

$$u_n \not\rightharpoonup u \text{ em } L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L).$$

Então, existem $f \in \left(L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)\right)^\star$, uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e $\epsilon > 0$ tais que

$$\left| f(u_{n_k}) - f(u) \right| \geq \epsilon, \; \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Por outro lado, como (u_{n_k}) é uma sequência limitada em $L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$ e $h_- > 1$, pela reflexividade de $L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$, existem uma subsequência de (u_{n_k}), também denotada por (u_{n_k}), e $\nu \in L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$ tais que

$$u_{n_k} \rightharpoonup \nu \text{ em } L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L),$$

implicando que

$$f(u_{n_k}) \to f(\nu).$$

Mostraremos que $\nu = u$, obtendo uma contradição com (1.2). Com efeito, para cada $m \in \mathbb{N}$ seja

$$A_m = \{x \in \Omega\,;\ |u_{n_k}(x) - u(x)| \leq 1,\ \forall k \geq m\}.$$

Fixamos $m \in \mathbb{N}$ e consideramos $\varphi \in L^{h'(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$ tal que

$$\{x \in \Omega\,;\ \varphi(x) \neq 0\} \subset A_m \ \text{ e } \ \left|\{x \in \Omega\,;\ \varphi(x) \neq 0\}\right| < \infty. \tag{1.3}$$

Em primeiro lugar, observamos que da convergência fraca de (u_{n_k}) para ν em $L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$, temos

$$\int_\Omega u_{n_k}\varphi\, dx \to \int_\Omega \nu\varphi\, dx.$$

Em segundo lugar, observando que

$$(u_{n_k}\varphi)(x) \to (u\varphi)(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ quando } k \to \infty,$$

$$\left|(u_{n_k}\varphi)(x) - (u\varphi)(x)\right| \leq \left|(u_{n_k} - u)(x)\right|\left|\varphi(x)\right| \leq \left|\varphi(x)\right|, \forall x \in A_m, \forall k \geq m,$$

e

$$\left|(u_{n_k}\varphi)(x) - (u\varphi)(x)\right| \leq \left|\varphi(x)\right|, \forall x \notin A_m, \forall k \in \mathbb{N},$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_\Omega u_{n_k}\varphi\, dx \to \int_\Omega u\varphi\, dx.$$

Por unicidade, segue-se que

$$\int_\Omega \nu\varphi\, dx = \int_\Omega u\varphi\, dx,$$

para quaisquer $\varphi \in L^{h'(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$ tais que sejam válidas as propriedades em (1.3). Porém, dada qualquer $\varphi \in L^{h'(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$, definindo

$$\varphi_n = \chi_{A_n \cap B_n}\varphi,\ n \in \mathbb{N},$$

onde $B_n = \{x \in \Omega\,;\ |x| \leq n\}$, então $\varphi_n \in L^{h'(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$,

$$\{x \in \Omega\,;\ \varphi_n(x) \neq 0\} \subset A_n \ \text{ e } \ \left|\{x \in \Omega\,;\ \varphi_n(x) \neq 0\}\right| < \infty.$$

Além disso, para q.t.p. Ω, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n \cap B_n$, $\forall n \geq m$. Portanto

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Como

$$\left|\varphi_n(x) - \varphi(x)\right|^{h'(x)} \leq 2^{h'_+}\left|\varphi(x)\right|^{h'(x)}, \forall x \in \Omega,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\varphi_n \to \varphi \text{ in } L^{h'(x)}\big(\Omega, \mathbb{R}^L\big).$$

Assim,

$$\int_\Omega u\varphi_n \, dx \to \int_\Omega u\varphi \, dx,$$
$$\int_\Omega v\varphi_n \, dx \to \int_\Omega v\varphi \, dx.$$

e

$$\int_\Omega v\varphi_n \, dx = \int_\Omega u\varphi_n \, dx, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da unicidade do limite, segue-se que

$$\int_\Omega v\varphi \, dx = \int_\Omega u\varphi \, dx.$$

Pelo Lema de du Boys-Reymond, obtemos $v = u$. ∎

1.1.2 Espaços de Sobolev com expoente variável

Nesta subseção, em favor da objetividade, consideramos somente os espaços de Sobolev $W^{1,h(x)}\big(\Omega\big)$. A definição e propriedades dos espaços $W^{k,h(x)}\big(\Omega\big)$ com $k > 1$ podem ser encontradas nas referências citadas no início deste capítulo.

Definição 1.1.15. *Para cada* $h \in L^\infty_+\big(\Omega\big)$, *definimos o* espaço de Sobolev com expoente variável $W^{1,h(x)}\big(\Omega\big)$ *como*

$$W^{1,h(x)}\big(\Omega\big) = \Big\{u \in L^{h(x)}\big(\Omega\big)\,;\, |\nabla u| \in L^{h(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)\Big\},$$

munido da norma

$$|u|_{W^{1,h(x)}(\Omega)} = |u| = |\nabla u|_{h(x)} + |u|_{h(x)}.$$

Igualmente a $L^{h(x)}(\Omega)$, o espaço de Banach $W^{1,h(x)}(\Omega)$ é separável e, caso $h_- > 1$, também é um espaço reflexivo. Se $|\Omega| < \infty$ e $h(x) \le m(x)$ q.t.p em Ω, então

$$W^{1,m(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,h(x)}(\Omega).$$

Questões relativas à densidade exigem entretanto condições mais fortes sobre o expoente h. Por exemplo, se Ω é um aberto limitado com fronteira lipschitziana, a *condição log-Hölder*

$$\log|x-y|^{-1}|h(x)-h(y)| \le C,\ \forall x,y \in \overline{\Omega},\ 0 < |x-y| < 1, \tag{1.4}$$

onde $C > 0$ é uma constante, é suficiente para assegurar que funções suaves são densas.

Deve ser observado que fixada $M \in L^\infty(\Omega)$ com $M_- > 0$, a expressão

$$\|u\|_{W^{1,h(x)}(\Omega)} = \|u\| = \inf\left\{\lambda > 0\,;\ \int_\Omega \left(\left|\nabla\left(\frac{u}{\lambda}\right)\right|^{h(x)} + M(x)\left|\frac{u}{\lambda}\right|^{h(x)}\right) dx \le 1\right\} \tag{1.5}$$

define uma outra norma sobre $W^{1,h(x)}(\Omega)$ que verifica

$$\frac{1}{2\max\{1, M_+\}}\|u\| \le |u| \le \frac{2}{\min\{1, M_-\}}\|u\|,\ \forall u \in W^{1,h(x)}(\Omega). \tag{1.6}$$

Desta forma, $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ são normas equivalentes sobre tal espaço.

Com o objetivo de simplificar demonstrações, nos capítulos seguintes sempre consideramos sobre $W^{1,h(x)}(\Omega)$ normas do tipo (1.5).

Na proposição seguinte, para $u \in W^{1,h(x)}(\Omega)$ escrevemos

$$\rho(u) = \int_\Omega \left(\left|\nabla u\right|^{h(x)} + M(x)|u|^{h(x)}\right) dx.$$

Proposição 1.1.16. *Seja* $u \in W^{1,h(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$. *Então*

(i) $\rho\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = 1$ *e, se* $\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1$, *então* $a = \|u\|$;

(ii) $\|u\| \le 1 \Longrightarrow \|u\|^{h_+} \le \rho(u) \le \|u\|^{h_-}$;

(iii) $\|u\| \ge 1 \Longrightarrow \|u\|^{h_-} \le \rho(u) \le \|u\|^{h_+}$.

Corolário 1.1.17. *Para quaisquer* $u \in W^{1,h(x)}(\Omega)$ *e* $S \subset W^{1,h(x)}(\Omega)$, *são válidos:*

(i) $\min\left\{\|u\|^{h_-}, \|u\|^{h_+}\right\} \le \rho(u) \le \max\left\{\|u\|^{h_-}, \|u\|^{h_+}\right\}$;

(ii) $\min\left\{\rho(u)^{\frac{1}{h_-}}, \rho(u)^{\frac{1}{h_+}}\right\} \le \|u\| \le \max\left\{\rho(u)^{\frac{1}{h_-}}, \rho(u)^{\frac{1}{h_+}}\right\}$;

(iii) $\|u\| < 1(= 1, > 1)$ *se, e somente se,* $\rho(u) < 1(= 1, > 1)$*;*

(iv) S *é limitado em* $W^{1,h(x)}(\Omega)$ *se, e somente se,* $\rho(S)$ *é limitado em* $\mathbb{R}$*;*

Corolário 1.1.18. *Seja* (u_n) *uma sequência* $W^{1,h(x)}(\Omega)$*. Então, dado* $u \in W^{1,h(x)}(\Omega)$*,*

$$\|u_n - u\| \to 0 \text{ se, e somente se, } \rho(u_n - u) \to 0.$$

O próximo resultado desempenhará um papel importante Capítulo 3. Deste modo, também merece destaque.

Corolário 1.1.19. *Seja* $m \in L^\infty(\Omega)$ *com* $m_- > 0$*. Então, dado* $u \in W^{1,h(x)}(\Omega)$*, tem-se*

$$\max\{\|u\|^{m_-}, \|u\|^{m_+}\} \leq \max\left\{\rho(u)^{\frac{m_-}{h_+}}, \rho(u)^{\frac{m_+}{h_-}}\right\}.$$

Como no contexto de expoentes constantes, também para expoentes variáveis temos a seguinte proposição.

Proposição 1.1.20. *Seja* $u \in W^{1,h(x)}(\Omega)$*. Então, a parte positiva* u^+*, a parte negativa* u^- *e o módulo* $|u|$ *de* u *estão em* $W^{1,h(x)}(\Omega)$*. Além disso,*

$$\nabla u^+(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } u(x) \leq 0 \\ \nabla u(x), & \text{se } u(x) > 0 \end{cases} \quad e \quad \nabla u^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } u(x) \geq 0 \\ \nabla u(x), & \text{se } u(x) < 0 \end{cases}$$

Demonstração. É suficiente mostrar que $u^+ \in W^{1,h(x)}(\Omega)$, pois $u^- = -(-u)^+$ e $|u| = u^+ - u^-$. De fato, da relação

$$\left|u^+\right|^{h(x)} \leq |u|^{h(x)} \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

claramente $u^+ \in L^{h(x)}(\Omega)$. Por outro lado, como

$$u \in W^{1,h_-}\big(\Omega \cap B_n(0)\big), \forall n \in \mathbb{N},$$

por [54, Lema 7.6], concluímos que

$$\nabla u^+(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } u(x) \leq 0 \\ \nabla u(x), & \text{se } u(x) > 0 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\left|\nabla u^+\right|^{h(x)} \leq |\nabla u|^{h(x)} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Deste modo, temos $u^+ \in L^{h(x)}(\Omega)$ e $\nabla u^+ \in L^{h(x)}(\Omega)$, ou seja,

$$u^+ \in W^{1,h(x)}(\Omega).$$

■

Um importante conceito a permear esta Tese é dado na próxima definição.

Definição 1.1.21. *Dada* $h \in L^\infty_+(\Omega)$, *definimos o* expoente crítico (pontual) de Sobolev h^* *correspondente a* h *como*

$$h^*(x) = \begin{cases} \frac{Nh(x)}{N-h(x)}, & \text{se } h(x) < N, \\ \infty, & \text{se } h(x) \geq N \end{cases}.$$

Para finalizar esta seção, listamos abaixo alguns resultados relativos ao espaço $W^{1,h(x)}(\Omega)$. Começamos com um Teorema de imersão do tipo Sobolev.

Teorema 1.1.22 ([46, Teoremas 1.1, 1.3])**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto com a propriedade do cone,* $h\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *tal que* $1 < h_- \leq h_+ < N$ *e* $m \in L^\infty_+(\Omega)$.

(i) *Se* h *é lipschitziana e* $h(x) \leq m(x) \leq h^*(x)$ *q.t.p em* Ω, *então*

$$W^{1,h(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{m(x)}(\Omega);$$

(ii) *Se* Ω *é limitado,* h *é contínua e* $m \ll h^*$, *então a imersão*

$$W^{1,h(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{m(x)}(\Omega)$$

é compacta.

Observação 1.1.23. *Enfatizamos a importância da condição*

$$\inf_{\Omega} \operatorname{ess} \big(h^*(x) - m(x)\big) > 0$$

no item (ii) *do teorema acima. Caso ela seja violada, a imersão* $W^{1,h(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{m(x)}(\Omega)$ *pode ser compacta ou não. Por exemplo, sabemos que no contexto de expoentes constantes quando* $m = h^*$, *tal imersão nunca é compacta. Por outro lado, em [65, Corolário 3.5] está demonstrado que se* h *satisfaz a condição log-Hölder (veja* (1.4)*),*

$$\inf_{\Omega \setminus B_r(x_0)} \operatorname{ess} \big(h^*(x) - m(x)\big) > 0,$$

para uma bola "pequena" $B_r(x_0) \subset \Omega$ *e temos um certo controle em como* $m(x)$ *se aproxima de* $h^*(x)$ *em* $B_r(x_0)$, *então a imersão* $W_0^{1,h(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{m(x)}(\Omega)$ *é compacta (a definição de* $W_0^{1,h(x)}(\Omega)$ *é dada abaixo).*

Apresentamos abaixo um Lema do tipo Lions.

Lema 1.1.24 ([47, Lema 3.1]). *Seja* $h\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *uniformemente contínua tal que* $1 < h_- \leq h_+ < N$. *Se* (u_n) *é limitada em* $W^{1,h(x)}(\mathbb{R}^N)$ *e*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^{m(x)}\, dx \to 0,\ n \to \infty,$$

para algum $r > 0$ *e* $m \in L^\infty_+(\mathbb{R}^N)$ *com* $h \leq m \ll h^*$, *então*

$$u_n \to 0 \text{ em } L^{s(x)}(\mathbb{R}^N),\ n \to \infty,$$

onde $s \in L^\infty_+(\mathbb{R}^N)$ *e* $h \ll s \ll h^*$.

Defina

$$W^{1,h(x)}_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in W^{1,h(x)}(\mathbb{R}^N)\,;\, u \text{ é radialmente simétrica}\right\}.$$

Podemos enunciar agora um Teorema de imersão compacta do tipo Strauss-Lions.

Teorema 1.1.25 ([47, Teorema 3.1]). *Sejam* $m \in L^\infty_+(\mathbb{R}^N)$ *e* $h\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *uniformemente contínua, radialmente simétrica e tal que* $1 < h_- \leq h_+ < N$. *Suponha que* $h \ll m \ll h^*$. *Então, a imersão*

$$W^{1,h(x)}_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{m(x)}(\mathbb{R}^N)$$

é compacta.

Defina

$$W^{1,h(x)}_0(\Omega) = \text{ fecho de } C^\infty_0(\Omega) \text{ em } W^{1,h(x)}(\Omega).$$

Temos também uma desigualdade do tipo Poincaré.

Proposição 1.1.26 ([39, Teorema 8.2.18]). *Se* Ω *é limitado e* $h \in L^\infty_+(\Omega)$ *é uniformemente contínua, então existe* $C > 0$ *tal que*

$$|u|_{h(x)} \leq C|\nabla u|_{h(x)},\ \forall u \in W^{1,h(x)}_0(\Omega).$$

Corolário 1.1.27. *Se* Ω *é limitado e* $h \in L^\infty_+(\Omega)$ *é uniformemente contínua, a função* $u \mapsto |\nabla u|_{h(x)}$ *define uma norma sobre* $W^{1,h(x)}_0(\Omega)$ *equivalente à norma* $|\cdot|$.

1.2 Um teorema do tipo Brezis-Lieb

A próxima proposição desempenha um papel importante neste trabalho. Para o caso no qual h é constante, o resultado é devido a Alves [5] se $h \geq 2$, e Mercuri & Willem [64] se $1 < h < 2$. A demonstração apresentada abaixo é uma adaptação da demonstração no caso de expoentes constantes ao contexto dos expoentes variáveis.

Proposição 1.2.1 (Lema de Brezis-Lieb, terceira versão, [14]). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e (u_n) uma sequência limitada em $L^{h(x)}(\Omega, \mathbb{R}^L)$, sendo $h_- > 1$. Suponha que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω. Então*

$$\int_\Omega \left| |u_n|^{h(x)-2} u_n - |u_n - u|^{h(x)-2} (u_n - u) - |u|^{h(x)-2} u \right|^{h'(x)} dx = o_n(1), \tag{1.7}$$

Demonstração. Definimos

$$A(x, y) = |y|^{h(x)-2} y, \; x \in \Omega, y \in \mathbb{R}^L.$$

Demonstraremos que

$$\int_{\{x \in \Omega;\, 1 < h(x) < 2\}} \left| A\big(x, u_n(x)\big) - A\big(x, u_n(x) - u(x)\big) - A\big(x, u(x)\big) \right|^{h'(x)} dx = o_n(1), \tag{1.8}$$

e

$$\int_{\{x \in \Omega;\, h(x) \geq 2\}} \left| A\big(x, u_n(x)\big) - A\big(x, u_n(x) - u(x)\big) - A\big(x, u(x)\big) \right|^{h'(x)} dx = o_n(1). \tag{1.9}$$

Evidentemente, as validades de (1.8) e (1.9) implicam a de (1.7). Começamos com (1.8). Neste caso, adaptamos as idéias em [64]. Se $h^{-1}\big((1, 2)\big)$ tem medida zero, não temos nada a fazer. Na situação contrária, veremos que é suficiente mostrar que

$$\alpha = \sup_{\substack{x \in h^{-1}((1,2)) \\ y, k \in \mathbb{R}^L \\ k \neq 0}} F(x, y, k) < \infty, \tag{1.10}$$

onde

$$F(x, y, k) = \left| \frac{|y + k|^{h(x)-2}(y + k) - |y|^{h(x)-2} y}{|k|^{h(x)-1}} \right|.$$

De fato, dado qualquer $t > 0$, é fácil verificar que

$$F(x, y, tk) = F\left(x, \frac{y}{t}, k\right).$$

Assim, podemos considerar

$$\alpha = \sup_{\substack{x \in h^{-1}((1,2)) \\ y,k \in \mathbb{R}^L \\ |k|=1}} F(x, y, k).$$

Dito isto, suponha agora que $|y| \leq 2$. Então, para quaisquer $x \in h^{-1}\big((1,2)\big)$, $k \in \mathbb{R}^L$ com $|k| = 1$, segue-se que

$$\big||y+k|^{h(x)-2}(y+k) - |y|^{h(x)-2}y\big| \leq 5.$$

Logo

$$\alpha_1 = \sup_{\substack{x \in h^{-1}((1,2)) \\ y,k \in \mathbb{R}^L \\ |y| \leq 2, |k|=1}} F(x, y, k) < \infty. \tag{1.11}$$

Por outro lado, se $|y| > 2$, para quaisquer $t \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{R}^L$ com $|k| = 1$, é verdadeiro que

$$|y + tk| \geq |y| - t|k| > 1.$$

Portanto, para cada $i = 1, \ldots, L$, $x \in h^{-1}\big((1,2)\big)$, temos

$$\begin{aligned}
\big||y+k|^{h(x)-2}(y_i+k_i) - |y|^{h(x)-2}y_i\big| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}|y+tk|^{h(x)-2}(y_i+tk_i)\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 \Big(|y+tk|^{h(x)-2}k_i + \big(h(x)-2\big)(y_i+tk_i)|y+tk|^{h(x)-4}(y+tk)\cdot k\Big)\,dt\right| \\
&\leq \big(3-h(x)\big)\int_0^1 |y+tk|^{h(x)-2}\,dt < 2\int_0^1 1\,dt = 2.
\end{aligned}$$

Desta forma

$$\alpha_2 = \sup_{\substack{x \in h^{-1}((1,2)) \\ y,k \in \mathbb{R}^L \\ |y| > 2, |k|=1}} F(x, y, k) < \infty. \tag{1.12}$$

Combinando (1.11) e (1.12) obtemos (1.10). Agora, observe que

$$\begin{aligned}
&\big|A\big(x, u_n(x)\big) - A\big(x, u_n(x) - u(x)\big) - A\big(x, u(x)\big)\big| \\
&\qquad \leq F\big(x, u_n(x) - u(x), u(x)\big)|u(x)|^{h(x)-1} + |u(x)|^{h(x)-1} \leq (\alpha+1)|u(x)|^{h(x)-1},
\end{aligned}$$

para todo $x \in h^{-1}\big((1,2)\big)$ com $u(x) \neq 0$. Consequentemente

$$\big|A\big(x, u_n(x)\big) - A\big(x, u_n(x) - u(x)\big) - A\big(x, u(x)\big)\big|^{h'(x)} \leq (\alpha+1)^{h'_+}|u(x)|^{h(x)},$$

para todo $x \in h^{-1}\big((1,2)\big)$, e (1.8) é obtido a partir do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Para a relação (1.9), adaptamos as idéias em [5]. Nada a fazer se $h^{-1}\big([2,\infty)\big)$ tem medida zero. No caso contrário, pelos cálculos realizados anteriormente, para cada $i = 1, \dots, L$, $x \in h^{-1}\big([2,\infty)\big)$, temos

$$\begin{aligned}\big|A_i\big(x,u_n(x)\big)-A_i\big(x,u_n(x)-u(x)\big)\big| &\leq \big(h(x)-1\big)|u(x)|\int_0^1 |u_n(x)+(t-1)u(x)|^{h(x)-2}\,dt \\ &\leq \big(h^+-1\big)|u(x)|\,\big(|u_n(x)|+|u(x)|\big)^{h(x)-2}.\end{aligned}$$

Desta maneira

$$\big|A\big(x,u_n(x)\big)-A\big(x,u_n(x)-u(x)\big)\big| \leq C\left(|u(x)|^{h(x)-1}+|u(x)||u_n(x)|^{h(x)-2}\right),$$

para todo $x \in h^{-1}\big([2,\infty)\big)$. Se $h(x) > 2$, dado $\epsilon > 0$, a partir da desigualdade de Young podemos mostrar que existe $C_\epsilon > 0$, dependente somente de ϵ, tal que

$$\big|A\big(x,u_n(x)\big)-A\big(x,u_n(x)-u(x)\big)\big| \leq C_\epsilon|u(x)|^{h(x)-1}+\epsilon|u_n(x)|^{h(x)-1}.$$

Consideramos então para cada $\epsilon > 0$, a sequência de funções

$$f_{\epsilon,n}(x)=\max\left\{\big|A\big(x,u_n(x)\big)-A\big(x,u_n(x)-u(x)\big)-A\big(x,u(x)\big)\big|-\epsilon|u_n(x)|^{h(x)-1},0\right\},$$

onde $x \in \Omega$. Tal sequência satisfaz

$$\begin{gathered} f_{\epsilon,n}(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } h^{-1}\big([2,\infty)\big) \text{ e} \\ 0 \leq f_{\epsilon,n}(x) \leq \big(C_\epsilon+1\big)|u(x)|^{h(x)-1},\ \forall x \in h^{-1}\big([2,\infty)\big), n \in \mathbb{N}. \end{gathered}$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{h^{-1}\left([2,\infty)\right)} f_{\epsilon,n}^{h'(x)}\,dx \to 0.$$

Agora, pela definição de $f_{\epsilon,n}$ obtemos

$$\big|A\big(x,u_n(x)\big)-A\big(x,u_n(x)-u(x)\big)-A\big(x,u(x)\big)\big| \leq \epsilon|u_n(x)|^{h(x)-1}+f_{\epsilon,n}(x),$$

para $x \in \Omega$. Por conseguinte,

$$\big|A\big(x,u_n(x)\big)-A\big(x,u_n(x)-u(x)\big)-A\big(x,u(x)\big)\big|^{h'(x)} \leq 2^{h'_+}\left(\epsilon^{h'_-}|u_n(x)|^{h(x)}+f_{\epsilon,n}^{h'(x)}\right),$$

para $x \in \Omega$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Assim

$$\limsup_{n} \int_{h^{-1}\left([2,\infty)\right)} \left|A\big(x, u_n(x)\big) - A\big(x, u_n(x) - u(x)\big) - A\big(x, u(x)\big)\right|^{h'(x)} dx \leq C\epsilon^{h'_-},$$

para todo $\epsilon > 0$ pequeno, o que implica (1.9). ∎

1.3 O Teorema do Passo da Montanha

Devido a Ambrosetti & Rabinowitz [21], o Teorema do Passo da Montanha é um marco na história da Teoria dos Pontos Críticos e cujo desenvolvimento esteve fortemente relacionado a busca de pontos críticos do tipo sela. Nesta seção, X denota um espaço de Banach real, $I\colon X \to \mathbb{R}$ um funcional $\mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ e (u_n) uma sequência em X.

Definição 1.3.1. *Dizemos que* (u_n) *é uma* sequência $(PS)_c$ para I *ou uma* sequência (PS) no nível c para I *se*

$$I(u_n) \to c \ \ e \ \ I'(u_n) \to 0.$$

Enunciamos agora uma condição de compacidade sobre o funcional I devida a Palais & Smale [68].

Definição 1.3.2 (Condição (PS))**.** *Dizemos que* I *é um* funcional (PS) *ou* satisfaz a condição (PS) *se toda sequência* $(PS)_c$ *para* I *(qualquer* $c \in \mathbb{R}$*) possui uma subsequência convergente.*

Observação 1.3.3. *Uma condição de compacidade mais fraca sobre* I *é a seguinte: fixado* $c \in \mathbb{R}$*, dizemos que* I *é um* funcional (PS) no nível c *ou* satisfaz a condição $(PS)_c$ *se sequências* $(PS)_c$ *para* I *possuem subsequências convergentes.*

A proposição abaixo é evidente.

Proposição 1.3.4. *Suponha que* I *satisfaz a condição* (PS)*. Se existe uma sequência* $(PS)_c$ *para* I*, então* c *é um valor crítico de* I*.*

Definimos agora uma importante condição geométrica.

Definição 1.3.5 (Geometria do passo da montanha)**.** *Dizemos que* I satisfaz a geometria do passo da montanha *se existem* $u_0, u_1 \in X$ *e* $r > 0$ *com* $\|u_1 - u_0\|_X > r$ *tais que*

$$\inf_{\|u-u_0\|_X = r} I(u) > \max\left\{I(u_0), I(u_1)\right\}.$$

Se I satisfaz a geometria do passo da montanha, então está bem definido o *nível do passo da montanha*, isto é,

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I\big(\gamma(t)\big),$$

onde

$$\Gamma = \big\{\gamma \in \mathcal{C}\big([0,1], X\big)\,;\, \gamma(0) = u_0 \text{ e } \gamma(1) = u_1\big\}\,.$$

Utilizando o Lema de Deformação em [82, página 38], podemos demonstrar o próximo resultado, denominado algumas vezes na literatura *o Teorema do Passo da Montanha sem condição* (PS).

Teorema 1.3.6. *Suponha que* I *satisfaz a geometria do passo da montanha. Então, existe uma sequência* (PS) *para* I *no nível do passo da montanha.*

O Teorema do Passo da Montanha pode ser agora formulado.

Teorema 1.3.7 (Passo da montanha, [21])**.** *Suponha que* I *satisfaz a geometria do passo da montanha e que* I *é um funcional* (PS) *(ou pelo menos,* I *é um funcional* (PS) *no nível do passo da montanha). Então, o nível do passo da montanha é um nível crítico para* I.

1.4 O Princípio Variacional de Ekeland

Nesta seção, $(M, d) = M$ denota um espaço métrico completo com função distância d e $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Proposição 1.4.1 (Princípio Variacional de Ekeland, forma forte, [41])**.** *Sejam* $\epsilon > 0$ *e* $I\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$, $I \not\equiv +\infty$, *semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Então, para cada* $\lambda > 0$ *e* $x \in M$ *verificando* $I(x) \leq \inf_M I + \epsilon$, *existe* $x_\lambda \in M$ *tal que*

$$I(x_\lambda) \leq I(x), \;\; d(x_\lambda, x) \leq \lambda$$

e

$$I(x_\lambda) - \frac{\epsilon}{\lambda} d(y, x_\lambda) < I(y), \; \forall y \in M; \; y \neq x_\lambda.$$

Uma consequência direta da forma forte do Princípio Variacional de Ekeland é a seguinte útil forma fraca.

Proposição 1.4.2 (Princípio Variacional de Ekeland, forma fraca)**.** *Seja* $I\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$, $I \not\equiv +\infty$*, semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Então, para cada* $\epsilon > 0$*, existe* $x_\epsilon \in M$ *tal que*

$$I(x_\epsilon) \leq \inf_M I + \epsilon$$

e

$$I(x_\epsilon) - \epsilon d(y, x_\epsilon) < I(y),\ \forall y \in M;\ y \neq x_\epsilon.$$

Em uma de suas aplicações, a forma fraca do Princípio Variacional de Ekeland nos possibilita considerar sequências minimizantes para um funcional I de classe $\mathcal{C}^1$ em um espaço de Banach, que também são sequências $(PS)_{\inf I}$.

Proposição 1.4.3. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $I\colon X \to \mathbb{R}$ *um funcional* $\mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$*. Suponha que* I *é semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Então, existe uma sequência* (x_n) *em* X *tal que*

$$I(x_n) \to \inf_X I \ \ e \ \ I'(x_n) \to 0.$$

Demonstração. Aplicamos a forma fraca do Princípio Variacional de Ekeland com $\epsilon = \frac{1}{n}$. É claro que $x_n = x_{\frac{1}{n}}$ satisfaz $I(x_n) \to \inf\limits_X I$. Ora, seja $z \in X$ satisfazendo $\|z\|_X = 1$. Se $y = x_n + hz$, para $h \neq 0$, então

$$I(x_n) - \frac{1}{n}\|hz\| < I(x_n + hz).$$

Portanto

$$\frac{I(x_n + hz) - I(x_n)}{h} > -\frac{1}{n},\ \forall h > 0.$$

Como $I \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$, deduzimos que

$$I'(x_n)z \geq -\frac{1}{n}.$$

Substituindo z por $-z$, também

$$I'(x_n)z \leq \frac{1}{n}.$$

Logo

$$I'(x_n) \to 0.$$

∎

1.5 O gênero de Krasnoselski

A noção de gênero é uma importante ferramenta para estudar existência de múltiplas soluções para certas Equações Diferenciais Parciais. Para definir o gênero, sejam X um espaço de Banach e

$$\Sigma = \big\{ S \subset X \setminus \{0\};\ S \text{ é fechado em } X \text{ e } S = -S \big\}.$$

Dizemos que $S \in \Sigma$ tem *gênero* n, o qual é denotado por $\gamma(S) = n$, se existe uma aplicação ímpar $\varphi \in \mathcal{C}\big(S, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\big)$ e n é o menor inteiro com esta propriedade. Se não existe um tal mínimo n, definimos $\gamma(S) = \infty$. Por convenção, $\gamma(\emptyset) = 0$.

Abaixo, listamos algumas propriedades envolvendo o gênero. Para uma demonstração de todos os itens, consulte a referência [72].

Proposição 1.5.1. *Sejam* $S, T \in \Sigma$. *Então*

(i) *Se* $\gamma(S) > 1$, *então* S *possui uma infinidade de pontos;*

(ii) *Se existe* $f \in \mathcal{C}(S, T)$ *ímpar, então* $\gamma(S) \leq \gamma(T)$. *Em particular,* $\gamma(S) \leq \gamma(T)$ *se* $S \subset T$*;*

(iii) $\gamma\big(S \cup T\big) \leq \gamma(S) + \gamma(T)$*;*

(iv) *Se* Y *é um subespaço de* X *de codimensão* k *e* $\gamma(S) > k$, *então* $S \cap Y \neq \emptyset$*;*

(v) *Se* $K \in \Sigma$ *é compacto, então* $\gamma(K) < \infty$ *e existe um* $\delta > 0$ *tal que* $\mathcal{N}_\delta(K) \in \Sigma$, *onde*

$$\mathcal{N}_\delta(K) = \bigcup_{x \in K} \overline{B_\delta(x)},$$

com $\gamma\big(\mathcal{N}_\delta(K)\big) = \gamma(K)$*;*

(vi) *Se* $\gamma(T) < \infty$, *então* $\gamma\left(\overline{S \setminus T}\right) \geq \gamma(S) - \gamma(T)$*;*

(vii) *Se* $\mathcal{N}$ *é uma vizinhança limitada de* 0 *em* $\mathbb{R}^k$ *e existe um homeomorfismo ímpar* $\varphi\colon S \to \partial\mathcal{N}$, *então* $\gamma(S) = k$. *Em particular,* $\gamma\big(\mathbb{S}^{k-1}\big) = k$.

O seguinte resultado é útil neste trabalho. Para uma demonstração, consulte a referência [51].

Teorema 1.5.2. *Seja* $\mathrm{I} \in \mathcal{C}^1\big(X, \mathbb{R}\big)$ *um funcional* $(PS)_d$ *com* $d < 0$*, par e limitado inferiormente. Suponha que* $\mathrm{I}(0) = 0$ *e que dado* $n \in \mathbb{N}$*, existe* $\epsilon = \epsilon(n) > 0$ *tal que* $\gamma\left(\mathrm{I}^{-\epsilon}\right) \geq n$*, onde* $\mathrm{I}^{-\epsilon} = \{x \in X;\, \mathrm{I}(x) \leq -\epsilon\}$*. Então, sendo*

$$\Sigma_n = \big\{S \in \Sigma\,;\, \gamma(S) \geq n\big\},$$

temos que

$$c_n = \inf_{S \in \Sigma_n} \sup_{x \in S} \mathrm{I}(x)$$

é um valor crítico negativo de I *e, além disso, se* $c = c_n = \cdots = c_{n+r}$*, então*

$$\gamma\left(K_c\right) \geq r + 1,$$

onde

$$K_c = \big\{x \in X\,;\, \mathrm{I}(x) = c \ \text{ e } \ \mathrm{I}'(x) = 0\big\}.$$

Capítulo 2

Perturbações não-periódicas de uma equação do tipo $p(x)$-laplaciano com crescimento crítico em $\mathbb{R}^N$.

Conteúdo

2.1 Introdução **41**

2.2 O problema periódico **43**

2.2.1 Resultados preliminares 45

2.2.2 Demonstração do Teorema 2.2.1 58

2.3 Demonstração do Teorema 2.1.2 . . . . **66**

2.1 Introdução

Neste capítulo consideramos a existência de solução para a seguinte classe de problemas:

$$(P)\quad \begin{cases} -\Delta_{p(x)+\sigma(x)}u + \big(V(x) - W(x)\big)|u|^{p(x)+\sigma(x)-2}u = f(x,u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p(x)+\sigma(x)}\big(\mathbb{R}^N\big) \setminus \{0\},\ u \geq 0, \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $f\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida como

$$f(x,t) = \mu|t|^{q(x)-\tau(x)-2}t + |t|^{p^*(x)-2}t,$$

$\mu > 0$ é um parâmetro, $p, \sigma\colon \mathbb{R}^N \to [0,+\infty)$ são funções lipschitzianas e $V, W, q, \tau\colon \mathbb{R}^N \to [0,+\infty)$ são funções contínuas. Além disso, assumimos o seguinte conjunto de hipóteses:

(H_1) As funções p, q e V são $\mathbb{Z}^N$-periódicas, isto é,

$$p(x+y) = p(x),\ q(x+y) = q(x),\ V(x+y) = V(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^N, y \in \mathbb{Z}^N;$$

(H_2) $1 < p_- \leq p_+ < N$;

(H_3) $p_+ < q_-,\ q \ll p^*$;

(H_4) Existem $R > 0$ e $z \in \mathbb{R}^N$ com $B_R(z) \subset (0,1)^N$ tais que

$$\sigma(x), \tau(x) = 0,\ \forall x \in \overline{B_R(z)}^c;$$

(H_5) Existem $m \in (1,N)$ e $R_1 > R$ com $B_{R_1}(z) \subset (0,1)^N$ tais que

$$p(x) = m,\ \forall x \in B_{R_1}(z);$$

(H_6) $(p+\sigma)_+ < N,\ (p+\sigma)_+ < (q-\tau)_-$;

(H_7) $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) = V_0 > 0$;

(H_8) $W(x) \to 0$, quando $|x| \to +\infty$;

(H_9) $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N} \big(V(x) - W(x)\big) = U_0 > 0.$

Uma outra classe de problemas (limite) que naturalmente consideramos é:

$$(P_\infty) \begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + V(x)|u|^{p(x)-2}u = \mu|u|^{q(x)-2}u + |u|^{p^*(x)-2}u, \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big) \setminus \{0\}, \end{cases}$$

onde assumimos as hipóteses $(H_1), (H_2), (H_3)$ e (H_7).

Observamos que das hipóteses (H_1) e (H_8), o potencial $V - W$ é assintoticamente $\mathbb{Z}^N$-periódico no infinito. Um outro fato relevante é que $V - W \leq V$, pois estamos supondo $W \geq 0$.

Evidentemente, das hipóteses (H_2) e (H_3) obtemos

$$1 < (p + \sigma)_- \text{ e } (q - \tau) \ll p^*$$

respectivamente. A necessidade da hipótese (H_5) está relacionada à aplicabilidade do método de iteração de Moser para obtenção de estimativas na norma L^∞. Mais detalhes são apresentados no apêndice B.

Recordamos que no caso de expoentes constantes, encontramos numerosos e importantes trabalhos sobre problemas semi-lineares envolvendo potenciais periódicos ou assintoticamente periódicos no infinito, tais como, Pankov [70], Rabinowitz [73], Coti-Zelati & Rabinowitz [37], Kryszewski & Szulkin [60], Willem & Zou [83], Pankov & Pflüger [71] (caso subcrítico) Chabrowski & Yang [34], Alves, Carrião & Miyagaki [20] e Schechter & Zou [77] (caso crítico). Para problemas quasi-lineares, citamos Alves, do Ó & Miyagaki [19].

Relativamente ao problema (P), nossa contribuição foi demonstrar a existência de uma solução para o mesmo, desde que sejam considerados valores suficientementes grandes do parâmetro μ. Tal solução surge como um ponto crítico do funcional energia correspondente a (P), o qual é definido como

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\big(p(x) + \sigma(x)\big)} \Big(\big|\nabla u\big|^{p(x)+\sigma(x)} + \big(V(x) - W(x)\big)|u|^{p(x)+\sigma(x)}\Big) - \Psi(u) - \Phi(u),$$

para todo $u \in W^{1,p(x)+\sigma(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$, onde

$$\Psi(u) = \mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\big(q(x) - \tau(x)\big)} |u|^{q(x)-\tau(x)} \text{ e } \Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p^*(x)} |u|^{p^*(x)}.$$

Podemos mostrar que $I \in \mathcal{C}^1\Big(W^{1,p(x)+\sigma(x)}\big(\mathbb{R}^N\big), \mathbb{R}\Big)$ com

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\big|\nabla u\big|^{p(x)+\sigma(x)-2} \nabla u \cdot \nabla v + \big(V(x) - W(x)\big)|u|^{p(x)+\sigma(x)-2} uv \Big) - \Psi'(u)v - \Phi'(u)v,$$

para todos $u, v \in W^{1,p(x)+\sigma(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$, onde

$$\Psi'(u)v = \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)-\tau(x)-2} uv \quad \text{e} \quad \Phi'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*(x)-2} uv,$$

permitindo efetivamente uma abordagem variacional ao problema.

A solução que encontramos para (P) possui a propriedade descrita na próxima definição.

Definição 2.1.1. *Uma solução* u *de* (P) *é dita uma* solução ground-state *se é uma solução de energia mínima, ou seja,*

$$I(u) \leq I(v),$$

qualquer que seja a solução v *de* (P).

O principal resultado deste capítulo é então o seguinte:

Teorema 2.1.2 ([13])**.** *Suponha que* $(H_1) - (H_9)$ *são válidas. Então, existe* $\mu^* > 0$ *tal que o problema* (P) *possui uma solução ground-state para todo* $\mu \geq \mu^*$.

2.2 O problema periódico

Nesta seção demonstramos a existência de uma solução ground-state para uma classe de problemas relacionados a (P) (a definição de solução ground-state é análoga àquela dada acima para o problema (P)), a saber,

$$(P_\infty) \begin{cases} -\Delta_{p(x)} u + V(x)|u|^{p(x)-2}u = \mu |u|^{q(x)-2}u + |u|^{p^*(x)-2}u, \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big) \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Adiantamos ao leitor que a existência de uma solução ground-state para (P_∞) é uma etapa fundamental na demonstração do Teorema 2.1.2.

A demonstração que apresentamos consiste em uma adaptação daquela em [20, Teorema 2.1]. Um argumento fundamental naquela demonstração é a existência de extremos para a constante ótima da imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Isto permitiu aos autores daquele artigo obter uma localização adequada do nível do passo da montanha associado ao problema que consideraram. Todavia, no contexto de expoentes variáveis tal fato não se mantém (um interessante estudo é encontrado em [31]) e, motivados por [9], utilizamos um outro argumento (veja 2.3). Observamos que devido ao uso deste argumento mais geral, tivemos de penalizar o parâmetro μ. Mais exatamente, obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1 ([13]). *Suponha* $(H_1), (H_2), (H_3)$ *e* (H_7) *são válidas. Então, existe* $\mu_\infty > 0$ *tal que o problema* (P_∞) *possui uma solução ground-state não-negativa para todo* $\mu \geq \mu_\infty$.

Neste caso, buscamos por pontos críticos do funcional energia correspondente a (P_∞), isto é,

$$I_\infty(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)} \right) - \mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p^*(x)} |u|^{p^*(x)},$$

para todo $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

De fato, podemos verificar que $I_\infty \in \mathcal{C}^1\left(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$ com

$$I'_\infty(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla v + V(x)|u|^{p(x)-2} uv \right) - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)-2} uv - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*(x)-2} uv,$$

para todos $u, v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, pontos críticos de I_∞ são precisamente as soluções fracas para (P_∞).

A norma que consideramos sobre $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ é definida por

$$\|u\| = \inf \left\{ \lambda > 0 \, ; \, \rho(\lambda^{-1} u) \leq 1 \right\},$$

onde

$$\rho(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)} \right),$$

a qual, de acordo com (1.6), é equivalente à norma usual sobre $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

2.2.1 Resultados preliminares

Iniciamos mostrando que o funcional I_∞ possui uma boa geometria.

Proposição 2.2.2. *O funcional* I_∞ *satisfaz a geometria do passo da montanha.*

Demonstração. Seja $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Primeiramente, observamos que

$$I_\infty(u) \geq \frac{1}{p_+}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)}\right) - \frac{\mu}{q_-}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q(x)} - \frac{1}{p_-^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*(x)}. \tag{2.1}$$

Das imersões contínuas de Sobolev, existem $C_1, C_2 > 0$, independentes de u, verificando

$$|u|_{q(x)} \leq C_1\|u\| \text{ e } |u|_{p^*(x)} \leq C_2\|u\|.$$

Supondo que

$$\|u\| < m = \min\left\{1, \frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_2}\right\},$$

então

$$\|u\| < 1, |u|_{q(x)} < 1 \text{ e } |u|_{p^*(x)} < 1.$$

Portanto, para $\|u\| < m$, combinando a desigualdade (2.1) com as Proposições 1.1.8 e 1.1.16, obtemos

$$I_\infty(u) \geq \frac{1}{p_+}\|u\|^{p_+} - \mu C_3\|u\|^{q_-} - C_4\|u\|^{p_-^*}$$

para constantes $C_3, C_4 > 0$ independentes de u. Agora, como $p_+ < q_- \leq p_-^*$, podemos escolher $r \in (0, m)$ tal que

$$\frac{1}{p_+}r^{p_+} - \mu C_3 r^{q_-} - C_4 r^{p_-^*} \geq \frac{1}{2p_+}r^{p_+}.$$

Portanto, se $\|u\| = r$, então

$$I_\infty(u) \geq \frac{1}{2p_+}r^{p_+}.$$

Por outro lado, fixado $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, para $t > 1$ temos

$$I_\infty(tv) \leq t^{p_+}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{p(x)}\left(\left|\nabla v\right|^{p(x)} + V(x)|v|^{p(x)}\right) - t^{q_-}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{q(x)}|v|^{q(x)},$$

implicando que

$$\lim_{t\to\infty} I_\infty(tv) = -\infty.$$

Assim, considerando $u_1 = t_1 v$ com $t_1 > \frac{r}{\|v\|}$ e $I_\infty(t_1 v) \leq 0$, para $\|u\| = r$ obtemos

$$I_\infty(u) \geq \max\left\{I_\infty(0) = 0, I_\infty(u_1)\right\},$$

mostrando a geometria do passo da montanha. ■

Em vista da Proposição 2.2.2, podemos utilizar uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS) (veja 1.3.6) para concluir a existência de uma sequência $(u_n) \subset W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ verificando

$$I_\infty(u_n) \to c_\infty \ \text{ e } \ I'_\infty(u_n) \to 0, \tag{2.2}$$

onde

$$c_\infty = \inf_{\gamma \in \Gamma_\infty} \max_{t \in [0,1]} I_\infty\big(\gamma(t)\big),$$

sendo

$$\Gamma_\infty = \left\{\gamma \in \mathcal{C}\Big([0,1], W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)\Big); \gamma(0) = 0 \ \text{ e } \ I_\infty\big(\gamma(1)\big) \leq 0\right\}.$$

Um ponto crucial para o que segue é o fato de que

$$c_\infty \to 0, \ \text{quando } \mu \to +\infty \text{ (veja apêndice C)}. \tag{2.3}$$

Assim, podemos escolher $\mu_\infty > 0$ tal que

$$c_\infty < \min\left\{\theta\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{\theta}}, \frac{\nu}{K^{p_+}}\right\}, \forall \mu \geq \mu_\infty, \text{[1]} \tag{2.4}$$

onde

$$\theta = 1/p_+ - 1/p_-^*, \ \nu = 1/p_+ - 1/q_-, \tag{2.5}$$

e $K \geq 1$ é fixo satisfazendo

$$|u|_{p^*(x)} \leq K\|u\|, \forall u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N). \tag{2.6}$$

Uma importante propriedade das sequências $(PS)_d$ para I_∞ é obtida na próxima proposição.

[1] Em um certo sentido, este mínimo funcionará como o número $\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$ no artigo seminal de Brezis & Nirenberg [32].

Proposição 2.2.3. *Se* (v_n) *é uma sequência* $(PS)_d$ *para* I_∞*, então* (v_n) *é limitada em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Seja (v_n) uma sequência $(PS)_d$ para I_∞. Em primeiro lugar, admitimos a existência de somente um número finito de termos v_n tais que $\rho(v_n) > 1$. Do Corolário 1.1.17 , (v_n) é limitada e a demonstração está terminada. Em segundo lugar, admitimos a existência de uma infinidade de termos v_n tais que $\rho(v_n) > 1$. Por um lado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I_\infty(v_n) - \frac{1}{q_-} I'_\infty(v_n)v_n \leq d + 1 + \|v_n\|,\ n \geq n_0.$$

Por outro lado, pela Proposição 1.1.16, para os termos tais que $\rho(v_n) > 1$ é válido que

$$I_\infty(v_n) - \frac{1}{q_-} I'_\infty(v_n)v_n \geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)\|v_n\|^{p_-}$$

Das considerações anteriores, para os termos tais que $\rho(v_n) > 1$, deduzimos

$$d + 1 + \|v_n\| \geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)\|v_n\|^{p_-},\ n \geq n_0,$$

o que garante que (v_n) também é limitada neste segundo caso.

∎

No que segue, combinando a reflexividade de $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ com a Proposição 2.2.3, admitimos, a menos de subsequência, que quaisquer sequências $(PS)_d$ para I_∞ são fracamente convergentes em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

A proposição seguinte constitui um ponto chave para mostrar o Teorema 2.2.1. A demonstração faz uso de uma extensão do Princípio de Concentração de Compacidade de Lions ao contexto dos expoentes variáveis. Tal extensão é devida a Y. Fu & X. Zhang, sendo encontrada no artigo [49].

Proposição 2.2.4. *Seja* (v_n) *uma sequência* $(PS)_d$ *para* I_∞ *com* $v_n \rightharpoonup v$ *em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. *Então*

$$I'_\infty(v) = 0.$$

Por conseguinte, se $v \neq 0$*, então* v *é uma solução para* (P_∞).

Demonstração. Seguindo um argumento bem conhecido, baseado na Proposição 1.1.14, é suficiente demonstrar que a menos de subsequência,

$$\nabla v_n(x) \to \nabla v(x) \text{ em q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Observamos que, a menos de subsequência, existem duas medidas não-negativas $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} \rightharpoonup \mathfrak{m} \ \text{ e } \ |v_n|^{p^*(x)} \rightharpoonup \mathfrak{n} \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N). \tag{2.7}$$

Neste caso, de acordo com o Princípio de Concentração de Compacidade em [49], existe um conjunto enumerável $\mathfrak{I}$ tal que

$$\mathfrak{n} = |v|^{p^*(x)} + \sum_{i\in\mathfrak{I}} \mathfrak{n}_i\delta_{x^i}, \quad \mathfrak{m} \geq \left|\nabla v\right|^{p(x)} + \sum_{i\in\mathfrak{I}} \mathfrak{m}_i\delta_{x^i}$$

e

$$\mathfrak{n}_i \leq S \max\left\{\mathfrak{m}_i^{\frac{p_+^*}{p_-}}, \mathfrak{m}_i^{\frac{p_-^*}{p_+}}\right\}, \tag{2.8}$$

onde $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{n}_i \in [0,\infty)$ e $x^i \in \mathbb{R}^N$, para todo $i \in \mathfrak{I}$. A constante S é definida por

$$S = \sup_{\substack{u\in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)\\ \|u\|\leq 1}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*(x)}.$$

Nossa primeira tarefa é estabelecer que

$$\mathfrak{m}_i = \mathfrak{n}_i, \ \forall i \in \mathfrak{I}.$$

Para isto, seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\varphi(x) = 1, \text{ em } B_1(0), \ \varphi(x) = 0 \text{ em } B_2^c(0) \ \text{ e } \ 0 \leq \varphi(x) \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Fixado $i \in \mathfrak{I}$, consideramos para cada $\epsilon > 0$

$$\varphi_{i,\epsilon}(x) = \varphi_\epsilon(x) = \varphi\left(\frac{x - x^i}{\epsilon}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Como (v_n) é limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, a sequência $(\varphi_\epsilon v_n)$ também é limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Portanto

$$I'_\infty(v_n)(\varphi_\epsilon v_n) = o_n(1),$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\varphi_\epsilon\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} + v_n\left|\nabla v_n\right|^{p(x)-2}\nabla v_n \cdot \nabla\varphi_\epsilon\right) + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\epsilon V(x)|v_n|^{p(x)}$$
$$= \mu\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\epsilon|v_n|^{q(x)} + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\epsilon|v_n|^{p^*(x)} + o_n(1).$$

Após passagem ao limite quando $n \to \infty$, da convergência fraca de $\left(\left|\nabla v_n\right|^{p(x)}\right)$ e $\left(|v_n|^{p^*(x)}\right)$ em $\mathcal{M}\left(\mathbb{R}^N\right)$ combinada com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\epsilon \, dm + \limsup_n \int_{\mathbb{R}^N} v_n \left|\nabla v_n\right|^{p(x)-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi_\epsilon + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\epsilon V(x)|v|^{p(x)} \\ &= \mu \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\epsilon |v|^{q(x)} + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\epsilon \, dn. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Deste modo, se

$$\lim_{\epsilon \to 0} \limsup_n \int_{\mathbb{R}^N} v_n \left|\nabla v_n\right|^{p(x)-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi_\epsilon = 0,$$

então após passagem ao limite quando $\epsilon \to 0$ em (2.9), concluímos que

$$m_i = m(x_i) = n(x_i) = n_i \tag{2.10}$$

como requerido. Mostremos então que este é o caso. Com efeito, utilizando a desigualdade de Hölder e a limitação de (v_n) em $W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ deduzimos

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^N} v_n \left|\nabla v_n\right|^{p(x)-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi_\epsilon\right| &\leq 2 \left|\left|\nabla v_n\right|^{p(x)-1}\right|_{p'(x)} \left|\left|v_n\right|\left|\nabla \varphi_\epsilon\right|\right|_{p(x)} \\ &\leq C \max\left\{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p(x)} \left|\nabla \varphi_\epsilon\right|^{p(x)}\right)^{\frac{1}{p_-}}, \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p(x)} \left|\nabla \varphi_\epsilon\right|^{p(x)}\right)^{\frac{1}{p_+}}\right\}. \end{aligned}$$

Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue-se que

$$\begin{aligned} &\limsup_n \left|\int_{\mathbb{R}^N} v_n \left|\nabla v_n\right|^{p(x)-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi_\epsilon\right| \\ &\quad \leq C \max\left\{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p(x)} \left|\nabla \varphi_\epsilon\right|^{p(x)}\right)^{\frac{1}{p_-}}, \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p(x)} \left|\nabla \varphi_\epsilon\right|^{p(x)}\right)^{\frac{1}{p_+}}\right\}. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder mais uma vez, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p(x)} \left|\nabla \varphi_\epsilon\right|^{p(x)} \leq 2 \left||v|^{p(x)}\right|_{L^{\frac{N}{N-p(x)}}\left(B_{2\epsilon}(x^i)\right)} \left|\left|\nabla \varphi_\epsilon\right|^{p(x)}\right|_{L^{\frac{N}{p(x)}}\left(B_{2\epsilon}(x^i)\right)}.$$

Como

$$\int_{B_{2\epsilon}(x^i)} \left|\nabla \varphi_\epsilon\right|^N = \int_{B_2(0)} \left|\nabla \varphi\right|^N,$$

deduzimos

$$\left|\left|\nabla \varphi_\epsilon\right|^{p(x)}\right|_{L^{\frac{N}{p(x)}}\left(B_{2\epsilon}(x^i)\right)} \leq \max\left\{\left(\int_{B_{2\epsilon}(x^i)} \left|\nabla \varphi_\epsilon\right|^N\right)^{\frac{1}{\left(\frac{N}{p}\right)_-}}, \left(\int_{B_{2\epsilon}(x^i)} \left|\nabla \varphi_\epsilon\right|^N\right)^{\frac{1}{\left(\frac{N}{p}\right)_+}}\right\} \leq C,$$

para uma constante positiva C independente de ϵ. Em consequência

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nu|^{p(x)} \left|\nabla \varphi_\epsilon\right|^{p(x)} \leq C \left| |\nu|^{p(x)} \right|_{L^{\frac{N}{N-p(x)}}\left(B_{2\epsilon}(x^i)\right)}$$

e, daí,

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nu_n \left|\nabla \nu_n\right|^{p(x)-2} \nabla \nu_n \cdot \nabla \varphi_\epsilon \right| \\
&\quad \leq C \max \left\{ \left| |\nu|^{p(x)} \right|^{\frac{1}{p_-}}_{L^{\frac{N}{N-p(x)}}\left(B_{2\epsilon}(x^i)\right)}, \left| |\nu|^{p(x)} \right|^{\frac{1}{p_+}}_{L^{\frac{N}{N-p(x)}}\left(B_{2\epsilon}(x^i)\right)} \right\}.
\end{aligned}$$

Mas como

$$\left| |\nu|^{p(x)} \right|_{L^{\frac{N}{N-p(x)}}\left(B_{2\epsilon}(x^i)\right)} \leq \max \left\{ \left(\int_{B_{2\epsilon}(x^i)} |\nu|^{p^*(x)} \right)^{\frac{1}{\left(\frac{N}{N-p}\right)_-}}, \left(\int_{B_{2\epsilon}(x^i)} |\nu|^{p^*(x)} \right)^{\frac{1}{\left(\frac{N}{N-p}\right)_+}} \right\},$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue-se que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \limsup_n \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nu_n \left|\nabla \nu_n\right|^{p(x)-2} \nabla \nu_n \cdot \nabla \varphi_\epsilon \right| = 0,$$

implicando que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \limsup_n \int_{\mathbb{R}^N} \nu_n \left|\nabla \nu_n\right|^{p(x)-2} \nabla \nu_n \cdot \nabla \varphi_\epsilon = 0,$$

como queríamos.

Observamos agora que

$$\frac{p_-^*}{p_+} \leq \frac{p_+^*}{p_-}$$

e, explorando a relação (2.8), deduzimos

$$n_i^{\frac{p_+}{p_-^*}} \leq \left(S^{\frac{p_+}{p_-^*}} + S^{\frac{p_-}{p_+^*}} \right) m_i, \text{ se } m_i < 1, \tag{2.11}$$

e

$$n_i^{\frac{p_-}{p_+^*}} \leq \left(S^{\frac{p_+}{p_-^*}} + S^{\frac{p_-}{p_+^*}} \right) m_i, \text{ se } m_i \geq 1. \tag{2.12}$$

Consequentemente, de (2.10) – (2.12), se $n_i > 0$ para algum $i \in \mathfrak{I}$, existe $\alpha > 0$, o qual independe de i, tal que

$$n_i \geq \alpha. \tag{2.13}$$

Recordando que

$$\sum_{\substack{i \in \mathfrak{I} \\ m_i < 1}} n_i^{\frac{p_+}{p_-^*}} + \sum_{\substack{i \in \mathfrak{I} \\ m_i \geq 1}} n_i^{\frac{p_-}{p_+^*}} \leq C \sum_{i \in \mathfrak{I}} m_i < \infty, \tag{2.14}$$

as desigualdades (2.13) – (2.14) acarretam que $\widetilde{\mathfrak{I}} = \left\{ i \in \mathfrak{I}\,;\, n_i > 0 \right\}$ é um conjunto finito. Disto, uma das duas possibilidades abaixo ocorre:

(a) Existem $n_{i_1}, \ldots, n_{i_s} > 0$ para um $s \in \mathbb{N}$ máximo;

(b) $n_i = 0$, para todo $i \in \mathfrak{I}$.

Começamos analisando (a). Para isto, fixe $0 < \epsilon_0 < 1$ suficientemente pequeno tal que

$$B_{\epsilon_0}(x^1), \cdots, B_{\epsilon_0}(x^s) \subset B_{\frac{1}{\epsilon_0}}(0) \text{ e } \; B_{\epsilon_0}(x^i) \cap B_{\epsilon_0}(x^j) = \emptyset, \; i \neq j,$$

onde $x^1, \ldots, x^s$ são as singularidades relativas a $n_{i_1}, \ldots, n_{i_s}$ respectivamente. Considerando

$$\psi_\epsilon(x) = \varphi(\epsilon x) - \sum_{i=1}^{s} \varphi\left(\frac{x - x^i}{\epsilon}\right), \, \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

temos para $0 < \epsilon < \dfrac{\epsilon_0}{2}$,

$$\psi_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{s} B_\epsilon(x^i) \\ 1, \text{ se } x \in A_\epsilon = B_{\frac{1}{\epsilon}}(0) \setminus \displaystyle\bigcup_{i=1}^{s} B_{2\epsilon}(x^i) \end{cases},$$

donde se segue que

$$\operatorname{supp} \psi_\epsilon \subset \overline{B_{\frac{2}{\epsilon}}(0)} \setminus \bigcup_{i=1}^{s} B_\epsilon(x^i)$$

e, explorando o Princípio de Concentração de Compacidade novamente, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\epsilon |v_n|^{p^*(x)} \to \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\epsilon |v|^{p^*(x)}.$$

Como

$$I'_\infty(v_n)(v_n \psi_\epsilon) = o_n(1) \text{ e } I'_\infty(v_n)(v \psi_\epsilon) = o_n(1),$$

repetindo o mesmo tipo de argumentos para o caso onde os expoentes são constantes, obtemos

$$\lim_n \int_{A_\epsilon} \big(P_n(x) + V(x) Q_n(x)\big) = 0,$$

sendo

$$P_n(x) = \Big(\big|\nabla v_n\big|^{p(x)-2} \nabla v_n - \big|\nabla v\big|^{p(x)-2} \nabla v\Big) \cdot \Big(\nabla v_n - \nabla v\Big), \, \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall n \in \mathbb{N},$$

e

$$Q_n(x) = \left(|v_n|^{p(x)-2} v_n - |v|^{p(x)-2} v\right)\left(v_n - v\right), \ \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como

$$P_n(x) \geq \begin{cases} \frac{2^{3-p_+}}{p_+}\left|\nabla v_n - \nabla v\right|^{p(x)}, & \text{se } p(x) \geq 2 \\ (p_- - 1)\,\frac{\left|\nabla v_n - \nabla v\right|^2}{\left(\left|\nabla v_n\right| + \left|\nabla v\right|\right)^{2-p(x)}}, & \text{se } 1 < p(x) < 2 \end{cases}, \tag{2.15}$$

observamos que

$$\int_{A_\epsilon} P_n(x)\,dx \geq C \int_{A_\epsilon \cap \left\{x \in \mathbb{R}^N\,;\, p(x) \geq 2\right\}} \left|\nabla v_n - \nabla v\right|^{p(x)} \geq 0.$$

Portanto

$$\lim_n \int_{A_\epsilon \cap \left\{x \in \mathbb{R}^N\,;\, p(x) \geq 2\right\}} \left|\nabla v_n - \nabla v\right|^{p(x)} = 0. \tag{2.16}$$

Por outro lado, da desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} &\int_{A_\epsilon \cap \{x \in \mathbb{R}^N\,;\, 1 < p(x) < 2\}} \left|\nabla v_n - \nabla v\right|^{p(x)} \\ &\leq C \left| \frac{\left|\nabla v_n - \nabla v\right|^{p(x)}}{\left(\left|\nabla v_n\right| + \left|\nabla v\right|\right)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}} \right|_{L^{\frac{2}{p(x)}}\left(\widetilde{A_\epsilon}\right)} \left| \left(\left|\nabla v_n\right| + \left|\nabla v\right|\right)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} \right|_{L^{\frac{2}{2-p(x)}}\left(\widetilde{A_\epsilon}\right)}, \end{aligned}$$

onde $\widetilde{A_\epsilon} = A_\epsilon \cap \left\{x \in \mathbb{R}^N\,;\, 1 < p(x) < 2\right\}$. Da relação (2.15), o lado direito da desigualdade acima tende a zero. Logo

$$\lim_n \int_{A_\epsilon \cap \left\{x \in \mathbb{R}^N\,;\, 1 < p(x) < 2\right\}} \left|\nabla v_n - \nabla v\right|^{p(x)} = 0. \tag{2.17}$$

Agora, combinando (2.16) com (2.17) concluímos que

$$\lim_n \int_{A_\epsilon} \left|\nabla v_n - \nabla v\right|^{p(x)} = 0.$$

Os mesmos argumentos podem ser utilizados para mostrar que

$$\lim_n \int_{A_\epsilon} V(x)\,|v_n - v|^{p(x)} = 0.$$

Por conseguinte

$$v_n \to v \text{ em } W^{1,p(x)}(A_\epsilon).$$

Passando a uma subsequência, o limite acima garante que

$$\nabla v_n(x) \to \nabla v(x) \text{ em q.t.p. } x \in A_\epsilon \ \left(0 < \epsilon < \frac{\epsilon_0}{2}\right).$$

Observando que

$$\mathbb{R}^N \setminus \left\{x^1, x^2, \ldots, x^s\right\} = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n} < \frac{\epsilon_0}{2}}} A_{\frac{1}{n}},$$

concluímos por um argumento diagonal a existência de uma subsequência de (v_n), ainda denotada por (v_n), tal que

$$\nabla v_n(x) \to \nabla v(x) \text{ em q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Para o caso (b), consideramos

$$\psi_\epsilon(x) = \varphi(\epsilon x), \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ e } A_\epsilon = B_{\frac{1}{\epsilon}}(0), \ \epsilon > 0.$$

Repetindo os mesmos argumentos utilizados no caso (a), obtemos

$$v_n \to v \text{ em } W^{1,p(x)}\left(B_{\frac{1}{\epsilon}}(0)\right), \forall \epsilon > 0. \tag{2.18}$$

Deste modo, existe novamente uma subsequência de (v_n) (não renomeada) tal que

$$\nabla v_n(x) \to \nabla v(x) \text{ em q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Além disso, de (2.18),

$$v_n \to v \text{ em } W^{1,p(x)}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

■

Inspirados na demonstração do resultado precedente, obtemos uma consequência que será muito importante adiante.

Corolário 2.2.5. *Seja* (v_n) *uma sequência* $(PS)_d$ *para* I_∞ *com* $d < \beta = \theta\alpha$*, onde* θ *e* α *são dados em* (2.5) *e* (2.13) *respectivamente. Se* $v_n \rightharpoonup v$ *em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$*, então*

$$v_n \to v \ \textit{em} \ W^{1,p(x)}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. É suficiente mostrar que

$$\widetilde{\mathfrak{I}} = \left\{ i \in \mathfrak{I} \, ; \, \mathfrak{n}_i > 0 \right\} = \emptyset.$$

De fato, argumentando por contradição que $\widetilde{\mathfrak{I}} \neq \emptyset$, existe $i \in \mathfrak{I}$ tal que $\mathfrak{n}_i \geq \alpha$. Sendo (v_n) limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, temos $I'_\infty(v_n)v_n = o_n(1)$. Então

$$d + o_n(1) = I_\infty(v_n) - \frac{1}{p_+} I'_\infty(v_n)v_n \geq \theta \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_{i,\epsilon} |v_n|^{p^*(x)}.$$

Após passagem ao limite quando $n \to \infty$ e $\epsilon \to 0$ consecutivamente, obtemos $d \geq \theta \mathfrak{n}_i \geq \theta\alpha = \beta$, o que contraria a hipótese sobre d. ∎

Corolário 2.2.6. *Existe $\tilde{\mu} > 0$ tal que se $\mu \geq \tilde{\mu}$, então a sequência (u_n), dada em (2.2), verifica*

$$u_n \to u \text{ em } W^{1,p(x)}_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

onde u é o limite fraco de (u_n) em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. De (2.3) existe $\tilde{\mu} > 0$ tal que

$$c_\infty < \beta, \, \forall \mu \geq \tilde{\mu}.$$

O resultado segue então do Corolário 2.2.5. ∎

Observamos que a Proposição 2.2.4 não nos permite concluir que o limite fraco v da sequência (v_n) é um ponto crítico não-trivial de I_∞. No que segue, iniciamos a preparação para deduzir uma proposição que descreve um comportamento de algumas sequências $(PS)_d$ para o funcional I_∞ e será utilizada para obtermos uma solução não-trivial para o problema (P_∞).

Lema 2.2.7. *Seja (v_n) uma sequência $(PS)_d$ para I_∞ com $d < \nu/K^{p_+}$, onde ν e K são dados em (2.5) e (2.6) respectivamente. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*(x)} \right)^{1/p^*_-} \leq K \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} + V(x)|v_n|^{p(x)} \right) \right)^{1/p_+}, \, \forall n \geq n_0.$$

Demonstração. Basicamente, devemos mostrar que

$$|v_n|_{p^*(x)}, \; \|v_n\| \leq 1, \, \forall n \geq n_0. \tag{2.19}$$

Se as desigualdades acima são válidas, então pelas Proposições 1.1.8 e 1.1.16 segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*(x)} \leq |v_n|_{p^*(x)}^{p^*_-}, \ \forall n \geq n_0,$$

e

$$\|v_n\|^{p_+} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} + V(x)|v_n|^{p(x)} \right), \ \forall n \geq n_0.$$

Portanto, para todo $n \geq n_0$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*(x)} \right)^{1/p^*_-} \leq |v_n|_{p^*(x)} \leq K\|v_n\| \leq K \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} + V(x)|v_n|^{p(x)} \right) \right)^{1/p_+}.$$

Com o objetivo de deduzir as desigualdades em (2.19), recordamos que

$$I_\infty(v_n) - \frac{1}{q_-} I'_\infty(v_n)v_n = d + o_n(1).$$

Desta maneira

$$d + o_n(1) \geq \nu \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} + V(x)|v_n|^{p(x)} \right)$$

e, por conseguinte,

$$\frac{d}{\nu} + o_n(1) \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} + V(x)|v_n|^{p(x)} \right).$$

Após passagem ao limite superior, pela hipótese sobre d obtemos

$$\limsup_n \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} + V(x)|v_n|^{p(x)} \right) < \frac{1}{K^{p_+}}$$

e, consequentemente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} + V(x)|v_n|^{p(x)} \right) \leq \frac{1}{K^{p_+}} \leq 1, \ \forall n \geq n_0.$$

Pelo Corolário 1.1.9, segue-se que

$$\|v_n\| \leq 1, \ \forall n \geq n_0.$$

Assim

$$\|v_n\|^{p_+} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} + V(x)|v_n|^{p(x)} \right), \ \forall n \geq n_0,$$

implicando que

$$\|v_n\| \leq \frac{1}{K}, \ \forall n \geq n_0.$$

Sendo

$$|v_n|_{p^*(x)} \leq K\|v_n\|, \forall n \in \mathbb{N},$$

obtemos

$$|v_n|_{p^*(x)} \leq 1, \forall n \geq n_0.$$

■

A próxima proposição descreve um comportamento de algumas sequências $(PS)_d$ para I_∞, entre estas as sequências $(PS)_{c_\infty}$ com $\mu \geq \mu_\infty$ (veja (2.4)), que desempenham parte fundamental na demonstração do Teorema 2.2.1.

Sugerimos ao leitor a comparação desta proposição com [20, Lema 3.3]. Ficará evidente que no contexto dos expoentes variáveis, o mínimo definido abaixo realiza o papel do número $\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$ introduzido por Brezis e Nirenberg em [32].

Proposição 2.2.8. *Seja* (v_n) *uma sequência* $(PS)_d$ *para* I_∞ *com*

$$d < \min\left\{\theta\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{\theta}}, \frac{\nu}{K^{p_+}}\right\},$$

onde θ, ν *e* K *são dados em* (2.5), (2.5) *e* (2.6) *respectivamente. Então, a menos de subsequência, ou*

(a) $v_n \to 0$ *em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, *ou*

(b) *Existem* $R, \eta > 0$ *e* $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ *tais que*

$$\limsup_n \int_{B_R(y_n)} |v_n|^{p(x)} \geq \eta.$$

Demonstração. Passando a uma subsequência, podemos admitir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} + V(x)|v_n|^{p(x)}\right) \to L \geq 0.$$

Se (b) não é válida, existe $R > 0$ tal que

$$\lim_n \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |v_n|^{p(x)} = 0.$$

Do Lema de Lions 1.1.24 temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q(x)} \to 0. \tag{2.20}$$

Nosso objetivo é mostrar que $L = 0$, ou seja, (a) é válido. Suponha por contradição $L > 0$. Como $I'_\infty(v_n)v_n = o_n(1)$, deduzimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*(x)} \to L.$$

De (2.20)

$$\begin{aligned} d + o_n(1) &= I_\infty(v_n) + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |v_n|^{q(x)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} \left(\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} + V(x)|v_n|^{p(x)} \right) - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p^*(x)} |v_n|^{p^*(x)} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$d + o_n(1) \geq \frac{1}{p_+} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} + V(x)|v_n|^{p(x)} \right) - \frac{1}{p_-^*} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*(x)}.$$

Após passagem ao limite quando $n \to +\infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$d \geq \frac{1}{p_+} L - \frac{1}{p_-^*} L = \theta L. \tag{2.21}$$

Por outro lado, utilizando o fato de que

$$d < \frac{\nu}{K^{p_+}},$$

segue do Lema 2.2.7 a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*(x)} \right)^{1/p_-^*} \leq K \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} + V(x)|v_n|^{p(x)} \right) \right)^{1/p_+}, \ \forall n \geq n_0.$$

Após passagem ao limite quando $n \to +\infty$ na desigualdade acima, concluímos que

$$L^{1/p_-^*} \leq K L^{1/p_+},$$

ou, equivalentemente,

$$L \geq \left(\frac{1}{K} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{2.22}$$

Combinando (2.21) e (2.22) obtemos

$$d \geq \theta L \geq \theta \left(\frac{1}{K} \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

o que é uma contradição com a hipótese sobre d. Desta forma, $L = 0$. ∎

2.2.2 Demonstração do Teorema 2.2.1

Considere a sequência (u_n) dada em (2.2) e seja $u \in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$. Se $u \neq 0$, pela Proposição 2.2.4 temos uma solução para $\big(P_\infty\big)$. Agora, caso $u = 0$, recordamos que se $\mu \geq \mu_\infty$, então

$$0 < c_\infty < \min\left\{\theta\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{\theta}}, \frac{\nu}{K^{p_+}}\right\}.$$

Da Proposição 2.2.8, existem $R, \eta > 0$ e $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$\limsup_n \int_{B_R(y_n)} |u_n|^{p(x)} \geq \eta.$$

Sem perda de generalidade, admitimos que $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$ e definimos

$$\widetilde{u}_n(x) = u_n(x + y_n),\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Combinando a $\mathbb{Z}^N$-periodicidade dos expoentes p e q e do potencial V com a invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, concluímos que

$$I_\infty(\widetilde{u}_n) = I_\infty(u_n) \ \text{ e } \ I'_\infty(\widetilde{u}_n) \to 0,$$

mostrando que $(\widetilde{u}_n)$ também é uma sequência $(PS)_{c_\infty}$ para I_∞. No que segue, denotamos por $\widetilde{u} \in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$ o limite fraco de $(\widetilde{u}_n)$. Como

$$\int_{B_R(0)} |\widetilde{u}_n|^{p(x)} = \int_{B_R(y_n)} |u_n|^{p(x)},$$

do fato da imersão de Sobolev

$$W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big) \hookrightarrow L^{p(x)}\big(B_R(0)\big)$$

ser compacta, obtemos

$$\int_{B_R(0)} |\widetilde{u}|^{p(x)} \geq \eta > 0,$$

implicando ser $\widetilde{u} \neq 0$. Portanto, pela Proposição 2.2.4, $\widetilde{u}$ é uma solução para $\big(P_\infty\big)$.

Para concluirmos a demonstração do Teorema 2.2.1, necessitamos de algumas caracterizações do passo da montanha correspondente ao funcional I_∞. Neste tocante, enfatizamos o papel fundamental de que para cada $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\frac{f(x,s)}{|s|^{p_+-1}} \text{ é uma função estritamente crescente em } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

onde

$$f(x,s) = \mu|s|^{q(x)-2}s + |s|^{p^*(x)-2}s,\ x \in \mathbb{R}^N, s \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

Doravante denotamos por $u_\infty \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ a solução para (P_∞) encontrada pelos argumentos acima e por $\mathcal{N}_\infty$ a variedade de Nehari correspondente a I_∞, ou seja,

$$\mathcal{N}_\infty = \left\{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\};\ I'_\infty(u)u = 0\right\}.$$

Nosso intuito é mostrar que u_∞ satisfaz

$$I_\infty(u_\infty) = \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} I_\infty(u).$$

Além disso, demonstraremos que u_∞ pode ser considerada uma solução não-negativa.

Proposição 2.2.9. *Para todo* $u \in \mathcal{N}_\infty$*, temos* $I_\infty(u) > 0$ *e*

$$0 < J_\infty = \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} I_\infty(u).$$

Demonstração. Se $u \in \mathcal{N}_\infty$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)}\right) = \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)} + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*(x)}$$

e, portanto,

$$I_\infty(u) \geq \mu\nu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)} + \theta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*(x)} > 0.$$

Ora, argumentando por contradição, se $J_\infty = 0$, considere $(v_n) \subset \mathcal{N}_\infty$ tal que

$$I_\infty(v_n) \to 0. \tag{2.24}$$

Como $v_n \in \mathcal{N}_\infty$, sabemos que

$$I_\infty(v_n) \geq \mu\nu \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q(x)} + \theta \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*(x)}. \tag{2.25}$$

Utilizando (2.24) em conjunto com (2.25), deduzimos os limites

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{q(x)},\ \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*(x)} \to 0,$$

que implicam em

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^{p(x)} + V(x)|v_n|^{p(x)}\right) \to 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\|v_n\| \to 0.$$

Por outro lado, das imersões contínuas de Sobolev, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ verificando

$$|u|_{q(x)} \leq C_1\|u\| \text{ e } |u|_{p^*(x)} \leq C_2\|u\|, \forall u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).$$

Consequentemente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_n\|, |v_n|_{q(x)}, |v_n|_{p^*(x)} \leq 1, \forall n \geq n_0.$$

Das desigualdades acima, Proposições 1.1.8 e 1.1.16 e do fato de que (v_n) é uma sequência em $\mathcal{N}_\infty$, concluímos que

$$\|v_n\|^{p_+} \leq \mu|v_n|_{q(x)}^{q_-} + |v_n|_{p^*(x)}^{p^*_-} \leq \mu C_3\|v_n\|^{q_-} + C_4\|v_n\|^{p^*_-}, \forall n \geq n_0,$$

onde $C_3, C_4 > 0$ são constantes. Por conseguinte,

$$1 \leq \mu C_3\|v_n\|^{q_- - p_+} + C_4\|v_n\|^{p^*_- - p_+}, \forall n \geq n_0,$$

o que é uma contradição, pois $\|v_n\| \to 0$. Logo, $J_\infty > 0$. ■

Corolário 2.2.10. *Qualquer solução ground-state u para (P_∞) possui sinal bem definido, ou seja, $u \geq 0$ ou $u \leq 0$.*

Demonstração. Usando o fato de que u é uma solução, segue-se que

$$I'_\infty(u^\pm)u^\pm = 0,$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$. Portanto, se $u^\pm \neq 0$, então $u^\pm \in \mathcal{N}_\infty$, implicando que

$$J_\infty = I_\infty(u) = I_\infty(u^+) + I_\infty(u^-) \geq 2J_\infty,$$

um absurdo, pois $J_\infty > 0$. Consequentemente, $u^- = 0$ ou $u^+ = 0$. ■

Proposição 2.2.11. *Seja $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$. Então, existe um único $t_u > 0$ tal que*

$$t_u u \in \mathcal{N}_\infty.$$

Demonstração. Defina

$$\psi(t) = I_\infty(tu),\ t \geq 0.$$

Como ψ é contínua, $\psi(0) = 0$, $\psi(t) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = -\infty$, concluímos que ψ possui um ponto de máximo $t_u > 0$. Isto implica que

$$I'_\infty(t_u u)(t_u u) = 0,$$

isto é,

$$t_u u \in \mathcal{N}_\infty.$$

Nossa tarefa agora é estabelecer que t_u é o único ponto crítico de ψ. Sejam $v = t_u u$ e

$$\varphi(t) = I_\infty(tv),\ t \geq 0.$$

Como $v \in \mathcal{N}_\infty$, a demonstração reduz-se a que $t = 1$ seja o único ponto crítico de φ. Suponha então que $\varphi'(t) = 0$, para algum $t > 0$, $t \neq 1$. Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} t^{p(x)-1}\left(|\nabla v|^{p(x)} + V(x)|v|^{p(x)}\right) = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\mu|tv|^{q(x)-2}tv + |tv|^{p^*(x)-2}tv\right)v = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,tv)v, \tag{2.26}$$

para algum $t > 0$, $t \neq 1$, onde $f(x,s)$ é dado em 2.23. Observamos que

$$\frac{f(x,s)}{|s|^{p_+-1}} = \pm\left(\mu|s|^{q(x)-p_+} + |s|^{p^*(x)-p_+}\right),$$

conforme seja $s > 0$ e $s < 0$ respectivamente. Por conseguinte, para cada $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\frac{f(x,s)}{|s|^{p_+-1}} \text{ é uma função estritamente crescente em } (-\infty,0)\cup(0,\infty).$$

Estudamos agora (2.26) supondo $t > 1$ e $t < 1$ separadamente. Se $t > 1$, de (2.26) obtemos

$$t^{p_+-1}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v|^{p(x)} + V(x)|v|^{p(x)}\right) \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(x,tv)v = \int_{\left\{x\in\mathbb{R}^N\,;\,v(x)\neq 0\right\}} \frac{f(x,tv)}{|v|^{p_+-1}}v|v|^{p_+-1}$$

e, em consequência,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v|^{p(x)} + V(x)|v|^{p(x)}\right) \geq \int_{\left\{x\in\mathbb{R}^N\,;\,v(x)\neq 0\right\}} \frac{f(x,tv)}{|tv|^{p_+-1}}v|v|^{p_+-1}.$$

Por outro lado, como $v \in \mathcal{N}_\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla v\right|^{p(x)} + V(x)|v|^{p(x)} \right) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,v)v = \int_{\left\{x\in\mathbb{R}^N\,;\,v(x)\neq 0\right\}} \frac{f(x,v)}{|v|^{p_+-1}} v|v|^{p_+-1}.$$

Portanto

$$\int_{\left\{x\in\mathbb{R}^N\,;\,v(x)\neq 0\right\}} \left(\frac{f(x,v)}{|v|^{p_+-1}} - \frac{f(x,tv)}{|tv|^{p_+-1}} \right) v|v|^{p_+-1} \geq 0,$$

o que é uma contradição. Analogamente, chegamos a uma contradição quando $t < 1$. Deste modo, $t = 1$ é o único ponto crítico de φ. ■

Proposição 2.2.12. *O nível do passo da montanha* c_∞ *satisfaz*

$$c_\infty = J_\infty = \inf_{u\in\mathcal{N}_\infty} I_\infty(u).$$

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}_\infty$ e escolha $t_0 > 0$ tal que $u_0 = t_0 u$ satisfaz $I_\infty(u_0) \leq 0$. Então

$$\gamma_0(t) = tu_0, \ \forall t \in [0,1],$$

pertence a Γ_∞, implicando que

$$c_\infty \leq \max_{t\in[0,1]} I_\infty\big(\gamma_0(t)\big) = \max_{s\in[0,t_0]} I_\infty(su) \leq \max_{s\geq 0} I_\infty(su) = I_\infty(u)$$

e, portanto,

$$c_\infty \leq J_\infty. \tag{2.27}$$

Para a desigualdade contrária, considere uma sequência (u_n), a qual seja $(PS)_{c_\infty}$ para I_∞. Como $c_\infty > 0$, podemos admitir $u_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, pela Proposição 2.2.11, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um único $t_n > 0$ tal que $t_n u_n \in \mathcal{N}_\infty$. Assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} t_n^{p(x)} \left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + V(x)|u_n|^{p(x)} \right) = \mu \int_{\mathbb{R}^N} t_n^{q(x)} |u_n|^{q(x)} + \int_{\mathbb{R}^N} t_n^{p^*(x)} |u_n|^{p^*(x)}. \tag{2.28}$$

Daí vemos que $t_n \not\to 0$. De fato, se $t_n \to 0$, então podemos supor $t_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, de (2.28), obtemos

$$t_n^{p_+} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + V(x)|u_n|^{p(x)} \right) \leq \mu t_n^{q_-} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q(x)} + t_n^{p^*_-} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*(x)},$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + V(x)|u_n|^{p(x)} \right) \leq \mu t_n^{q_- - p_+} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q(x)} + t_n^{p^*_- - p_+} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*(x)}. \tag{2.29}$$

A limitação de (u_n) em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ em conjunto com as imersões contínuas de Sobolev garantem a limitação de (u_n) em $L^{q(x)}(\mathbb{R}^N)$ e $L^{p^*(x)}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, de (2.29),

$$u_n \to 0 \text{ em } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N),$$

o que é uma contradição, pois $c_\infty > 0$. Analogamente, de (2.28), concluímos que (t_n) é limitada. Com efeito, se existe uma subsequência de (t_n) (não renomeada) satisfazendo $t_n \to \infty$, podemos admitir $t_n > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, de (2.28),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + V(x)|u_n|^{p(x)} \right) \geq t_n^{p_-^* - p_+} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*(x)}.$$

Logo

$$\frac{1}{t_n^{p_-^* - p_+}} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + V(x)|u_n|^{p(x)} \right) \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*(x)}$$

e, por conseguinte,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*(x)} \to 0. \tag{2.30}$$

Pela fórmula de interpolação na Proposição 1.1.7, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q(x)} \to 0. \tag{2.31}$$

Sendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + V(x)|u_n|^{p(x)} \right) = \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q(x)} + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*(x)} + o_n(1), \tag{2.32}$$

os limites (2.30) e (2.31) combinados com (2.32) implicam que

$$u_n \to 0 \text{ em } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N),$$

o que é uma contradição mais uma vez. Então, (t_n) é limitada e, a menos de subsequência, existe $t_0 \in (0, \infty)$ tal que $t_n \to t_0$. Nosso objetivo é mostrar que $t_0 = 1$, pois se isto é verdadeiro, então

$$
\begin{aligned}
J_\infty &\leq I_\infty(t_n u_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} \left(\left|\nabla(t_n u_n)\right|^{p(x)} + V(x)|t_n u_n|^{p(x)} \right) - \mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |t_n u_n|^{q(x)} \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p^*(x)} |t_n u_n|^{p^*(x)} \\
&\leq I_\infty(u_n) + a(n) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} \left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + V(x)|u_n|^{p(x)} \right) \\
&\quad - \mu b(n) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |u_n|^{q(x)} - c(n) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p^*(x)} |u_n|^{p^*(x)} \\
&= c_\infty + o_n(1),
\end{aligned}
$$

onde

$$
a(n) = \max\{t_n^{p_-}, t_n^{p_+}\} - 1, \ b(n) = \min\{t_n^{q_-}, t_n^{q_+}\} - 1 \ \text{ e } \ c(n) = \min\left\{t_n^{p_-^*}, t_n^{p_+^*}\right\} - 1.
$$

Assim, após passagem ao limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$
J_\infty \leq c_\infty. \tag{2.33}
$$

De (2.27) e (2.33), segue-se que

$$
c_\infty = J_\infty.
$$

Na sequência mostraremos que $t_0 = 1$. De fato, se $t_0 > 1$, sem perda de generalidade podemos admitir $t_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, por (2.28),

$$
\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + V(x)|u_n|^{p(x)} \right) \geq \mu t_n^{q_- - p_+} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q(x)} + t_n^{p_-^* - p_+} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*(x)}. \tag{2.34}
$$

De (2.32) e (2.34), obtemos

$$
0 \geq \mu \left(t_n^{q_- - p_+} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q(x)} + \left(t_n^{p_-^* - p_+} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*(x)} + o_n(1).
$$

Deste modo

$$
0 \geq \mu \left(t_0^{q_- - p_+} - 1\right) L_1 + \left(t_0^{p_-^* - p_+} - 1\right) L_2,
$$

onde

$$
0 \leq L_1 = \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q(x)} \ \text{ e } \ 0 < L_2 = \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*(x)}.
$$

Porém, como $t_0 > 1$,

$$\mu\left(t_0^{q_- - p_+} - 1\right) L_1 + \left(t_0^{p_-^* - p_+} - 1\right) L_2 > 0,$$

o que é um absurdo. O caso $t_0 < 1$ pode ser estudado da mesma maneira. Assim, $t_0 = 1$.

■

Observação 2.2.13. *Na demonstração do resultado anterior podemos substituir a hipótese de* (u_n) *ser uma sequência* $(PS)_{c_\infty}$ *para* I_∞ *por* $I_\infty(u_n) \to c_\infty$ *e* $I'_\infty(u_n)u_n \to 0$.

Como uma consequência imediata do resultado acima, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.2.14. *O nível do passo da montanha* c_∞ *também satisfaz*

$$c_\infty = \inf_{\substack{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \max_{t \geq 0} I_\infty(tu).$$

O próximo corolário assegura que a solução u_∞ para (P_∞) obtida acima é uma solução ground-state. Portanto, u_∞ possui sinal bem definido.

Corolário 2.2.15. *Seja* (u_n) *uma sequência* $(PS)_{c_\infty}$ *para* I_∞ *e* $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. *Então, caso* $u \neq 0$, *temos a igualdade*

$$I_\infty(u) = J_\infty.$$

Demonstração. Como estamos assumindo $u \neq 0$, a Proposição 2.2.4 implica que $u \in \mathcal{N}_\infty$. Portanto

$$I_\infty(u) \geq J_\infty.$$

Por outro lado, pela Proposição 2.2.12,

$$\begin{aligned} J_\infty = c_\infty &= I_\infty(u_n) - \frac{1}{p_+} I'_\infty(u_n)u_n + o_n(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_+}\right)\left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + V(x)|u_n|^{p(x)}\right) \\ &\quad + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q(x)}\right)|u_n|^{q(x)} + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{p^*(x)}\right)|u_n|^{p^*(x)} + o_n(1). \end{aligned}$$

Utilizando o Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} J_\infty \geq &\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_+}\right)\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)}\right) + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q(x)}\right)|u|^{q(x)} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{p^*(x)}\right)|u|^{p^*(x)} = I_\infty(u) - \frac{1}{p_+} I'_\infty(u)u = I_\infty(u). \end{aligned}$$

As duas desigualdades acima implicam em

$$I_\infty(u) = J_\infty.$$

■

Para finalizar a demonstração do Teorema 2.2.1, observamos que

$$I_\infty(-v) = I_\infty(v) \text{ e } I'_\infty(-v) = -I'_\infty(v), \forall v \in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big),$$

assegurando que u_∞ pode ser considerada não-negativa.

2.3 Demonstração do Teorema 2.1.2

Nesta seção demonstramos que o problema (P) possui uma solução ground-state não-negativa para todo $\mu > 0$ suficientemente grande.

Observamos que no caso subcrítico (uniformemente), Fan [43] considerou uma classe de perturbações não-periódicas como no problema (P). Naquele trabalho, utilizando argumentos de regularidade válidos somente em subcriticalidade, o autor demonstrou que a solução u de um problema periódico relacionado é de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}\big(\mathbb{R}^N\big)$ e satisfaz

$$u(x) \to 0 \text{ e } \big|\nabla u(x)\big| \to 0, \text{ quando } |x| \to \infty. \tag{2.35}$$

Este comportamento da solução u no infinito foi fundamental para obtenção da solução do problema perturbado não-periódico.

Seguimos as idéias em [43]. Todavia, em vista do fato de estarmos lidando com crescimento crítico, foi necessário impor a condição adicional (H_5) ao expoente p. Esta condição permitirá que apliquemos o Método de Iteração de Moser para concluir um comportamento adequado para uma transladada da solução u_∞ obtida para (P_∞). Ressaltamos que para problemas envolvendo o operador $p(x)$-laplaciano, devido a perda de controle sobre os expoentes, sem uma hipótese adicional tal como (H_5) não é claro que o Método de Iteração de Moser seja uma boa ferramenta para obter estimativas na norma L^∞.

Recordamos que o funcional energia $I\colon W^{1,p(x)+\sigma(x)}\big(\mathbb{R}^N\big) \to \mathbb{R}$ correspondente a (P) é definido por

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\big(p(x)+\sigma(x)\big)} \Big(\big|\nabla u\big|^{p(x)+\sigma(x)} + \big(V(x) - W(x)\big)|u|^{p(x)+\sigma(x)}\Big) - \Psi(u) - \Phi(u),$$

onde

$$\Psi(u) = \mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\big(q(x)-\tau(x)\big)} |u|^{q(x)-\tau(x)} \ \text{ e } \ \Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p^*(x)} |u|^{p^*(x)},$$

Doravante, denotamos por $s(x), t(x)$ e $U(x)$ as funções

$$s(x) = p(x) + \sigma(x), \ t(x) = q(x) - \tau(x) \ \text{ e } \ U(x) = V(x) - W(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Assim, podemos reescrever o funcional I da seguinte maneira

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{s(x)} \Big(\big|\nabla u\big|^{s(x)} + U(x)|u|^{s(x)}\Big) - \mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{t(x)} |u|^{t(x)} - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p^*(x)} |u|^{p^*(x)}.$$

Mostramos simplesmente que $I \in \mathcal{C}^1\Big(W^{1,s(x)}\big(\mathbb{R}^N\big), \mathbb{R}\Big)$ com

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\big|\nabla u\big|^{s(x)-2} \nabla u \cdot \nabla v + U(x)|u|^{s(x)-2} uv\Big) - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{t(x)-2} uv - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*(x)-2} uv,$$

para quaisquer $u, v \in W^{1,s(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$, garantindo assim a possibilidade de uma abordagem variacional ao problema.

A norma que consideramos sobre $W^{1,s(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$ é

$$\|u\| = \inf\left\{\alpha > 0;\, \rho\big(\alpha^{-1}u\big) \le 1\right\},$$

onde

$$\rho(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\big|\nabla u\big|^{s(x)} + U(x)|u|^{s(x)}\Big).$$

Observamos que a partir da hipótese (H_4), podemos verificar que

$$W^{1,s(x)}\big(\mathbb{R}^N\big) \hookrightarrow W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big) \ \text{(veja [17, Lema 2.2])}.$$

Antes da demonstração do Teorema 2.1.2 propriamente dita, devemos estabelecer o resultado seguinte, que é necessário a conclusão da mesma. No que segue, denotamos por $\mathcal{N}$ a variedade de Nehari correspondente a I, isto é,

$$\mathcal{N} = \big\{u \in W^{1,s(x)}\big(\mathbb{R}^N\big) \setminus \{0\};\, I'(u)u = 0\big\}.$$

Proposição 2.3.1. *Se $v \in \mathcal{N}$ e $I(v) = c$, onde c é o nível do passo da montanha correspondente a I, então v é uma solução (ground-state) para (P).*

Demonstração. Se supomos $I'(u) \neq 0$, pela continuidade de I', existem $\delta, \lambda > 0$ tais que

$$v \in B_{3\delta}(u) \Longrightarrow \left\|I'(v)\right\| \geq \lambda.$$

Consideramos

$$0 < \epsilon < \min\left\{\frac{c}{2}, \frac{\lambda\delta}{8}\right\} \text{ e } S = B_\delta(u).$$

Então, aplicando o Lema de Deformação em [82, página 38], obtemos a existência de $\eta \in \mathcal{C}\Big([0,1] \times W^{1,s(x)}\big(\mathbb{R}^N\big), W^{1,s(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)\Big)$ verificando

(i) $\eta(1,v) = v$, se $v \notin I^{-1}\big([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\big)$;

(ii) $\eta\big(1, I^{c+\epsilon} \cap B_\delta(u)\big) \subset I^{c-\epsilon}$;

(iii) $I\big(\eta(1,v)\big) \leq I(v)$, $\forall v \in W^{1,s(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$.

Escolhemos $\alpha_0 > 0$ de modo que $w = \alpha_0 u$ satisfaça $I(w) \leq 0$ e definimos

$$\gamma_0(\alpha) = \eta(1, \alpha w),\ \alpha \in [0,1].$$

Utilizando (i) e (iii) obtemos

$$\gamma_0(0) = 0 \text{ e } I\big(\gamma_0(1)\big) \leq I(w) \leq 0.$$

Isto implica que $\gamma_0 \in \Gamma$, onde

$$\Gamma = \Big\{\gamma \in \mathcal{C}\Big([0,1], W^{1,s(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)\Big); \gamma(0) = 0 \text{ e } I\big(\gamma(1)\big) \leq 0\Big\}$$

e, pela definição de c, temos

$$c \leq \max_{\alpha\in[0,1]} I\big(\gamma_0(\alpha)\big) \leq \max_{\beta\in[0,\infty)} I\big(\eta(1,\beta u)\big). \tag{2.36}$$

Por outro lado, como $I'(u)u = 0$, segue-se que

$$\max_{\beta\in[0,\infty)} I(\beta u) = I(u) = c.$$

De (ii) e (iii), concluímos que

$$I\big(\eta(1,\beta u)\big) < c - \epsilon_1,\ \forall \beta \in [0,\infty),$$

para algum $\epsilon_1 > 0$, uma contradição com (2.36). Logo, $I'(u) = 0$. ■

Demonstração do Teorema 2.1.2: Da hipótese (H_6), temos $s_+ < t_-$ e os mesmos tipos de argumentos utilizados na proposição 2.2.2 mostram que o funcional I verifica a geometria do passo da montanha. Consequentemente, do Teorema 1.3.6, existe $(u_n) \subset W^{1,s(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$ satisfazendo

$$I(u_n) \to c \ \text{ e } \ I'(u_n) \to 0.$$

Pelos mesmos raciocínios explorados na demonstração da Proposição 2.2.4 e Corolário 2.2.6, existe $\tilde{\mu} > 0$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } W^{1,s(x)}_{loc}\big(\mathbb{R}^N\big), \text{ se } \mu \geq \tilde{\mu}, \tag{2.37}$$

onde $u \in W^{1,s(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$ é o limite fraco de (u_n) e, portanto,

$$u_n \to u \text{ em } W^{1,p(x)}_{loc}\big(\mathbb{R}^N\big), \text{ se } \mu \geq \tilde{\mu}. \tag{2.38}$$

O limite (2.37) acarreta em

$$I'(u) = 0.$$

Se $u \neq 0$, utilizando as mesmas idéias da seção precedente, concluímos que $I(u) = c$, mostrando ser u uma solução ground-state para (P). Além disso, u pode ser assumida não-negativa. Agora, se $u = 0$, como

$$I_\infty(u_n) - I(u_n) = (I_\infty)_{|_{B_R(z)}}(u_n) - I_{|_{B_R(z)}}(u_n) + \int_{B^c_R(z)} \frac{W(x)}{p(x)}|u_n|^{p(x)}$$

e

$$I'_\infty(u_n)u_n - I'(u_n)u_n = (I_\infty)'_{|_{B_R(z)}}(u_n)u_n + I'_{|_{B_R(z)}}(u_n)u_n + \int_{B^c_R(z)} W(x)|u_n|^{p(x)},$$

onde $R > 0$ é dado na hipótese (H_4), de (2.37), (2.38) e (H_8), obtemos

$$I_\infty(u_n) - I(u_n) = o_n(1) \ \text{ e } \ I'_\infty(u_n)u_n - I'(u_n)u_n = o_n(1),$$

ou seja,

$$I_\infty(u_n) \to c \text{ e } I'_\infty(u_n)u_n \to 0.$$

Pelos mesmos argumentos contidos na demonstração da Proposição 2.2.12 produzimos uma sequência (t_n) em $\mathbb{R}$ satisfazendo

$$t_n u_n \in \mathcal{N}_\infty, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ e } t_n \to 1.$$

Como I'_∞ é limitado, concluímos que I_∞ é uniformemente contínuo em conjuntos limitados. Portanto

$$I_\infty(t_n u_n) - I_\infty(u_n) = o_n(1),$$

implicando que

$$c = I_\infty(u_n) + o_n(1) = I_\infty(t_n u_n) + o_n(1) \geq c_\infty + o_n(1).$$

Após passagem ao limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$c \geq c_\infty. \tag{2.39}$$

Por outro lado, fixando $\mu \geq \mu^* = \max\{\mu_\infty, \tilde{\mu}\}$, sabemos que o funcional I_∞ possui uma solução ground-state não-negativa $u_\infty = w \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$I_\infty(w) = c_\infty \text{ e } I'_\infty(w) = 0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam

$$x_n = (n, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^N \text{ e } w_n(x) = w(x + x_n), \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Podemos deduzir utilizando o Método de Iteração de Moser, a existência de $C > 0$, independente de n, tal que

$$|w_n|_{L^\infty(B_{R_2}(z))} \leq C|w|_{L^{m^*}(B_{R_1}(z+x_n))}, \text{ para } R < R_2 < R_1,$$

onde $z \in \mathbb{R}^N$ é dado na hipótese (H_5) (veja apêndice B). Como $w \in L^{p^*(x)}(\mathbb{R}^N)$ e $p^*(x) = m^*$ em $B_{R_1}(z + x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$|w|_{L^{m^*}(B_{R_1}(z+x_n))} \to 0, \ n \to \infty.$$

Por conseguinte

$$|w_n|_{L^\infty(B_{R_2}(z))} \to 0, \; n \to \infty.$$

Os limites acima implicam que

$$|\nabla w_n|_{L^\infty(B_{R_2}(z))} \to 0, \;\; \text{(veja [2, 3, 42])}.$$

Assim, fixamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$w_{n_0}(x), \left|\nabla w_{n_0}(x)\right| \leq 1 \text{ em q.t.p. } x \in B_R(z).$$

Recordando que $V - W \leq V$ e utilizando as desigualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned}
I'(w_{n_0})w_{n_0} &\leq \int_{B_R(z)} \left(\left|\nabla w_{n_0}\right|^{s(x)} + V(x)w_{n_0}^{s(x)} - \mu w_{n_0}^{t(x)} - w_{n_0}^{p^*(x)}\right) \\
&\quad + \int_{B_R^c(z)} \left(\left|\nabla w_{n_0}\right|^{p(x)} + V(x)w_{n_0}^{p(x)} - \mu w_{n_0}^{q(x)} - w_{n_0}^{p^*(x)}\right) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla w_{n_0}\right|^{p(x)} + V(x)w_{n_0}^{p(x)} - \mu w_{n_0}^{q(x)} - w_{n_0}^{p^*(x)}\right) \\
&= I'_\infty(w_{n_0})w_{n_0} = 0,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade acima é devida a $\mathbb{Z}^N$-periodicidade dos expoentes p e q e do potencial V em conjunto com a invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação. Desta maneira, existe $\tilde{t} \in (0, 1]$ tal que

$$I(\tilde{t}w_{n_0}) = \max_{t \geq 0} I(tw_{n_0}) \;\text{ e }\; I(\tilde{t}w_{n_0}) \geq c.$$

De fato, $\tilde{t} = 1$, pois $\tilde{t} < 1$ implica

$$c \leq I(\tilde{t}w_{n_0}) \leq I_\infty(\tilde{t}w_{n_0}) < I_\infty(w_{n_0}) = c_\infty,$$

o que é uma contradição com (2.39). Mas então $I'(w_{n_0})w_{n_0} = 0$ e

$$c \leq I(w_{n_0}) \leq I_\infty(w_{n_0}) = c_\infty. \tag{2.40}$$

Combinando (2.39) e (2.40), obtemos

$$c = I(w_{n_0}).$$

Como $w_{n_0} \in \mathcal{N}$, pela Proposição 2.3.1 segue a demonstração do Teorema 2.1.2.

Capítulo 3

Equações do tipo $p(x)$-laplaciano envolvendo uma não-linearidade côncava-convexa com crescimento crítico em $\mathbb{R}^N$

Conteúdo

3.1 Introdução 75

3.2 Existência e multiplicidade de soluções não-negativas 77

3.2.1 Resultados preliminares 77

3.2.2 Existência de uma solução com energia positiva 84

3.2.3 Existência de uma solução com energia negativa 87

3.2.4 Demonstração do Teorema 3.1.1 89

3.3 Existência e multiplicidade de soluções com energia negativa 89

3.3.1 Resultados preliminares 90

3.3.2 O funcional truncado 92

3.3.3 Demonstração do 3.1.2 97

3.1 Introdução

Neste capítulo consideramos a existência e multiplicidade de solução para a seguinte classe de problemas:

$$(P_{\lambda,\mu}) \quad \begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + V(x)|u|^{p(x)-2}u = \lambda h|u|^{r(x)-2}u + \mu|u|^{q(x)-2}u + |u|^{p^*(x)-2}u, \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, \end{cases}$$

onde $\lambda, \mu > 0$ são parâmetros, $p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função lipschitziana, $V, q, r\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e h é uma função não-negativa em $L^{\Theta(x)}(\mathbb{R}^N)$ com

$$\Theta(x) = \frac{Np(x)}{Np(x) - r(x)\big(N - p(x)\big)}.$$

Além disso, assumimos o seguinte conjunto de hipóteses:

(H_1) As funções p, q e V são $\mathbb{Z}^N$-periódicas, isto é,

$$p(x+y) = p(x),\ q(x+y) = q(x),\ V(x+y) = V(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^N, y \in \mathbb{Z}^N;$$

(H_2) $1 < p_- \le p_+ < N$;

(H_3) $1 < r_- \le r_+ < p_- \le p_+ < q_-,\ q \ll p^*$;

(H_4) Existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \ge V_0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

Observamos que o problema $(P_{\lambda,\mu})$ está relacionado ao problema (P_∞) do capítulo 2. De fato, perturbamos a equação em (P_∞) por um termo $(p_- - 1)$-sublinear (côncavo) para obter $(P_{\lambda,\mu})$. Assim, além das dificuldades devidas ao domínio não-compacto e a presença do expoente crítico de Sobolev, o problema $(P_{\lambda,\mu})$ também possui os efeitos combinados de um termo côncavo e de um termo convexo.

Relativamente ao problema $(P_{\lambda,\mu})$, nossa contribuição foi demonstrar a existência e multiplicidade de soluções para o mesmo. Em primeiro lugar, demonstramos a existência de duas soluções não-negativas com energias opostas. Em segundo lugar, sem a exigência de sinal, demonstramos a existência de uma infinidade de soluções não-triviais com energias negativas. Em cada um dos casos, uma parte crucial das demonstrações é que para valores suficientemente grandes do parâmetro $\mu > 0$, o funcional energia considerado satisfaz a condição (PS) abaixo de um determinado nível, função do parâmetro $\lambda > 0$.

Na Seção 3.2, pudemos utilizar o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti & Rabinowitz 1.3.7 e Minimização Local obtendo duas soluções não-negativas para $\left(P_{\lambda,\mu}\right)$ cujas energias são opostas. Tais soluções surgem como pontos críticos de

$$\begin{aligned}\phi_{\lambda,\mu}(u) = \phi(u) = &\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)}\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)}\right)\\ &-\lambda\int_{\mathbb{R}^N} \frac{h}{r(x)}(u^+)^{r(x)} - \mu\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)}(u^+)^{q(x)} - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p^*(x)}(u^+)^{p^*(x)},\end{aligned}$$

onde $u \in W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Adaptamos idéias em [4] para realizar este estudo. Novamente, devido a presença dos expoentes variáveis, tivemos de contornar o fato de que a constante ótima da imersão de Sobolev $W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^{p^*}\left(\mathbb{R}^N\right)$ não é necessariamente realizada. O principal teorema é o seguinte:

Teorema 3.1.1 ([14]). *Existe $\mu^* > 0$ com a seguinte propriedade: para cada $\mu \geq \mu^*$, existe $\lambda_\mu > 0$ tal que o problema $\left(P_{\lambda,\mu}\right)$ possui duas soluções não-negativas $\Psi_1, \Psi_2 \in W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ com energias opostas, para todo $\lambda \in (0, \lambda_\mu)$.*

Na Seção 3.3 adaptamos ao contexto dos expoentes variáveis, a técnica introduzida em [51] que consiste em considerar um truncamento do funcional energia correspondente a $\left(P_{\lambda,\mu}\right)$ cujos pontos críticos são soluções para $\left(P_{\lambda,\mu}\right)$. Observando a simetria do funcional energia correspondente a $\left(P_{\lambda,\mu}\right)$, pudemos utilizar o gênero de Krasnoselski obtendo uma infinidade de soluções com energias negativas. O principal teorema é o seguinte:

Teorema 3.1.2 ([14]). *Existe $\mu^* > 0$ com a seguinte propriedade: para cada $\mu \geq \mu^*$, existe $\lambda_\mu > 0$ tal que o problema $\left(P_{\lambda,\mu}\right)$ possui uma infinidade de soluções com energias negativas, para todo $\lambda \in (0, \lambda_\mu)$.*

Neste capítulo, a norma considerada sobre $W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ é definida por

$$\|u\| = \inf\left\{\lambda > 0;\, \rho\left(\lambda^{-1}u\right) \leq 1\right\},$$

onde

$$\rho(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla u\right|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)}\right).$$

3.2 Existência e multiplicidade de soluções não-negativas

Nesta seção demonstramos o Teorema 3.1.1. Como estamos interessados em soluções não-negativas para $\left(P_{\lambda,\mu}\right)$, buscamos tais soluções como pontos críticos do funcional energia $\phi_{\lambda,\mu}\colon W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned}\phi_{\lambda,\mu}(u) := \phi(u) = &\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} \left(\left|\nabla u\right|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)}\right) \\ &- \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h}{r(x)}(u^+)^{r(x)} - \mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)}(u^+)^{q(x)} - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p^*(x)}(u^+)^{p^*(x)}.\end{aligned}$$

Podemos verificar que $\phi \in \mathcal{C}^1\left(W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right), \mathbb{R}\right)$ e

$$\begin{aligned}\phi'(u)v = &\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla v + V(x)|u|^{p(x)-2}uv\right) \\ &- \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(u^+)^{r(x)-1}v - \mu \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{q(x)-1}v - \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p^*(x)-1}v,\end{aligned}$$

para todos $u, v \in W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$, mostrando ser possível uma abordagem variacional ao problema.

Aplicamos o Teorema do Passo da Montanha 1.3.7 para obter uma primeira solução $\Psi_1 \in W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que $\phi(\Psi_1) > 0$ e Minimização Local de ϕ na vizinhança da 0 para obter uma segunda solução $\Psi_2 \in W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que $\phi(\Psi_2) < 0$. Além disso, para obtenção desta segunda solução, o Princípio Variacional de Ekeland 1.4.2 desempenha um papel fundamental.

3.2.1 Resultados preliminares

Iniciamos com uma importante propriedade das sequências $(PS)_d$ para ϕ.

Proposição 3.2.1. *Seja* (v_n) *uma sequência* $(PS)_d$ *para* ϕ. *Então,* (v_n) *é limitada em* $W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$. *Além disso,* (v_n^+) *é uma sequência* $(PS)_d$ *para* ϕ.

Demonstração. Se existe somente um número finito de termos v_n tais que $\rho(v_n) > 1$, então, do Corolário 1.1.17, (v_n) é limitada e a demonstração está terminada. Admita então a existência de uma infinidade de termos v_n tais que $\rho(v_n) > 1$. Como (v_n) é uma sequência $(PS)_d$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi(v_n) - \frac{1}{q_-}\phi'(v_n)v_n \leq d + 1 + \|v_n\|, \ n \geq n_0.$$

Por outro lado, para os termos tais que $\rho(v_n) > 1$, da Proposição 1.1.16 e da desigualdade de Hölder 1.1.6 obtemos

$$\begin{aligned}\phi(v_n) - \frac{1}{q_-}\phi'(v_n)v_n &\geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)\|v_n\|^{p_-} - \lambda\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{q_-}\right)\int_{\mathbb{R}^N} h|v_n|^{r(x)} \\ &\geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)\|v_n\|^{p_-} - \lambda\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{q_-}\right)2|h|_{\Theta(x)}\left||v_n|^{r(x)}\right|_{\frac{p^*(x)}{r(x)}}.\end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 1.1.5 e a imersão contínua de Sobolev 1.1.22, concluímos que

$$\begin{aligned}&\phi(v_n) - \frac{1}{q_-}\phi'(v_n)v_n \\ &\geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)\|v_n\|^{p_-} - \lambda\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{q_-}\right)2|h|_{\Theta(x)}\left(|v_n|^{r_-}_{p^*(x)} + |v_n|^{r_+}_{p^*(x)}\right) \\ &\geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)\|v_n\|^{p_-} - \lambda\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{q_-}\right)\left(C_1\|v_n\|^{r_-} + C_2\|v_n\|^{r_+}\right),\end{aligned}$$

onde as constantes $C_1, C_2 > 0$ independem de n. Das considerações acima, para os termos tais que $\rho(v_n) > 1$, deduzimos

$$d + 1 + \|v_n\| \geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q_-}\right)\|v_n\|^{p_-} - \lambda\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{q_-}\right)\left(C_1\|v_n\|^{r_-} + C_2\|v_n\|^{r_+}\right),$$

se $n \geq n_0$, o que garante que (v_n) também é limitada neste caso.

Agora demonstraremos que (v_n^+) é uma sequência $(PS)_d$ para ϕ. Observe que a limitação de (v_n^-) combinada com o limite $\|\phi'(v_n)\| \to 0$ mostra que

$$\phi'(v_n)v_n^- \to 0,$$

implicando que

$$v_n^- \to 0 \text{ em } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N).$$

Agora, por um cálculo direto obtemos

$$\phi(v_n) - \phi(v_n^+) = o_n(1) \ \text{ e } \ \phi'(v_n) - \phi'(v_n^+) = o_n(1),$$

demonstrando que (v_n^+) é uma sequência $(PS)_d$ para ϕ. ∎

Em vista da proposição precedente, doravante admitiremos que todas as sequências $(PS)_d$ para ϕ são compostas por funções não-negativas. Além disso, como $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, se (v_n) é uma sequência $(PS)_d$ para ϕ, suporemos, possivelmente passando a uma subsequência, que existe $0 \leq v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \text{ e } v_n(x) \to v(x) \text{ em q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

A demonstração da próxima proposição segue os mesmos argumentos utilizados na Proposição 2.2.4, fazendo uso de uma extensão do Princípio de Concentração de Compacidade de Lions (veja [49]) ao contexto dos expoentes variáveis.

Proposição 3.2.2. *Seja (v_n) uma sequência $(PS)_d$ para ϕ com $v_n \rightharpoonup v$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$\phi'(v) = 0.$$

Por conseguinte, se $v \neq 0$, então v é uma solução para $(P_{\lambda,\mu})$.

Devido a falta de compacidade das imersões de Sobolev

$$W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{h(x)}(\mathbb{R}^N),$$

onde $p(x) \leq h(x) \leq p^*(x)$ em q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$, não podemos esperar que o funcional ϕ satisfaça a condição $(PS)_d$, para todo $d \in \mathbb{R}$. Entretanto, com a estimativa seguinte iniciamos a preparação para demonstrar adiante que a mesma é satisfeita abaixo de um determinado nível, o qual é uma função do parâmetro $\lambda > 0$.

Lema 3.2.3. *Seja (v_n) uma sequência $(PS)_d$ para ϕ com $v_n \rightharpoonup v$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Então, existe uma constante $M > 0$, independente λ e μ, tal que*

$$\phi(v) \geq -M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right).$$

Demonstração. Do Lema 3.2.2, $\phi'(v)v = 0$ ou, equivalentemente ,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p(x)} + V(x)v^{p(x)} = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)v^{r(x)} + \mu \int_{\mathbb{R}^N} v^{q(x)} + \int_{\mathbb{R}^N} v^{p^*(x)}.$$

Portanto

$$\phi(v) \geq \lambda\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right)\int_{\mathbb{R}^N} h(x)v^{r(x)} + \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{p^*_-}\right)\int_{\mathbb{R}^N} v^{p^*(x)}$$

e, após aplicarmos a desigualdade de Young, obtemos

$$\phi(v) \geq \epsilon\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right)\int_{\mathbb{R}^N} v^{p^*(x)} + \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{r_-}\right)\int_{\mathbb{R}^N} C_{\epsilon,x}\lambda^{\Theta(x)}h^{\Theta(x)} + \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{p^*_-}\right)\int_{\mathbb{R}^N} v^{p^*(x)},$$

para todo $\epsilon > 0$, onde

$$C_{\epsilon,x} = \frac{1}{\Theta(x)\left(\frac{\epsilon p^*(x)}{r(x)}\right)^{\frac{r(x)\Theta(x)}{p^*(x)}}}.$$

Desta maneira, fixando

$$0 < \epsilon < \min\left\{1, \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{p_+}\right)^{-1}\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{p^*_-}\right)\right\},$$

segue-se que

$$\phi(v) \geq -M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right),$$

sendo

$$M = \frac{1}{\Theta_- \epsilon^{\Theta_+ - 1}}\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{p_+}\right)\int_{\mathbb{R}^N} h^{\Theta(x)}.$$

■

O próximo resultado estabelece uma importante conexão entre os funcionais ϕ e I_∞, trazendo à luz um importante comportamento das sequências $(PS)_d$ para ϕ.

Lema 3.2.4. *Seja (v_n) uma sequência limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ com $v_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $v_n(x) \to v(x)$ e $\nabla v_n(x) \to \nabla v(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Então*

(a) $\phi(v_n) - I_\infty(v_n - v) - \phi(v) = o_n(1)$;

(b) $\phi'(v_n) - I'_\infty(v_n - v) - \phi'(v) = o_n(1)$.

Portanto, se (v_n) é uma sequência $(PS)_d$ para ϕ com limite fraco $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, definindo $w_n = v_n - v$, (w_n) é uma sequência $(PS)_{d-\phi(v)}$ para I_∞.

Demonstração. Das definições de ϕ e I_∞, temos

$$\begin{aligned}
&\phi(v_n) - I_\infty(v_n - v) - \phi(v)\\
&\quad= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{p(x)}\left(\left|\nabla v_n\right|^{p(x)} - \left|\nabla v_n - \nabla v\right|^{p(x)} - \left|\nabla v\right|^{p(x)}\right)\\
&\qquad+ \int_{\mathbb{R}^N}\tfrac{V(x)}{p(x)}\left(v_n^{p(x)} - |v_n - v|^{p(x)} - v^{p(x)}\right) - \mu\int_{\mathbb{R}^N}\tfrac{1}{q(x)}\left(v_n^{q(x)} - |v_n - v|^{q(x)} - v^{q(x)}\right)\\
&\qquad- \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{p^*(x)}\left(v_n^{p^*(x)} - |v_n - v|^{p^*(x)} - v^{p^*(x)}\right) - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\frac{h(x)}{r(x)}\left(v_n^{r(x)} - v^{r(x)}\right).
\end{aligned}$$

Pelas Proposições 1.1.12 e 1.1.14, observamos que o lado direito da última igualdade é $o_n(1)$ e, portanto,

$$\phi(v_n) - I_\infty(v_n - v) - \phi(v) = o_n(1),$$

demonstrando (a).

Para demonstrar (b), fixamos $\varphi \in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$ com $\|\varphi\| = 1$. Utilizando a desigualdade de Hölder 1.1.6 em conjunto com as imersões contínuas de Sobolev 1.1.22, segue-se que existe uma constante positiva C, independente de n, tal que

$$\Big| [\phi'(v_n) - I'_\infty(v_n - v) - \phi'(v)]\, \varphi \Big| \le C\big(A_1(n) + A_2(n) + A_3(n) + A_4(n) + A_5(n)\big)$$

onde

$$\begin{aligned}
A_1(n) &= \Big| |\nabla v_n|^{p(x)-2}\nabla v_n - |\nabla v_n - \nabla v|^{p(x)-2}(\nabla v_n - \nabla v) - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v \Big|_{p'(x)},\\
A_2(n) &= \Big|\, v_n^{p(x)-2} v_n \,-\, |v_n - v|^{p(x)-2}(v_n - v) \,-\, v^{p(x)-2} v \,\Big|_{p'(x)},\\
A_3(n) &= \mu \Big|\, v_n^{q(x)-2} v_n - |v_n - v|^{q(x)-2}(v_n - v) - v^{q(x)-2} v \,\Big|_{q'(x)},\\
A_4(n) &= \Big| v_n^{p^*(x)-2} v_n - |v_n - v|^{p^*(x)-2}(v_n - v) - v^{p^*(x)-2} v \Big|_{p^{*\prime}(x)}
\end{aligned}$$

e

$$A_5(n) = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \big| \big(v_n^{r(x)-1} - v^{r(x)-1}\big)\, \varphi \big|.$$

Da Proposição 1.2.1, $A_i(n) = o_n(1)$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Com relação a $A_5(n)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) \big| \big(v_n^{r(x)-1} - v^{r(x)-1}\big)\, \varphi \big| = \int_{\mathbb{R}^N} h^{\frac{1}{r'(x)}} \big| v_n^{r(x)-1} - v^{r(x)-1} \big| h^{\frac{1}{r(x)}} |\varphi|.$$

Como

$$h^{\frac{1}{r'(x)}} \big| v_n^{r(x)-1} - v^{r(x)-1} \big| \in L^{r'(x)}\big(\mathbb{R}^N\big) \text{ e } h^{\frac{1}{r(x)}} |\varphi| \in L^{r(x)}\big(\mathbb{R}^N\big),$$

pela desigualdade de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) \big| \big(v_n^{r(x)-1} - v^{r(x)-1}\big)\, \varphi \big| \le C \Big| h^{\frac{1}{r'(x)}} \big| v_n^{r(x)-1} - v^{r(x)-1} \big| \Big|_{r'(x)}.$$

Agora, nosso objetivo é mostrar que

$$\Big| h^{\frac{1}{r'(x)}} \big| v_n^{r(x)-1} - v^{r(x)-1} \big| \Big|_{r'(x)} \to 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) \big| v_n^{r(x)-1} - v^{r(x)-1} \big|^{r'(x)} \to 0. \tag{3.1}$$

Para este fim, definimos

$$V_n(x) = \left|v_n^{r(x)-1} - v^{r(x)-1}\right|^{r'(x)}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, $V_n(x) \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e (V_n) é limitada em $L^{\frac{p^*(x)}{r(x)}}(\mathbb{R}^N)$. Deste modo, pela Proposição 1.1.14

$$V_n \rightharpoonup 0 \text{ em } L^{\frac{p^*(x)}{r(x)}}(\mathbb{R}^N).$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)V_n(x) \to 0,$$

mostrando (3.1). Consequentemente

$$\left\|\phi'(v_n) - I'_\infty(v_n - v) - \phi'(v)\right\| = o_n(1),$$

ou ainda,

$$\phi'(v_n) - I'_\infty(v_n - v) - \phi'(v) = o_n(1),$$

finalizando a demonstração. ■

Uma condição Palais-Smale local

Mostramos agora que o funcional ϕ satisfaz a condição (PS) abaixo de um determinado nível. Esta é uma condição necessária para demonstrarmos o Teorema 3.1.1.

Proposição 3.2.5. *Suponha* $\mu \geq \mu_\infty$. *Então,* ϕ *satisfaz a condição* $(PS)_d$ *para*

$$d < c_\infty - M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right).$$

Demonstração. Seja (v_n) uma sequência $(PS)_d$ para ϕ com d como acima. Sabemos que existe $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \text{ e } v_n(x) \to v(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Definindo $w_n = v_n - v$, pelo Lema 3.2.4, concluímos que (w_n) é uma sequência $(PS)_{d-\phi(v)}$ para I_∞. O objetivo é mostrar que, passando a uma subsequência se necessário, $w_n \to 0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Para isto, observamos que pela hipótese sobre d e Lema 3.2.3, o nível $d - \phi(v)$ satisfaz

$$d - \phi(v) < c_\infty.$$

Assim, como $\mu \geq \mu_\infty$, de 2.4 obtemos

$$d - \phi(\nu) < \min\left\{\theta\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{1}{\theta}}, \frac{\nu}{K^{p_+}}\right\}.$$

Pela Proposição 2.2.8, a menos de subsequência, ou

(a) $w_n \to 0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, ou

(b) Existem $R > 0$, $\eta > 0$ e $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ (que podemos supor em $\mathbb{Z}^N$) tais que

$$\limsup_n \int_{B_R(y_n)} |w_n|^{p(x)} \geq \eta.$$

Devemos mostrar então que o item (a) é válido. Argumentando por contradição, se (b) é válido, definimos

$$\widehat{w}_n(x) = w_n(x + y_n),\ \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Combinando a $\mathbb{Z}^N$-periodicidade dos expoentes p e q e do potencial V com a invariância do $\mathbb{R}^N$ por translações, por um cálculo direto

$$I_\infty(\widehat{w}_n) = I_\infty(w_n)\ \text{ e }\ I'_\infty(\widehat{w}_n) = o_n(1).$$

Portanto, $(\widehat{w}_n)$ também é uma sequência $(PS)_{d-\phi(\nu)}$ para I_∞. Seja $\widehat{w} \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ o limite fraco de $\widehat{w}_n$. Da validade de (b) e do fato da imersão de Sobolev

$$W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p(x)}(B_R(0))$$

ser compacta, segue-se que $\widehat{w} \neq 0$. Pela Proposição 2.2.4 obtemos $I'_\infty(\widehat{w}) = 0$ e, da definição do nível c_∞ em conjunto com o Lema de Fatou, concluímos que

$$\begin{aligned}
c_\infty \leq I_\infty(\widehat{w}) &= I_\infty(\widehat{w}) - \frac{1}{p_+} I'_\infty(\widehat{w})\widehat{w} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_+}\right)\left(\left|\nabla \widehat{w}\right|^{p(x)} + V(x)\,|\widehat{w}|^{p(x)}\right) \\
&\quad + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q(x)}\right)|\widehat{w}|^{q(x)} + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{p^*(x)}\right)|\widehat{w}|^{p^*(x)} \\
&\leq \liminf_n \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_+}\right)\left(\left|\nabla \widehat{w}_n\right|^{p(x)} + V(x)\,|\widehat{w}_n|^{p(x)}\right)\right. \\
&\quad \left. + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{q(x)}\right)|\widehat{w}_n|^{q(x)} + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{p^*(x)}\right)|\widehat{w}_n|^{p^*(x)}\right) \\
&= \liminf_n \left(I_\infty(\widehat{w}_n) - \frac{1}{p_+} I'_\infty(\widehat{w}_n)\widehat{w}_n\right) = d - \phi(\nu) < c_\infty,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo (b) não é válido, ou seja, (a) é válido como queríamos. ■

3.2.2 Existência de uma solução com energia positiva

Nesta subseção demonstramos a existência de uma solução não-negativa e com energia positiva para $(P_{\lambda,\mu})$ via Teorema do Passo da Montanha. O primeiro resultado estabelece que ϕ verifica a geometria do passo da montanha.

Lema 3.2.6. *Para cada $\mu > 0$, existe $\lambda_1 = \lambda_1(\mu) > 0$ tal que ϕ satisfaz a geometria do passo da montanha, para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$.*

Demonstração. Seja $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Primeiramente, observamos que

$$\phi(u) \geq \frac{1}{p_+}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\left|\nabla u\right|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)}\Big) - \frac{\lambda}{r_-}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^{r(x)} - \frac{\mu}{q_-}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q(x)} - \frac{1}{p_-^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*(x)}. \tag{3.2}$$

Das imersões contínuas de Sobolev, existem $C_1, C_2 > 0$, independentes de u, tais que

$$|u|_{q(x)} \leq C_1\|u\| \ \text{ e } \ |u|_{p^*(x)} \leq C_2\|u\|.$$

Assim, se

$$\|u\| < m = \min\left\{1, \frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_2}\right\},$$

então

$$\|u\| < 1, |u|_{q(x)} < 1, |u|_{p^*(x)} < 1$$

e utilizando a desigualdade de Hölder 1.1.6 e as Proposições 1.1.5, 1.1.8 e 1.1.16, de 3.2 obtemos

$$\phi(u) \geq \frac{1}{p_+}\|u\|^{p_+} - \lambda C_3\|u\|^{r_-} - \mu C_4\|u\|^{q_-} - C_5\|u\|^{p_-^*},$$

para constantes $C_3, C_4, C_5 > 0$ independentes de u. Como $p_+ < q_- \leq p_-^*$, podemos escolher $R = R(\mu) \in (0, m)$ tal que

$$\frac{1}{p_+}R^{p_+} - \mu C_4 R^{q_-} - C_5 R^{p_-^*} \geq \frac{1}{2p_+}R^{p_+}.$$

Portanto, se $\|u\| = R$, então

$$\phi(u) \geq \frac{1}{2p_+}R^{p_+} - \lambda C_3 R^{r_-}.$$

Escolha agora $\lambda_1 = \lambda_1(\mu) > 0$ satisfazendo

$$\frac{1}{2p_+}R^{p_+} - \lambda_1 C_3 R^{r_-} = \beta > 0.$$

Consequentemente, se $\lambda \in (0, \lambda_1)$, para $\|u\| = R$ concluímos que

$$\phi(u) \geq \beta > \phi(0).$$

Por outro lado, fixado $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ com $v^+ \neq 0$, para $t > 1$ temos

$$\phi(tv) \leq t^{p_+} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} \left(\left|\nabla v\right|^{p(x)} + V(x)|v|^{p(x)} \right) - t^{q_-} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} \left(v^+\right)^{q(x)},$$

implicando que

$$\lim_{t \to \infty} \phi(tv) = -\infty.$$

Assim, considerando $u_1 = t_1 v$ com $t_1 > \frac{R}{\|v\|}$ e $\phi(t_1 v) \leq 0$, para $\|u\| = R$ obtemos

$$\phi(u) \geq \max\left\{\phi(0), \phi(u_1)\right\},$$

mostrando a geometria do passo da montanha. ■

O próximo resultado é fundamental para a demonstração do Teorema 3.1.1, pois exibe um controle sobre λ que garante uma localização adequada do nível do passo da montanha correspondente a ϕ.

Lema 3.2.7. *Para cada $\mu \geq \mu_\infty$, existe $0 < \lambda_2 = \lambda_2(\mu) \leq \lambda_1$, onde λ_1 é dado no Lema 3.2.6, tal que o nível do passo da montanha c de ϕ satisfaz*

$$0 < c < c_\infty - M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right),$$

para todo $\lambda \in (0, \lambda_2)$.

Demonstração. Fixe $\mu \geq \mu_\infty$. Pelo Teorema 2.2.1 sabemos que existe $\Psi \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ com $\Psi \geq 0$ verificando

$$I_\infty(\Psi) = c_\infty \quad \text{e} \quad I'_\infty(\Psi) = 0.$$

No que segue, fixamos $\delta_1 > 0$ tal que

$$c_\infty - M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right) > \frac{c_\infty}{2}, \ \forall \lambda \in (0, \delta_1).$$

Como para $t > 0$ suficientemente pequeno é válido que

$$\phi(t\Psi) \leq t^{p_-} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} \left(\left|\nabla \Psi\right|^{p(x)} + V(x)|\Psi|^{p(x)} \right),$$

existe $t_0 > 0$, independente de λ, tal que

$$\phi(t\Psi) \leq \frac{c_\infty}{2}, \ \forall t \in [0, t_0].$$

Deste modo, para cada $\lambda \in (0, \delta_1)$,

$$\phi(t\Psi) \leq \frac{c_\infty}{2} < c_\infty - M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right), \ \forall t \in [0, t_0].$$

Por outro lado, utilizando o fato de que $\Psi \geq 0$, obtemos

$$\phi(t\Psi) = I_\infty(t\Psi) - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x)}{r(x)} (t\Psi)^{r(x)}, \ \text{para } t \geq 0,$$

implicando que

$$\phi(t\Psi) \leq c_\infty - \lambda \min\{t^{r_-}, t^{r_+}\} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x)}{r(x)} \Psi^{r(x)}, \ \text{para } t \geq 0.$$

Em particular, para $t \geq t_0$,

$$\phi(t\Psi) \leq c_\infty - \lambda \min\{t_0^{r_-}, t_0^{r_+}\} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x)}{r(x)} \Psi^{r(x)}.$$

Fixando $\delta_2 > 0$ tal que

$$\lambda^{\Theta_- - 1} + \lambda^{\Theta_+ - 1} < \frac{\min\{t_0^{r_-}, t_0^{r_+}\}}{M} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x)}{r(x)} \Psi^{r(x)}, \ \forall \lambda \in (0, \delta_2),$$

temos para $\lambda \in (0, \delta_2)$

$$\phi(t\Psi) < c_\infty - M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right), \ \forall t \geq t_0.$$

Escolhendo $\lambda_2 = \min\{\lambda_1, \delta_1, \delta_2\}$, obtemos das estimativas anteriores

$$\sup_{t \geq 0} \phi(t\Psi) < c_\infty - M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right), \ \forall \lambda \in (0, \lambda_2).$$

Sendo

$$c \leq \sup_{t \geq 0} \phi(t\Psi),$$

segue-se que

$$c < c_\infty - M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right),$$

para $\lambda \in (0, \lambda_2)$, finalizando a demonstração do Lema. ■

Agora, já estamos em condições de demonstrar a existência de uma solução não-negativa com energia positiva para $\left(P_{\lambda,\mu}\right)$.

Teorema 3.2.8. *Para cada $\mu \geq \mu_\infty$, existe $\lambda^* = \lambda^*(\mu) > 0$ tal que o problema $\left(P_{\lambda,\mu}\right)$ possui uma solução não-negativa com energia positiva, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$.*

Demonstração. Como $\mu \geq \mu_\infty$, da Proposição 3.2.5, ϕ é $(PS)_d$ para

$$d < c_\infty - M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right).$$

No que segue, fixamos $\lambda^* = \lambda_2$, onde λ_2 foi obtido no Lema 3.2.7. Logo, se $\lambda \in (0, \lambda^*)$, então, do Lema 3.2.6, ϕ satisfaz a geometria do passo da montanha e, do Lema 3.2.7, o nível do passo da montanha c correspondente verifica

$$0 < c < c_\infty - M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right).$$

Portanto, ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$ e, portanto, existe $\Psi_1 \in W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que

$$\phi(\Psi_1) = c > 0 \ \text{ e } \ \phi'(\Psi_1) = 0,$$

demonstrando que Ψ_1 é uma solução não-negativa para $\left(P_{\lambda,\mu}\right)$ com energia positiva. ■

3.2.3 Existência de uma solução com energia negativa

Nesta subseção demonstramos a existência de uma solução não-negativa e com energia negativa para $\left(P_{\lambda,\mu}\right)$ utilizando Minimização Local.

Lema 3.2.9. *ϕ é limitado inferiormente em $\overline{B_R(0)}$, onde $R > 0$ é definido no Lema 3.2.6. Além disso,*

$$J = \inf_{\overline{B_R(0)}} \phi < 0.$$

Demonstração. Seja $u \in \overline{B_R(0)}$. Então $\|u\| < 1$ e, argumentando como na demonstração do Lema 3.2.6, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\phi(u)\right| &\leq \frac{1}{p_-}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)}\right) + \frac{\lambda}{r_-}\int_{\mathbb{R}^N} h|u|^{r(x)} + \frac{\mu}{q_-}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q(x)} + \frac{1}{p_-^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*(x)} \\
&\leq \frac{1}{p_-}\|u\|^{p_-} + \lambda C_3\|u\|^{r_-} + \mu C_4\|u\|^{q_-} + C_5\|u\|^{p_-^*} \\
&\leq C_R := \frac{1}{p_-}R^{p_-} + \lambda C_3 R^{r_-} + \mu C_4 R^{q_-} + C_5 R^{p_-^*},
\end{aligned}$$

onde $C_3, C_4, C_5 > 0$ independem de u. Daí, ϕ é limitado inferiormente em $\overline{B_R(0)}$. Considere agora $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ com $u^+ \neq 0$ e $0 < t < 1$. Então

$$\phi(tu) \leq t^{p_-} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)} \right) - \lambda t^{r_+} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(x)}{r(x)} (u^+)^{r(x)}.$$

Como $r_+ < p_-$,

$$\phi(tu) < 0, \text{ para } t \approx 0^+.$$

Mas $tu \in \overline{B_R(0)}$, para $t \approx 0^+$. Portanto

$$J = \inf_{\overline{B_R(0)}} \phi < 0.$$

■

O próximo resultado estabelece a existência de uma sequência $(PS)_J$ para ϕ. A principal ferramenta utilizada é o Princípio Variacional de Ekeland.

Lema 3.2.10. *Para cada $\mu > 0$ e $\lambda \in (0, \lambda_1)$, onde λ_1 é definido no Lema 3.2.6, existe uma sequência $(PS)_J$ para ϕ, isto é, (u_n) em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo*

$$\phi(u_n) \to J \text{ e } \phi'(u_n) \to 0$$

Demonstração. Seja $R > 0$ definido no Lema 3.2.6. A aplicação da forma fraca do Princípio Variacional de Ekeland 1.4.2 ao funcional $\phi_{|\overline{B_R(0)}}$ produz uma sequência (u_n) em $\overline{B_R(0)}$ que satisfaz

$$\phi(u_n) \to J \text{ e } \phi(u_n) - \frac{1}{n}\|u - u_n\| < \phi(u), \forall u \in \overline{B_R(0)}; u \neq u_n.$$

Como $J < 0$, da escolha de R, podemos admitir $u_n \in B_R(0)$. A partir de agora, os argumentos são análogos àqueles na demonstração da Proposição 1.4.3 e, desta maneira, os omitiremos. ■

Agora somos capazes de demonstrar a existência de uma solução não-negativa com energia negativa para $(P_{\lambda,\mu})$.

Teorema 3.2.11. *Para cada $\mu \geq \mu_\infty$, existe $\lambda^{**} = \lambda^{**}(\mu) > 0$ tal que o problema $(P_{\lambda,\mu})$ possui uma solução não-negativa com energia negativa, para todo $\lambda \in (0, \lambda^{**})$.*

Demonstração. Como $\mu \geq \mu_\infty$, pelo Lema 3.2.5, ϕ é $(PS)_d$ para

$$d < c_\infty - M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right).$$

No que segue, escolhemos $\lambda_3 > 0$ tal que

$$0 < c_\infty - M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right), \ \forall \lambda \in (0, \lambda_3)$$

e $\lambda^{**} = \min\{\lambda_1, \lambda_3\}$. Se $\lambda \in (0, \lambda^{**})$, do Lema 3.2.10 concluímos a existência de uma sequência (u_n), a qual é $(PS)_J$ para ϕ, onde

$$J = \inf_{u \in \overline{B_R(0)}} \phi(u).$$

Como pelo Lema 3.2.9 temos $J < 0$, segue-se que ϕ satisfaz a condição $(PS)_J$. Daí, existe $\Psi_2 \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\phi(\Psi_2) = J < 0 \ \text{ e } \ \phi'(\Psi_2) = 0.$$

Logo, Ψ_2 é uma solução não-negativa para $\left(P_{\lambda,\mu}\right)$ com energia negativa. ■

3.2.4 Demonstração do Teorema 3.1.1

A demonstração do Teorema 3.1.1 segue tomando $\mu^* = \mu_\infty$ e $\lambda_\mu = \min\{\lambda^*, \lambda^{**}\}$.

3.3 Existência e multiplicidade de soluções com energia negativa

Nesta seção demonstramos o Teorema 3.1.2, o qual assegura a existência de infinitas soluções com energia negativa para $\left(P_{\lambda,\mu}\right)$. Encontraremos tais soluções como pontos críticos de uma forma truncada da energia $I_{\lambda,\mu}\colon W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ correspondente a $\left(P_{\lambda,\mu}\right)$, que é definida por

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\mu}(u) := I(u) = & \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} \left(\left|\nabla u\right|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)}\right) \\ & - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h}{r(x)}|u|^{r(x)} - \mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)} - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p^*(x)}|u|^{p^*(x)}. \end{aligned}$$

Observamos que $I \in \mathcal{C}^1\left(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$ com

$$\begin{aligned} I'(u)v = &\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla v + V(x)|u|^{p(x)-2}uv\right) \\ &- \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h|u|^{r(x)-2}uv - \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)-2}uv - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*(x)-2}uv, \end{aligned}$$

para todos $u, v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Enfatizamos que em virtude da não-linearidade em $(P_{\lambda,\mu})$ ser uma função ímpar, o funcional I é par. Um fato simplesmente observado, porém de extrema importância à aplicabilidade dos métodos que utilizaremos.

3.3.1 Resultados preliminares

Os cinco próximos resultados possuem demonstrações que seguem os mesmos argumentos das demonstrações das Proposições 3.2.1 e 3.2.2, dos Lemas 3.2.3 e 3.2.4 e da Proposição 3.2.5 respectivamente. Desta maneira, as omitimos.

Proposição 3.3.1. *Seja* (v_n) *uma sequência* $(PS)_d$ *para* I. *Então,* (v_n) *é uma sequência limitada em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 3.3.2. *Seja* (v_n) *uma sequência* $(PS)_d$ *para* I *com* $v_n \rightharpoonup v$ *em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. *Então*

$$I'(v) = 0.$$

Por conseguinte, se $v \neq 0$, *então* v *é uma solucão para* $(P_{\lambda,\mu})$.

Lema 3.3.3. *Seja* (v_n) *uma sequência* $(PS)_d$ *para* I *com* $v_n \rightharpoonup v$ *em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. *Então, existe uma constante* $M > 0$, *que independe de* λ *e* μ, *tal que*

$$I(v) \geq -M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right).$$

Lema 3.3.4. *Seja* (v_n) *uma sequência limitada em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $v_n(x) \to v(x)$ *e* $\nabla v_n(x) \to \nabla v(x)$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^N$. *Então*

(a) $I(v_n) - I_\infty(v_n - v) - I(v) = o_n(1)$;

(b) $I'(v_n) - I'_\infty(v_n - v) - I'(v) = o_n(1)$.

Portanto, se (v_n) *é uma sequência* $(PS)_d$ *para* I *com limite fraco* $v \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, *escrevendo* $w_n = v_n - v$, (w_n) *é uma sequência* $(PS)_{d-I(v)}$ *para* I_∞.

Proposição 3.3.5. *Se* $\mu \geq \mu_\infty$*, onde* μ_∞ *é dado em* (2.4)*, então* I *é um funcional* $(\mathsf{PS})_d$ *para*

$$d < c_\infty - M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right).$$

A próxima proposição desempenhará um papel fundamental adiante, pois permite contornar algumas dificuldades relacionadas à diferenciabilidade da norma de Luxemburg e, como será visto, obter uma definição adequada do truncamento de I.

Proposição 3.3.6. *É válido que* $I(u) \geq \xi\big(\rho(u)\big)$*, onde*

$$\xi_{\lambda,\mu}(x) = \xi(x) = \frac{1}{p_+}x - \lambda K_1 \max\left\{x^{\frac{r_-}{p_+}}, x^{\frac{r_+}{p_-}}\right\} - \mu K_2 \max\left\{x^{\frac{q_-}{p_+}}, x^{\frac{q_+}{p_-}}\right\} - K_3 \max\left\{x^{\frac{p^*_-}{p_+}}, x^{\frac{p^*_+}{p_-}}\right\},$$

para constantes $K_1, K_2, K_3 > 0$.

Demonstração. Em primeiro lugar, escrevemos $\max\{a, b\} = [a, b]$. Como

$$I(u) \geq \frac{1}{p_+}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)}\right) - \frac{\lambda}{r_-}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^{r(x)} - \frac{\mu}{q_-}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q(x)} - \frac{1}{p^*_-}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*(x)},$$

da desigualdade de Hölder 1.1.6, Proposição 1.1.5 e Corolário 1.1.9, obtemos

$$I(u) \geq \frac{1}{p_+}\rho(u) - \frac{2\lambda|h|_{\Theta(x)}}{r_-}\left[|u|^{r_-}_{p^*(x)}, |u|^{r_+}_{p^*(x)}\right] - \frac{\mu}{q_-}\left[|u|^{q_-}_{q(x)}, |u|^{q_+}_{q(x)}\right] - \frac{1}{p^*_-}\left[|u|^{p^*_-}_{p^*(x)}, |u|^{p^*_+}_{p^*(x)}\right]$$

Das imersões contínuas de Sobolev, existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|v|_{q(x)} \leq C_1\|v\| \ \text{ e } \ |v|_{p^*(x)} \leq C_2\|v\|, \ \forall v \in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big).$$

Em consequência,

$$I(u) \geq \frac{1}{p_+}\rho(u) - \lambda K_1\left[\|u\|^{r_-}, \|u\|^{r_+}\right] - \mu K_2\left[\|u\|^{q_-}, \|u\|^{q_+}\right] - K_3\left[\|u\|^{p^*_-}, \|u\|^{p^*_+}\right],$$

onde $K_1 = \frac{2|h|_{\Theta(x)}\left(C_2^{r_-} + C_2^{r_+}\right)}{r_-}$, $K_2 = \frac{\left(C_1^{q_-} + C_1^{q_+}\right)}{q_-}$ e $K_3 = \frac{\left(C_2^{p^*_-} + C_2^{p^*_+}\right)}{p^*_-}$. Recordando ao leitor que

$$\left[\|u\|^{m_-}, \|u\|^{m_+}\right] \leq \left[\rho(u)^{\frac{m_-}{h_+}}, \rho(u)^{\frac{m_+}{h_-}}\right]$$

para todo $m \in L^\infty_+\big(\mathbb{R}^N\big)$ (veja Corolário 1.1.19), obtemos

$$I(u) \geq \frac{1}{p_+}\rho(u) - \lambda K_1\left[\rho(u)^{\frac{r_-}{p_+}}, \rho(u)^{\frac{r_+}{p_-}}\right] - \mu K_2\left[\rho(u)^{\frac{q_-}{p_+}}, \rho(u)^{\frac{q_+}{p_-}}\right] - K_3\left[\rho(u)^{\frac{p^*_-}{p_+}}, \rho(u)^{\frac{p^*_+}{p_-}}\right],$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 3.3.7. *Para cada* $\mu > 0$, *existem* $R = R(\mu) > 0$ *e* $\lambda_\mu > 0$ *tais que*

$$\xi(R) > 0, \text{ para todo } \lambda \in (0, \lambda_\mu).$$

Demonstração. Considere a função ζ: $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\zeta_{\lambda,\mu}(x) = \zeta(x) = \frac{1}{p_+}x - \lambda K_1 x^{\frac{r_-}{p_+}} - \mu K_2 x^{\frac{q_-}{p_+}} - K_3 x^{\frac{p_-^*}{p_+}},$$

onde $K_1, K_2, K_3 > 0$ são dados na Proposição 3.3.6. Sendo $1 \leq \frac{q_-}{p_+} \leq \frac{p_-^*}{p_+}$, existe $R = R(\mu) \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{2p_+}R - \mu K_2 R^{\frac{q_-}{p_+}} - K_3 R^{\frac{p_-^*}{p_+}} \geq 0,$$

implicando que

$$\zeta(R) \geq \frac{1}{2p_+}R - \lambda K_1 R^{\frac{r_-}{p_+}}.$$

Escolha agora $\lambda_\mu > 0$ suficientemente pequeno verificando

$$\frac{1}{2p_+}R - \lambda_\mu K_1 R^{\frac{r_-}{p_+}} > 0.$$

Então

$$\lambda \in (0, \lambda_\mu) \Longrightarrow \xi(R) = \zeta(R) > \frac{1}{2p_+}R - \lambda_\mu K_1 R^{\frac{r_-}{p_+}} > 0.$$

■

Corolário 3.3.8. *Fixemos* $\mu > 0$ *e sejam* $R > 0$ *e* $\lambda_\mu > 0$ *dados na Proposição 3.3.7. Se* $\lambda \in (0, \lambda_\mu)$ *e definimos*

$$(R_0)_{\lambda,\mu} = R_0 = \max\Big([0, R] \cap \xi^{-1}\big((-\infty, 0]\big)\Big),$$

então

$$0 < R_0 < R \text{ e } \xi(R_0) = 0.$$

3.3.2 O funcional truncado

Embora o funcional I seja par, não é limitado inferiormente e isto é um entrave aos nossos objetivos adiante. Desse modo, necessitaremos realizar alguma forma de truncamento em I para que tenhamos limitação inferior.

Fixado $\mu > 0$ arbitrariamente, sejam $R > 0$ e $\lambda_\mu > 0$ dados na Proposição 3.3.7. Para $\lambda \in (0, \lambda_\mu)$, seja $R_0 > 0$ dado no Corolário 3.3.8 e consideremos $\tau_{\lambda,\mu} = \tau\colon [0,\infty) \to [0,1]$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que

$$\tau(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq R_0 \\ 0, & \text{se } x \geq R \end{cases}.$$

Definimos a função

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_{\lambda,\mu}(x) = \tilde{\xi}(x) &= \frac{1}{p_+}x - \lambda K_1 \max\left\{x^{\frac{r_-}{p_+}}, x^{\frac{r_+}{p_-}}\right\} \\ &\quad - \mu K_2 \max\left\{x^{\frac{q_-}{p_+}}, x^{\frac{q_+}{p_-}}\right\}\tau(x) - K_3 \max\left\{x^{\frac{p_-^*}{p_+}}, x^{\frac{p_+^*}{p_-}}\right\}\tau(x), \;\; x \in [0,\infty),\end{aligned}$$

onde $K_1, K_2, K_3 > 0$ são dados na Proposição 3.3.6.

As seguintes propriedades de $\tilde{\xi}$ são verificadas:

- $\tilde{\xi}(x) = \xi(x)$, se $x \leq R_0$;
- $\xi(x) \leq \tilde{\xi}(x)$, $\forall x \in [0,\infty)$;
- $\tilde{\xi}(x) = \frac{1}{p_+}x - \lambda K_1 \max\left\{x^{\frac{r_-}{p_+}}, x^{\frac{r_+}{p_-}}\right\}$, se $x \geq R$;
- $\tilde{\xi}(x) > 0$, para $x > R_0$.

Introduzindo

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{\lambda,\mu}(u) = \tilde{I}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)}\Big(\big|\nabla u\big|^{p(x)} + V(x)|u|^{p(x)}\Big) - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h}{r(x)}|u|^{r(x)} \\ - \mu\tau\big(\rho(u)\big)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)} - \tau\big(\rho(u)\big)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p^*(x)}|u|^{p^*(x)},\end{aligned}$$

onde $u \in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$, temos

$$\tilde{I}(u) \geq \tilde{\xi}\big(\rho(u)\big) \;\text{ e }\; \tilde{I}(u) = I(u), \;\text{ se } \rho(u) \leq R_0. \tag{3.3}$$

O funcional $\tilde{I}$ é dito o *funcional truncado* associado a I. Assim como o funcional original I, o funcional $\tilde{I}$ também é par. Ao encontro de nossos propósitos porém $\tilde{I}$ é limitado inferiormente em $W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$, conforme segue da primeira das condições em (3.3).

Proposição 3.3.9. *São verdadeiras as seguintes afirmações:*

(a) $\tilde{I} \in \mathcal{C}^1\left(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\right)$;

(b) *Se* $\rho(u) < R_0$, *então existe uma vizinhança* V *de* u *em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ *tal que*

$$\tilde{I}(v) = I(v),\ \forall v \in V.$$

Em consequência, $\tilde{I}'(u) = I'(u)$;

(c) *Se* $\tilde{I}(u) < 0$, *então* $\rho(u) < R_0$;

(d) *Se* $\mu \geq \mu_\infty$, *diminuindo* λ_μ *se necessário, obtemos que* $\tilde{I}$ *é* $(PS)_d$ *para* $d < 0$, *qualquer que seja* $\lambda \in (0, \lambda_\mu)$.

Demonstração. A demonstração de cada um dos itens é dada a seguir:

(a) É óbvio;

(b) Segue da continuidade de ρ;

(c) Basta observar que $\tilde{\xi}(\rho(u)) \geq 0$, se $\rho(u) \geq R_0$;

(d) Seja (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para $\tilde{I}$ com $d < 0$. Sem perda de generalidade, podemos admitir

$$\tilde{I}(u_n) < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pelo item (c), segue-se que

$$\rho(u_n) < R_0,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

e, pelo item (b), concluímos que

$$\tilde{I}(u_n) = I(u_n) \ \text{ e } \ \tilde{I}'(u_n) = I'(u_n),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deste modo, (u_n) também é uma sequência $(PS)_d$ para I. Sendo $\mu \geq \mu_\infty$, diminuindo λ_μ se necessário, podemos assumir

$$0 < c_\infty - M\left(\lambda^{\Theta_-} + \lambda^{\Theta_+}\right), \text{ para todo } \lambda \in (0, \lambda_\mu).$$

Da Proposição 3.3.5, (u_n) possui uma subsequência convergente em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e, consequentemente, $\tilde{I}$ é $(PS)_d$.

■

Observação 3.3.10. *Não podemos deixar de fazer um importante comentário com relação ao item* (a) *da proposição precedente. Contrariamente ao caso de expoentes constantes, no contexto dos expoentes variáveis não é óbvia a diferenciabilidade da norma de Luxemburg. Deste modo, não poderíamos deduzir claramente a suavidade do funcional truncado* $\tilde{I}$ *caso sua expressão contivesse o fator* $\tau(\|u\|)$*, o que ocorre quando o expoente é constante (veja [51]). Assim, sendo o expoente variável, é de fundamental importância a Proposição 3.3.6, pois a mesma permite definir* $\tilde{I}$ *utilizando-se o fator* $\tau(\rho(u))$*, mais adequado neste caso.*

Observação 3.3.11. *Das condições* (b) *e* (c) *deduzimos que se* $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ *satisfaz* $\tilde{I}(u) < 0$ *e* $\tilde{I}'(u) = 0$*, então também* $I(u) < 0$ *e* $I'(u) = 0$*.*

Com o próximo lema iniciamos a preparação para obter um resultado de multiplicidade de soluções para $(P_{\lambda,\mu})$, utilizando a Teoria do gênero de Krasnoselski.

Lema 3.3.12. *Para qualquer* $n \in \mathbb{N}$*, existe* $\epsilon > 0$ *tal que*

$$\gamma\left(\tilde{I}^{-\epsilon}\right) \geq n,$$

onde

$$\tilde{I}^{-\epsilon} = \left\{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)\,;\, \tilde{I}(u) \leq -\epsilon\right\}.$$

Demonstração. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e E um subespaço n-dimensional de $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Para $u \in E$ com $\|u\| = 1$ e $0 < \alpha < 1$, é válido

$$\tilde{I}(\alpha u) \leq \frac{\alpha^{p_-}}{p_-} - \lambda \frac{\alpha^{r_+}}{r_+} \int_{\mathbb{R}^N} h|u|^{r(x)}.$$

Seja

$$\beta = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} h|v|^{r(x)}\,;\, v \in E, \|v\| = 1\right\}.$$

Temos $\beta > 0$, pois de outra forma

$$\int_{\mathbb{R}^N} h|v_k|^{r(x)} \to 0$$

para uma sequência (v_k) em E com $\|v_k\| = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Logo

$$|v_k|_{r(x),h(x)} \to 0$$

e, sendo $\dim E = n < \infty$, obtemos

$$\|v_k\| = 1 \to 0,$$

o que é uma contradição. Desta maneira

$$\tilde{I}(\alpha u) \leq \frac{1}{p_-}\alpha^{p_-} - \lambda\frac{\beta}{r_+}\alpha^{r_+}.$$

Como $r_+ < p_-$, podemos escolher $0 < \delta < 1$ e $\epsilon = \epsilon(n) > 0$ tais que

$$\tilde{I}(\delta u) \leq -\lambda\frac{\beta}{2r_+}\delta^{r_+} \leq -\epsilon, \ \forall u \in E \text{ com } \|u\| = 1,$$

mostrando que

$$\partial B_\delta(0) \cap E \subset \tilde{I}^{-\epsilon}$$

e assim, pela Proposição 1.5.1,

$$n = \gamma\left(\partial B_\delta(0) \cap E\right) \leq \gamma\big(\tilde{I}^{-\epsilon}\big).$$

∎

Para o que segue, definimos

$$\Sigma_k = \Big\{C \subset W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\};\ C \text{ é fechado },\ C = -C \ \text{ e } \ \gamma(C) \geq k\Big\} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

e

$$K_d = \left\{u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)\,;\ \tilde{I}(u) = d \text{ e } \tilde{I}'(u) = 0\right\}.$$

Proposição 3.3.13. *Suponha que* $\mu \geq \mu_\infty$ *e* $\lambda \in (0, \lambda_\mu)$. *Então*

$$d_k = \inf_{C \in \Sigma_k} \sup_{u \in C} \tilde{I}(u)$$

é um valor crítico negativo de $\tilde{I}$ *e, além disso, se*

$$d = d_k = d_{k+1} = \cdots = d_{k+l} \ (l \geq 0),$$

temos

$$\gamma\big(K_d\big) \geq l + 1.$$

Demonstração. Vimos que $\tilde{I} \in \mathcal{C}^1\Big(W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R}\Big)$, $\tilde{I}$ é um funcional $(PS)_d$ para $d < 0$, $\tilde{I}$ é par e limitado inferiormente, $\tilde{I}(0) = 0$ e, pelo Lema 3.3.12, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\epsilon = \epsilon(k) > 0$ tal que $\gamma\left(\tilde{I}^{-\epsilon}\right) \geq k$. O resultado segue então do Teorema 1.5.2. ∎

3.3.3 Demonstração do 3.1.2

Tomamos $\mu^* = \mu_\infty$ e $\lambda_\mu > 0$ dado na Proposição 3.3.13. Então

$$\gamma\big(K_{d_k}\big) \geq 1, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto

$$K_{d_k} \neq \emptyset, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Agora, ou os números d_k são todos distintos ou $\gamma\big(K_{d_k}\big) > 1$, para algum $d = d_k = \cdots = d_{k+l}$. Deste modo, em qualquer um dos casos, $\tilde{I}$ possui uma infinidade de pontos críticos com energia negativa. Logo, pela Observação 3.3.11, I possui uma infinidade de pontos críticos com energia negativa.

Capítulo 4

Soluções do tipo multi-bump para uma classe de problemas quasilineares em $\mathbb{R}^N$ envolvendo expoentes variáveis e crescimento subcrítico

Conteúdo

4.1 Introdução **101**

4.2 O problema auxiliar (A_λ) **103**

4.2.1 A geometria do passo da montanha 106

4.2.2 A limitação das sequências Palais-Smale 107

4.2.3 A condição Palais-Smale 108

4.3 A limitação das soluções para (A_λ) **112**

4.4 A condição $(PS)_\infty$ **119**

4.5 Um valor crítico especial para ϕ_λ **123**

4.6 A existência de soluções multi-bump para (P_λ) **130**

4.1 Introdução

Neste capítulo consideramos a existência e multiplicidade de soluções do tipo multi-bump para a seguinte classe de problemas:

$$(P_\lambda)\quad \begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + \big(\lambda V(x) + Z(x)\big)|u|^{p(x)-2}u = f(x,u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big) \setminus \{0\},\ u \geq 0, \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro, o expoente $p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função lipschitziana, os potenciais $V, Z\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas com $V \geq 0$ e a não-linearidade $f \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}\big)$ possui um crescimento subcrítico. Além disso, também consideramos o seguinte conjunto de hipóteses:

(H_1) $1 < p_- \leq p_+ < N$;

(H_2) $\Omega = \text{int } V^{-1}(0) \neq \emptyset$ e limitado, $\overline{\Omega} = V^{-1}(0)$ e Ω pode ser decomposto em k componentes conexas $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ com $\text{dist}\big(\Omega_i, \Omega_j\big) > 0$, se $i \neq j$;

(H_3) Existe $M > 0$ tal que

$$\lambda V(x) + Z(x) \geq M,\ \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \lambda \geq 1;$$

(H_4) Existe $K > 0$ tal que

$$\big|Z(x)\big| \leq K,\ \forall x \in \mathbb{R}^N;$$

(f_1)

$$\limsup_{|t|\to\infty} \frac{|f(x,t)|}{|t|^{q(x)-1}} < \infty, \text{ uniformemente em } x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $q\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínua com $p_+ < q_-$ e $q \ll p^*$;

(f_2) $f(x,t) = o\big(|t|^{p_+-1}\big)$, $t \to 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$;

(f_3) Existe $\theta > p_+$ tal que

$$0 < \theta F(x,t) \leq f(x,t)t,\ \forall x \in \mathbb{R}^N, t \in (0,\infty),$$

onde $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$;

(f_4) Para cada $x \in \mathbb{R}^N$, a função $t \in (0, \infty) \mapsto \dfrac{f(x,t)}{t^{p_+-1}}$ é estritamente crescente;

(f_5) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\displaystyle\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ t \in [a,b]}} |f(x,t)| < \infty$.

Um exemplo típico de não-linearidade verificando $(f_1) - (f_5)$ é

$$f(x,t) = |t|^{q(x)-2}t, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \ t \in \mathbb{R},$$

onde $p_+ < q_-$ e $q \ll p^*$.

Em [40], motivados por [38] e [78], Ding & Tanaka consideraram (P_λ) com $p = 2$ e $f(u) = u^q$, $q \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$ se $N \geq 3$; $q \in (1, \infty)$ se $N = 1, 2$. Naquele trabalho, tais autores demonstraram que (P_λ) possui pelo menos $2^k - 1$ soluções u_λ, desde que os valores de λ sejam grandes. Mais precisamente, temos uma solução para cada subconjunto não-vazio Υ de $\{1, \ldots, k\}$. Além disso, fixado Υ, Ding & Tanaka também demonstraram que de toda sequência $\lambda_n \to \infty$ podemos extrair uma subsequência λ_{n_i} tal que $u_{\lambda_{n_i}}$ converge em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para uma função u, a qual satisfaz $u = 0$ fora de $\Omega_\Upsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon} \Omega_j$ e $u_{|\Omega_j}$, $j \in \Upsilon$, é uma solução de energia mínima para

$$\begin{cases} -\Delta u + Z(x)u = u^q, \ \text{em } \Omega_j, \\ u \in H_0^1(\Omega_j), \ u > 0, \ \text{em } \Omega_j. \end{cases}$$

Em [7], empregando argumentos diferentes daqueles utilizados em [40], Alves estendeu os resultados descritos acima para o operador p-laplaciano, assumindo que em (P_λ) a não-linearidade $f = f(u)$ possui um crescimento subcrítico e $2 \leq p < N$. Em particular, fixado $\Upsilon \subset \{1, \ldots, k\}$, de qualquer sequência $\lambda_n \to \infty$ podemos extrair um subsequência λ_{n_i} tal que $u_{\lambda_{n_i}}$ converge em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para uma função u, a qual satisfaz $u = 0$ fora de Ω_Υ e $u_{|\Omega_j}$, $j \in \Upsilon$, é uma solução de energia mínima para

$$\begin{cases} -\Delta_p u + Z(x)u = f(u), \ \text{em } \Omega_j, \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega_j), \ u > 0, \ \text{em } \Omega_j. \end{cases}$$

Nossa contribuição relativamente ao problema (P_λ) foi estender os resultados em [7] ao operador $p(x)$-laplaciano, completando assim os estudos em [7] e [40]. Todavia, enfatizamos que em diversas estimativas, utilizamos argumentos diferentes daqueles encontrados em [7]. A principal diferença está relacionada ao fato de que para equações envolvendo o operador $p(x)$-laplaciano não é claro que o método de iteração de Moser seja uma boa ferramenta para obter as estimativas para a norma L^∞ (a menos que seja imposta uma hipótese adicional, conforme fizemos no Capítulo 2). Felizmente, como estamos lidando com um crescimento subcrítico, pudemos adaptar algumas idéias diferentes exploradas em Fan [44] e Fusco & Sbordone [50] que, diferentemente do Método de Iteração de Moser, não exigem a imposição de uma hipótese adicional.

Ressaltamos que no contexto de expoente variáveis, até onde sabemos, este é o primeiro estudo relacionado a soluções do tipo multi-bump.

O principal resultado demonstrado é o seguinte:

Teorema 4.1.1. *Suponha que* $(H_1)-(H_4)$ *e* $(f_1)-(f_5)$ *sejam válidas. Então, existe* $\lambda_0>0$ *com a seguinte propriedade: para qualquer subconjunto não-vazio* Υ *de* $\{1,2,...,k\}$ *e* $\lambda\geq\lambda_0$*, o problema* (P_λ) *possui uma solução* u_λ*. Além disso, se fixamos o subconjunto* Υ*, então de toda sequência* $\lambda_n\to\infty$ *podemos extrair uma subsequência* λ_{n_i} *tal que* $u_{\lambda_{n_i}}$ *converge em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ *para uma função* u*, a qual satisfaz* $u=0$ *fora de* $\Omega_\Upsilon=\bigcup_{j\in\Upsilon}\Omega_j$ *e* $u_{|\Omega_j}$, $j\in\Upsilon$*, é uma solução ground-state (ou seja, de energia mínima) para*

$$\begin{cases}-\Delta_{p(x)}u+Z(x)u=f(x,u), & \textit{em } \Omega_j,\\ u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega_j),\ u\geq 0, & \textit{em } \Omega_j.\end{cases}$$

Uma vez que estamos interessados em encontrar soluções não-negativas, ao longo deste capítulo, substituímos f por $f^+\colon \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$f^+(x,t)=\begin{cases}f(x,t), & \text{se } t>0\\ 0, & \text{se } t\leq 0.\end{cases}$$

Porém, por simplicidade, continuamos a escrever f em vez de f^+.

4.2 O problema auxiliar (A_λ)

Nesta seção estudamos um problema auxiliar a (P_λ), adaptando as idéias exploradas em del Pino & Felmer [38]. A partir de agora, suporemos que o parâmetro λ é maior do que ou igual a 1.

Observamos que o funcional energia $I_\lambda \colon E_\lambda \to \mathbb{R}$ correspondente a (P_λ) é definido como

$$I_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + \big(\lambda V(x) + Z(x)\big)|u|^{p(x)} \right) - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u),$$

onde $E_\lambda = \big(E, \|\cdot\|_\lambda\big)$ com

$$E = \left\{ u \in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)\,;\, \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p(x)} < \infty \right\},$$

e

$$\|u\|_\lambda = \inf \left\{ \sigma > 0\,;\, \rho_\lambda\left(\frac{u}{\sigma}\right) \leq 1 \right\},$$

sendo

$$\rho_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^{p(x)} + \big(\lambda V(x) + Z(x)\big)|u|^{p(x)} \right).$$

Em vista da desigualdade

$$\rho_\lambda(u) \geq \min\{1, M\} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)} \right), \ \forall u \in E_\lambda,$$

é facilmente visto que $E_\lambda \hookrightarrow W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$ continuamente e, das imersões de Sobolev, E_λ está imerso compactamente em $L^{h(x)}_{loc}\big(\mathbb{R}^N\big)$, para todo $1 \leq h \ll p^*$. Além disso, podemos demonstrar que E_λ é um espaço reflexivo. Também, sendo $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, a partir de

$$\rho_{\lambda,\mathcal{O}}(u) = \int_{\mathcal{O}} \left(|\nabla u|^{p(x)} + \big(\lambda V(x) + Z(x)\big)|u|^{p(x)} \right) \geq M \int_{\mathcal{O}} |u|^{p(x)} = M\rho_{p(x),\mathcal{O}}(u), \tag{4.1}$$

para todo $u \in E_\lambda$, se escrevemos $M = (1-\delta)^{-1}\nu$, para algum $0 < \delta < 1$ e $\nu > 0$, obtemos

$$\rho_{\lambda,\mathcal{O}}(u) - \nu\rho_{p(x),\mathcal{O}}(u) \geq \delta\rho_{\lambda,\mathcal{O}}(u), \ \forall u \in E_\lambda. \tag{4.2}$$

Recordamos que para qualquer $\epsilon > 0$, as hipóteses (f_1), (f_2) e (f_5) garantem que

$$f(x,t) \leq \epsilon|t|^{p(x)-1} + C_\epsilon|t|^{q(x)-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \ t \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

e, consequentemente,

$$F(x,t) \leq \epsilon|t|^{p(x)} + C_\epsilon|t|^{q(x)}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \ t \in \mathbb{R}, \tag{4.4}$$

onde $C_\epsilon > 0$ depende de ϵ. Além disso, as hipóteses (f_2) e (f_3) nos permitem considerar a função $a\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida como

$$a(x) = \min\left\{a > 0\,;\, \frac{f(x,a)}{a^{p(x)-1}} = \nu\right\}. \tag{4.5}$$

Utilizando a função a, podemos considerar a função $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), \ t \leq a(x) \\ \nu t^{p(x)-1}, \ t \geq a(x) \end{cases},$$

a qual verifica a desigualdade

$$\tilde{f}(x,t) \leq \nu |t|^{p(x)-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Portanto

$$\tilde{f}(x,t)t \leq \nu |t|^{p(x)}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}, \tag{4.7}$$

e

$$\tilde{F}(x,t) \leq \frac{\nu}{p(x)} |t|^{p(x)}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

onde $\tilde{F}(x,t) = \int_0^t \tilde{f}(x,s)\,ds$.

Sendo $\Omega = \text{int}V^{-1}(0)$ formado de k componentes $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ com $\text{dist}\big(\Omega_i, \Omega_j\big) > 0$, se $i \neq j$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, podemos fixar um domínio limitado suave Ω_j' tal que

$$\overline{\Omega_j} \subset \Omega_j' \ \text{ e } \ \overline{\Omega_i'} \cap \overline{\Omega_j'} = \emptyset, \ \text{ se } i \neq j. \tag{4.9}$$

Doravante, fixamos um subconjunto não-vazio Υ de $\{1, \dots, k\}$ e

$$\Omega_\Upsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon} \Omega_j, \ \Omega_\Upsilon' = \bigcup_{j \in \Upsilon} \Omega_j', \ \chi_\Upsilon = \begin{cases} 1, \ \text{se } x \in \Omega_\Upsilon' \\ 0, \ \text{se } x \notin \Omega_\Upsilon'. \end{cases}$$

Utilizando as notações acima, definimos as funções

$$g(x,t) = \chi_\Upsilon(x) f(x,t) + \big(1 - \chi_\Upsilon(x)\big)\tilde{f}(x,t), \ (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

e

$$G(x,t) = \int_0^t g(x,s)\,ds, \ (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

e o problema auxiliar

$$(A_\lambda)\ \begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + \big(\lambda V(x) + Z(x)\big)|u|^{p(x)-2}u = g(x,u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big). \end{cases}$$

O problema (A_λ) está efetivamente relacionado a (P_λ), pois se u_λ é uma solução para (A_λ) verificando

$$u_\lambda(x) \le a(x), \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon,$$

então é uma solução para (P_λ).

Em comparação com (P_λ), o problema (A_λ) possui a vantagem de que o funcional energia que o corresponde, qual seja, $\phi_\lambda\colon E_\lambda \to \mathbb{R}$ definido como

$$\phi_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} \left(\left|\nabla u\right|^{p(x)} + \big(\lambda V(x) + Z(x)\big)|u|^{p(x)}\right) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u),$$

satisfaz a condição (PS), enquanto I_λ não necessariamente satisfaz esta condição. Deste modo, o nível do passo da montanha (veja Teorema 4.2.4) é um valor crítico para ϕ_λ.

4.2.1 A geometria do passo da montanha

Proposição 4.2.1. ϕ_λ *satisfaz a geometria do passo da montanha, para todo* $\lambda \ge 1$.

Demonstração. Seja $u \in E_\lambda$. De (4.4) e (4.8), temos

$$\phi_\lambda(u) \ge \frac{1}{p_+}\rho_\lambda(u) - \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p(x)} - C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)} - \frac{\nu}{p_-} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p(x)},$$

onde $\epsilon > 0$ e $C_\epsilon > 0$ é uma constante que depende de ϵ. Por (4.1), fixando $\epsilon < \frac{M}{p_+}$ e $\nu < p_- M \left(\frac{1}{p_+} - \frac{\epsilon}{M}\right)$, obtemos

$$\phi_\lambda(u) \ge \alpha \rho_\lambda(u) - C_\epsilon \rho_{q(x)}(u),$$

sendo $\alpha = \left(\frac{1}{p_+} - \frac{\epsilon}{M}\right) - \frac{\nu}{p_- M} > 0$. Assumindo

$$\|u\|_\lambda < \min\{1, 1/C_q\},$$

onde

$$|v|_{q(x)} \le C_q \|v\|_\lambda, \forall v \in E_\lambda,$$

das Proposições 1.1.8 e 1.1.16 deduzimos

$$\phi_\lambda(u) \geq \alpha \|u\|_\lambda^{p_+} - C\|u\|_\lambda^{q_-}.$$

Como $p_+ < q_-$, existem $0 < r < \min\{1, 1/C_q\}$ e $\beta > 0$ tais que se $\|u\|_\lambda = r$, então

$$\phi_\lambda(u) \geq \beta > \phi_\lambda(0).$$

Por outro lado, fixando $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_\Upsilon)$, para $t \geq 0$ temos

$$\phi_\lambda(tv) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{t^{p(x)}}{p(x)} \left(|\nabla v|^{p(x)} + Z(x))|v|^{p(x)}\right) - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, tv).$$

Se $t > 1$, então por (f_3), concluímos que

$$\phi_\lambda(tv) \leq \frac{t^{p_+}}{p_-} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^{p(x)} + Z(x))|v|^{p(x)}\right) - C_1 t^\theta \int_{\mathbb{R}^N} |v|^\theta + C_2,$$

para constantes $C_1, C_2 > 0$ e, como $\theta > p_+$,

$$\phi_\lambda(tv) \to -\infty, \text{ quando } t \to +\infty.$$

O limite anterior implica que considerando $u_1 = t_1 v$ com $t_1 > \frac{r}{\|v\|_\lambda}$ e $\phi_\lambda(t_1 v) \leq 0$, para $\|u\|_\lambda = r$ obtemos

$$\phi_\lambda(u) \geq \max\{\phi_\lambda(0), \phi_\lambda(u_1)\},$$

mostrando a geometria do passo da montanha. ■

4.2.2 A limitação das sequências Palais-Smale

Antes de demonstrar a limitação das sequências $(PS)_d$ para ϕ_λ, observamos que como consequência de (f_3) é válida a seguinte relação:

$$\tilde{F}(x,t) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(x,t)t \leq \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{\theta}\right) \nu |t|^{p(x)}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

Proposição 4.2.2. *Quaisquer sequências* $(PS)_d$ *para* ϕ_λ, $\lambda \geq 1$, *são limitadas.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para ϕ_λ. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}\phi'_\lambda(u_n)u_n \leq d + 1 + \|u_n\|_\lambda, \text{ para } n \geq n_0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}\phi_\lambda'(u_n)u_n \geq &\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{\theta}\right)\left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + \big(\lambda V(x) + Z(x)\big)|u_n|^{p(x)}\right)\\ &- \int_{\mathbb{R}^N}\left(\tilde{F}(x,u_n) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(x,u_n)u_n\right), \ \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Por (4.10) obtemos

$$\begin{aligned}\phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}\phi_\lambda'(u_n)u_n &\geq \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{\theta}\right)\left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + \big(\lambda V(x) + Z(x)\big)|u_n|^{p(x)} - \nu|u_n|^{p(x)}\right)\\ &\geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{\theta}\right)\left(\rho_\lambda(u_n) - \nu\rho_{p(x)}(u_n)\right), \ \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

De (4.2) deduzimos

$$\phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}\phi_\lambda'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{\theta}\right)\delta\rho_\lambda(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, pelo Corolário 1.1.17,

$$d + 1 + \max\left\{\rho_\lambda(u_n)^{1/p_-}, \rho_\lambda(u_n)^{1/p_+}\right\} \geq \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{\theta}\right)\delta\rho_\lambda(u_n), \ \forall n \geq n_0,$$

e (u_n) é limitada em E_λ. ■

4.2.3 A condição Palais-Smale

Proposição 4.2.3. *ϕ_λ é um funcional (PS), para todo $\lambda \geq 1$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para ϕ_λ. Pela Proposição 4.2.2, (u_n) é limitada em E_λ. Como E_λ é um espaço reflexivo, a menos de subsequência, existe $u \in E_\lambda$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E_λ. Além disso, utilizando que $E_\lambda \hookrightarrow W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ e as imersões compactas de Sobolev, obtemos

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ u_n \to u \text{ em } L^{m(x)}_{loc}(\mathbb{R}^N), \text{ se } 1 \leq m \ll p^*.$$

Afirmação 1. *Para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existe $R > 0$ tal que*

$$\limsup_n \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)}\left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + \big(\lambda V(x) + Z(x)\big)|u_n|^{p(x)}\right) < \epsilon.$$

Seja $R > 0$ suficientemente grande tal que $\Omega'_\Upsilon \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$ e $\eta_R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\eta_R(x) = \begin{cases} 0, \; x \in B_{\frac{R}{2}}(0) \\ 1, \; x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0) \end{cases},$$

$0 \leq \eta_R \leq 1$ e $|\nabla \eta_R| \leq \dfrac{C}{R}$, onde $C > 0$ independe de R. Então

$$\begin{aligned} I :=& \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + (\lambda V(x) + Z(x))|u_n|^{p(x)} \right) \eta_R \\ =& \phi'_\lambda(u_n)(u_n \eta_R) - \int_{\mathbb{R}^N} u_n |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \cdot \nabla \eta_R + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon} \tilde{f}(x, u_n) u_n \eta_R. \end{aligned}$$

De 4.7 obtemos

$$I \leq \phi'_\lambda(u_n)(u_n \eta_R) + \frac{C}{R} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n| |\nabla u_n|^{p(x)-1} + \nu \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p(x)} \eta_R.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder (Proposição 1.1.6) e a Proposição 1.1.5, deduzimos

$$I \leq \phi'_\lambda(u_n)(u_n \eta_R) + \frac{C}{R} |u_n|_{p(x)} \max \left\{ |\nabla u_n|_{p(x)}^{p_- - 1}, |\nabla u_n|_{p(x)}^{p_+ - 1} \right\} + \frac{\nu}{M} I.$$

Como (u_n) e $\left(|\nabla u_n|\right)$ são limitadas em $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + (\lambda V(x) + Z(x))|u_n|^{p(x)} \right) \leq o_n(1) + \frac{C}{R}.$$

Em consequência

$$\limsup_n \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + (\lambda V(x) + Z(x))|u_n|^{p(x)} \right) \leq \frac{C}{R}.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, escolhendo um $R > 0$ possivelmente ainda maior, temos $\dfrac{C}{R} < \epsilon$, o que demonstra a afirmação.

Afirmação 2. *As seguintes afirmativas são válidas:*

(a) $\int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u_n \to \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u) u$;

(b) $\int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) v \to \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u) v$, $\forall v \in E_\lambda$.

Dado $\epsilon > 0$, considere $R > 0$ como na Afirmação 1 e

$$I_1 = \int_{B_R(0)} |g(x, u_n) u_n - g(x, u) u| \;\text{ e }\; I_2 = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |g(x, u_n) u_n - g(x, u) u|.$$

Das fórmulas 4.3 e 4.6, obtemos

$$|g(x,t)t| \leq \nu |t|^{p(x)} + C_\nu |t|^{q(x)}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}.$$

Como para qualquer $1 \leq h \ll p^*$, a imersão $E_\lambda \hookrightarrow L^{h(x)}\big(B_R(0)\big)$ é compacta, utilizando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, concluímos que $I_1 \to 0$. Por outro lado, como $\mathbb{R}^N \setminus B_R(0) \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon$, de 4.7 deduzimos

$$\big|g(x,t)t\big| = \tilde{f}(x,t)t \leq \nu |t|^{p(x)}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0), t \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \nu |u_n|^{p(x)} + \nu \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u|^{p(x)} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \Big(\big|\nabla u_n\big|^{p(x)} + \big(\lambda V(x) + Z(x)\big)|u_n|^{p(x)} \Big) + \nu \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u|^{p(x)}. \end{aligned}$$

Como $u \in L^{p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$, aumentando $R > 0$ caso seja necessário, podemos admitir

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u|^{p(x)} < \frac{\epsilon}{\nu}.$$

Consequentemente, pela Afirmação 1, após passagem ao limite superior, obtemos

$$\limsup_n I_2 \leq 2\epsilon, \ \forall \epsilon > 0,$$

implicando que

$$\lim_n I_2 = 0.$$

Deste modo, temos (a). O raciocínio para (b) é análogo.

Afirmação 3. *Considerando*

$$P_n^1(x) = \Big(\big|\nabla u_n\big|^{p(x)-2} \nabla u_n - \big|\nabla u\big|^{p(x)-2} \nabla u \Big) \cdot \big(\nabla u_n - \nabla u\big)$$

e

$$P_n^2(x) = \big(|u_n|^{p(x)-2} u_n - |u|^{p(x)-2} u\big)\,(u_n - u),$$

é válido que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(P_n^1(x) + \big(\lambda V(x) + Z(x)\big) P_n^2(x) \Big) \to 0,$$

De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(P_n^1(x)+\big(\lambda V(x)+Z(x)\big)P_n^2(x)\Big) = \phi_\lambda'(u_n)u_n+\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n-\phi_\lambda'(u_n)u-\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u$$
$$-\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)+\big(\lambda V(x)+Z(x)\big)|u|^{p(x)-2}u(u_n-u)\Big).$$

Obviamente, $\phi_\lambda'(u_n)u_n$, $\phi_\lambda'(u_n)u$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N}\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)$$

são $o_n(1)$. Agora, observamos que o funcional linear $\psi_\lambda\colon E_\lambda\to\mathbb{R}$ definido como

$$\psi_\lambda(w)=\int_{\mathbb{R}^N}\big(\lambda V(x)+Z(x)\big)|u|^{p(x)-2}uw,$$

satisfaz, pela desigualdade de Hölder (Proposição 1.1.6), a estimativa

$$\psi_\lambda(w)\le 2\left|\big(\lambda V(x)+Z(x)\big)^{\frac{p(x)-1}{p(x)}}|u|^{p(x)-2}u\right|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}\left|\big(\lambda V(x)+Z(x)\big)^{\frac{1}{p(x)}}w\right|_{p(x)}$$

Desta maneira, se $\|w\|_\lambda\le 1$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N}\big(\lambda V(x)+Z(x)\big)|w|^{p(x)}\le\rho_\lambda(w)\le 1,$$

implicando que

$$\psi_\lambda(w)\le 2\left|\big(\lambda V(x)+Z(x)\big)^{\frac{p(x)-1}{p(x)}}|u|^{p(x)-2}u\right|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}},$$

isto é, ψ_λ é limitado. Assim

$$\int_{\mathbb{R}^N}\big(\lambda V(x)+Z(x)\big)|u|^{p(x)-2}u(u_n-u)$$

é também $o_n(1)$. Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(P_n^1(x)+\big(\lambda V(x)+Z(x)\big)P_n^2(x)\Big)=o_n(1)+\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n-\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u.$$

Da Afirmação 2, obtemos o desejado.

Para finalizar, observamos que os mesmos argumentos utilizados na demonstração da Proposição 2.2.4 implicam que $u_n\to u$ em E_λ, demonstrando que ϕ_λ é um funcional (PS). ∎

Teorema 4.2.4. *O problema* (A_λ) *possui uma solução (não-negativa), para todo* $\lambda\ge 1$.

Demonstração. O resultado segue diretamente do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti & Rabinowitz 1.3.7. ∎

4.3 A limitação das soluções para (A_λ)

Nesta seção estudamos a limitação no complementar de Ω'_Υ de algumas soluções para (A_λ). Com esta finalidade, adaptamos para o problema (A_λ) argumentos encontrados em Fan [44] e Fusco & Sbordone [50]. No que segue,

$$a_- = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} a(x).$$

Observamos que devido a (f_2), temos $a_- > 0$.

Proposição 4.3.1. *Seja (u_λ) uma família de soluções para (A_λ) com $u_\lambda \to 0$ em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)$, quando $\lambda \to \infty$. Então, existe $\lambda^* > 0$ tal que*

$$|u_\lambda|_{\infty, \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon} \leq a_-, \; \forall \lambda \geq \lambda^*.$$

Portanto, u_λ é uma solução para (P_λ) caso $\lambda \geq \lambda^*$.

Antes de demonstrar a proposição acima, necessitamos mostrar alguns lemas técnicos.

Lema 4.3.2. *Existem $x_1, \ldots, x_l \in \partial\Omega'_\Upsilon$ e correspondentes $\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_l} > 0$ tais que*

$$\partial\Omega'_\Upsilon \subset \mathcal{N}(\partial\Omega'_\Upsilon) := \bigcup_{i=1}^{l} B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i).$$

Além disso,

$$q_+^{x_i} \leq \left(p_-^{x_i}\right)^*, \tag{4.11}$$

onde

$$q_+^{x_i} = \sup_{B_{\delta_{x_i}}(x_i)} q, \; p_-^{x_i} = \inf_{B_{\delta_{x_i}}(x_i)} p \;\; e \;\; \left(p_-^{x_i}\right)^* = \frac{Np_-^{x_i}}{N - p_-^{x_i}}.$$

Demonstração. De (4.9), concluímos que $\overline{\Omega_\Upsilon} \subset \Omega'_\Upsilon$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$\overline{B_\delta(x)} \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega_\Upsilon}, \; \forall x \in \partial\Omega'_\Upsilon.$$

Como $q \ll p^*$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon \leq p^*(y) - q(y)$, para todo $y \in \mathbb{R}^N$. Então, por continuidade, para cada $x \in \partial\Omega'_\Upsilon$ podemos escolher $0 < \delta_x \leq \delta$ suficientemente pequeno tal que

$$q_+^x \leq \left(p_-^x\right)^*,$$

onde

$$q_+^x = \sup_{B_{\delta_x}(x)} q, \ p_-^x = \inf_{B_{\delta_x}(x)} p \ \text{ e } \ \left(p_-^x\right)^* = \frac{Np_-^x}{N - p_-^x}.$$

Cobrindo $\partial\Omega'_\Upsilon$ pelas bolas $B_{\frac{\delta_x}{2}}(x)$, $x \in \partial\Omega'_\Upsilon$, e utilizando sua compacidade, existem $x_1, \dots, x_l \in \partial\Omega'_\Upsilon$ tais que

$$\partial\Omega'_\Upsilon \subset \bigcup_{i=1}^{l} B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i).$$

■

Lema 4.3.3. *Se* u_λ *é uma solução para* (A_λ), *em cada* $B_{\delta_{x_i}}(x_i)$, $i = 1, \dots, l$, *dada pela Lema 4.3.2, é verificado que*

$$\int_{A_{k,\overline{\delta},x_i}} |\nabla u_\lambda|^{p_-^{x_i}} \le C\left(\left(k^{q_+} + 2\right)\left|A_{k,\widetilde{\delta},x_i}\right| + \left(\widetilde{\delta} - \overline{\delta}\right)^{-\left(p_-^{x_i}\right)^*} \int_{A_{k,\widetilde{\delta},x_i}} (u_\lambda - k)^{\left(p_-^{x_i}\right)^*}\right),$$

onde $0 < \overline{\delta} < \widetilde{\delta} < \delta_{x_i}$, $k \ge \dfrac{a_-}{4}$, $C = C\left(p_-, p_+, q_-, q_+, \nu, \delta_{x_i}\right) > 0$ *não depende de* k *e, para* $R > 0$,

$$A_{k,R,x_i} = B_R(x_i) \cap \left\{x \in \mathbb{R}^N;\, u_\lambda(x) > k\right\}.$$

Demonstração. Sejam $0 < \overline{\delta} < \widetilde{\delta} < \delta_{x_i}$ e $\xi \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que

$$0 \le \xi \le 1, \ \operatorname{supp} \xi \subset B_{\widetilde{\delta}}(x_i), \ \xi = 1 \text{ em } B_{\overline{\delta}}(x_i) \ \text{ e } \ |\nabla\xi| \le \frac{2}{\widetilde{\delta} - \overline{\delta}}.$$

Escrevemos $u_\lambda = u$ e, para $k \ge \dfrac{a_-}{4}$, definimos $\eta = \xi^{p_+}(u-k)^+$. Observamos que

$$\nabla\eta = p_+\xi^{p_+-1}(u-k)\nabla\xi + \xi^{p_+}\nabla u$$

em $\{u > k\}$. Agora, tomando η como uma função teste, obtemos

$$\begin{aligned} p_+ \int_{A_{k,\widetilde{\delta},x_i}} \xi^{p_+-1}(u-k)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla\xi + \int_{A_{k,\widetilde{\delta},x_i}} \xi^{p_+}|\nabla u|^{p(x)} \\ + \int_{A_{k,\widetilde{\delta},x_i}} \left(\lambda V(x) + Z(x)\right)u^{p(x)-1}\xi^{p_+}(u-k) = \int_{A_{k,\widetilde{\delta},x_i}} g(x,u)\xi^{p_+}(u-k). \end{aligned}$$

Definindo

$$J = \int_{A_{k,\widetilde{\delta},x_i}} \xi^{p_+}|\nabla u|^{p(x)},$$

e utilizando que $\nu \leq \lambda V(x) + Z(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, concluímos que

$$\begin{aligned} J \leq & p_+ \int_{A_{k,\tilde{\delta},x_i}} \xi^{p_+-1}(u-k)\left|\nabla u\right|^{p(x)-1}\left|\nabla \xi\right| \\ & - \int_{A_{k,\tilde{\delta},x_i}} \nu u^{p(x)-1}\xi^{p_+}(u-k) + \int_{A_{k,\tilde{\delta},x_i}} g(x,u)\xi^{p_+}(u-k). \end{aligned} \tag{4.12}$$

De (4.12), (4.3) e (4.6), deduzimos

$$\begin{aligned} J \leq & p_+ \int_{A_{k,\tilde{\delta},x_i}} \xi^{p_+-1}(u-k)\left|\nabla u\right|^{p(x)-1}\left|\nabla \xi\right| \\ & - \int_{A_{k,\tilde{\delta},x_i}} \nu u^{p(x)-1}\xi^{p_+}(u-k) + \int_{A_{k,\tilde{\delta},x_i}} \left(\nu u^{p(x)-1} + C_\nu u^{q(x)-1}\right)\xi^{p_+}(u-k), \end{aligned}$$

implicando que

$$J \leq p_+ \int_{A_{k,\tilde{\delta},x_i}} \xi^{p_+-1}(u-k)\left|\nabla u\right|^{p(x)-1}\left|\nabla \xi\right| + C_\nu \int_{A_{k,\tilde{\delta},x_i}} u^{q(x)-1}(u-k).$$

Da desigualdade de Young, para $\chi \in (0,1)$ obtemos

$$\begin{aligned} J \leq & \frac{p_+(p_+-1)}{p_-}\chi^{\frac{p_-}{p_+-1}} J + \frac{2^{p_+}p_+}{p_-}\chi^{-p_+} \int_{A_{k,\tilde{\delta},x_i}} \left(\frac{u-k}{\tilde{\delta}-\bar{\delta}}\right)^{p(x)} \\ & + \frac{C_\nu(q_+-1)}{q_-}\int_{A_{k,\tilde{\delta},x_i}} u^{q(x)} + \frac{C_\nu\left(1+\delta_{x_i}^{q_+}\right)}{q_-}\int_{A_{k,\tilde{\delta},x_i}} \left(\frac{u-k}{\tilde{\delta}-\bar{\delta}}\right)^{q(x)}. \end{aligned}$$

Escrevendo

$$Q = \int_{A_{k,\tilde{\delta},x_i}} \left(\frac{u-k}{\tilde{\delta}-\bar{\delta}}\right)^{\left(p_-^{x_i}\right)^*},$$

para $\chi \approx 0^+$ fixo, devido a (4.11), concluímos que

$$\begin{aligned} J \leq & \frac{1}{2}J + \frac{2^{p_+}p_+}{p_-}\chi^{-p_+}\left(\left|A_{k,\tilde{\delta},x_i}\right| + Q\right) + \frac{C_\nu 2^{q_+}(q_+-1)\left(1+\delta_{x_i}^{q_+}\right)}{q_-}\left(\left|A_{k,\tilde{\delta},x_i}\right| + Q\right) \\ & + \frac{C_\nu 2^{q_+}(q_+-1)(1+k^{q_+})}{q_-}\left|A_{k,\tilde{\delta},x_i}\right| + \frac{C_\nu\left(1+\delta_{x_i}^{q_+}\right)}{q_-}\left(\left|A_{k,\tilde{\delta},x_i}\right| + Q\right). \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{A_{k,\bar{\delta},x_i}} \left|\nabla u\right|^{p(x)} \leq J \leq C\left[\left(k^{q_+}+1\right)\left|A_{k,\tilde{\delta},x_i}\right| + Q\right].$$

para uma constante positiva $C = C\left(p_-, p_+, q_-, q_+, \nu, \delta_{x_i}\right)$ que não depende de k. Como

$$\left|\nabla u\right|^{p_-^{x_i}} - 1 \leq \left|\nabla u\right|^{p(x)},\ \forall x \in B_{\delta_{x_i}}(x_i),$$

obtemos

$$\int_{A_{k,\overline{\delta},x_i}} |\nabla u|^{p_-^{x_i}} \leq C\left[\left(k^{q_+}+1\right)\left|A_{k,\widetilde{\delta},x_i}\right| + Q\right] + \left|A_{k,\widetilde{\delta},x_i}\right|$$
$$\leq C\left(\left(k^{q_+}+2\right)\left|A_{k,\widetilde{\delta},x_i}\right| + \left(\widetilde{\delta}-\overline{\delta}\right)^{-\left(p_-^{x_i}\right)^*}\int_{A_{k,\widetilde{\delta},x_i}} (u-k)^{\left(p_-^{x_i}\right)^*}\right),$$

para uma constante positiva $C = C\left(p_-, p_+, q_-, q_+, \nu, \delta_{x_i}\right)$ que não depende de k. ■

A demonstração do próximo lema pode ser encontrada em [61, página 66].

Lema 4.3.4. *Seja* (J_n) *uma sequência de números não-negativos satisfazendo*

$$J_{n+1} \leq CB^n J_n^{1+\eta},\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde $C, \eta > 0$ *e* $B > 1$. *Se*

$$J_0 \leq C^{-\frac{1}{\eta}} B^{-\frac{1}{\eta^2}},$$

então $J_n \to 0$, *quando* $n \to \infty$.

Lema 4.3.5. *Seja* (u_λ) *uma família de soluções para* $\left(A_\lambda\right)$ *com* $u_\lambda \to 0$ *em* $W^{1,p(x)}\left(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon\right)$, *quando* $\lambda \to \infty$. *Então, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que*

$$|u_\lambda|_{\infty, \mathcal{N}\left(\partial\Omega'_\Upsilon\right)} \leq a_-,\ \forall \lambda \geq \lambda^*.$$

Demonstração. É suficiente demonstrar a afirmação em cada bola $B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i)$, $i = 1, \ldots, l$, dada pelo Lema 4.3.2. Sejam

$$\widetilde{\delta}_n = \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2^{n+1}},\ \overline{\delta}_n = \frac{\widetilde{\delta}_n + \widetilde{\delta}_{n+1}}{2},\ k_n = \frac{a_-}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right), n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Então

$$\widetilde{\delta}_n \downarrow \frac{\delta_{x_i}}{2}, \quad \widetilde{\delta}_{n+1} < \overline{\delta}_n < \widetilde{\delta}_n, \quad k_n \uparrow \frac{a_-}{2}.$$

Definimos

$$J_n(\lambda) = J_n = \int_{A_{k_n,\widetilde{\delta}_n,x_i}} \left(u_\lambda(x) - k_n\right)^{\left(p_-^{x_i}\right)^*}, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

e fixamos $\xi \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}\right)$ tal que

$$0 \leq \xi \leq 1,\ \xi(t) = 1,\ \text{se } t \leq \frac{1}{2},\ \text{ e } \xi(t) = 0,\ \text{se } t \geq \frac{3}{4}.$$

Sendo

$$\xi_n(x) = \xi\left(\frac{2^{n+1}}{\delta_{x_i}}\left(|x - x_i| - \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)\right), x \in \mathbb{R}^N, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

temos $\xi_n = 1$ em $B_{\widetilde{\delta}_{n+1}}(x_i)$ e $\xi_n = 0$ em $B^c_{\widetilde{\delta}_n}(x_i)$. Escrevendo $u_\lambda = u$, obtemos

$$
\begin{aligned}
J_{n+1} &\le \int_{A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}} \Big((u(x) - k_{n+1})\xi_n(x)\Big)^{\left(p_-^{x_i}\right)^*} \\
&= \int_{B_{\delta_{x_i}}(x_i)} \Big((u - k_{n+1})^+(x)\xi_n(x)\Big)^{\left(p_-^{x_i}\right)^*} \\
&\le C\big(N, p_-^{x_i}\big)\left(\int_{B_{\delta_{x_i}}(x_i)} \left|\nabla\big((u-k_{n+1})^+\xi_n\big)(x)\right|^{p_-^{x_i}}\right)^{\frac{\left(p_-^{x_i}\right)^*}{p_-^{x_i}}} \\
&\le C\big(N, p_-^{x_i}\big)\left(\int_{A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}} |\nabla u|^{p_-^{x_i}} + \int_{A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}} (u - k_{n+1})^{p_-^{x_i}}|\nabla \xi_n|^{p_-^{x_i}}\right)^{\frac{\left(p_-^{x_i}\right)^*}{p_-^{x_i}}}.
\end{aligned}
$$

Como

$$
|\nabla \xi_n(x)| \le C(\delta_{x_i})2^{n+1},\ \forall x \in \mathbb{R}^N,
$$

escrevendo $J_{n+1}^{\frac{p_-^{x_i}}{\left(p_-^{x_i}\right)^*}} = \widetilde{J}_{n+1}$, concluímos que

$$
\widetilde{J}_{n+1} \le C\Big(N, p_-^{x_i}, \delta_{x_i}\Big)\left(\int_{A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}} |\nabla u|^{p_-^{x_i}} + 2^{np_-^{x_i}}\int_{A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}} (u - k_{n+1})^{p_-^{x_i}}\right).
$$

Utilizando o Lema 4.3.3, deduzimos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{J}_{n+1} &\le C\Big(N, p_-^{x_i}, \delta_{x_i}\Big)\Bigg(\big(k_{n+1}^{q_+} + 2\big)\left|A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}\right| \\
&\quad + \left(\frac{2^{n+3}}{\delta_{x_i}}\right)^{\left(p_-^{x_i}\right)^*}\int_{A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}} (u - k_{n+1})^{\left(p_-^{x_i}\right)^*} + 2^{np_-^{x_i}}\int_{A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}} (u-k_{n+1})^{p_-^{x_i}}\Bigg) \\
&\le C\Big(N, p_-^{x_i}, \delta_{x_i}\Big)\Bigg(\big(k_{n+1}^{q_+} + 2\big)\left|A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}\right| \\
&\quad + 2^{n\left(p_-^{x_i}\right)^*}\int_{A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}} (u - k_{n+1})^{\left(p_-^{x_i}\right)^*} + 2^{np_-^{x_i}}\int_{A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}} (u-k_{n+1})^{p_-^{x_i}}\Bigg).
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Young, obtemos

$$
\int_{A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}} (u - k_{n+1})^{p_-^{x_i}} \le C\Big(p_-^{x_i}\Big)\left(\left|A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}\right| + \int_{A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}} (u-k_{n+1})^{\left(p_-^{x_i}\right)^*}\right).
$$

Portanto

$$
\widetilde{J}_{n+1} \le C\Big(N, p_-^{x_i}, \delta_{x_i}\Big)\left(\left(\left(\frac{a_-}{2}\right)^{q_+} + 2 + 2^{np_-^{x_i}}\right)\left|A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}\right| + 2^{n\left(p_-^{x_i}\right)^*}J_n + 2^{np_-^{x_i}}J_n\right).
$$

Por outro lado, como

$$J_n \geq \int_{A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}} (u-k_n)^{(p_-^{x_i})^*} \geq (k_{n+1}-k_n)^{(p_-^{x_i})^*} \left|A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}\right|$$

segue-se que

$$\left|A_{k_{n+1},\widetilde{\delta}_n,x_i}\right| \leq \left(\frac{2^{n+3}}{a_-}\right)^{(p_-^{x_i})^*} J_n$$

e, por conseguinte,

$$\widetilde{J}_{n+1} \leq C\Big(N, p_-^{x_i}, \delta_{x_i}, a_-, q_+\Big)\left(2^{n(p_-^{x_i})^*} J_n + 2^{n\left(p_-^{x_i}+(p_-^{x_i})^*\right)} J_n + 2^{n(p_-^{x_i})^*} J_n + 2^{np_-^{x_i}} J_n\right).$$

Seja $\alpha = \left(p_-^{x_i} + (p_-^{x_i})^*\right)$. Logo

$$J_{n+1} \leq C\Big(N, p_-^{x_i}, \delta_{x_i}, a_-, q_+\Big)\left(2^{\alpha\frac{(p_-^{x_i})^*}{p_-^{x_i}}}\right)^n J_n^{\frac{(p_-^{x_i})^*}{p_-^{x_i}}},$$

isto é,

$$J_{n+1} \leq CB^n J_n^{1+\eta},$$

onde $C = C\Big(N, p_-^{x_i}, \delta_{x_i}, a_-, q_+\Big)$, $B = 2^{\alpha\frac{(p_-^{x_i})^*}{p_-^{x_i}}}$ e $\eta = \frac{(p_-^{x_i})^*}{p_-^{x_i}} - 1$. Agora, como $u_\lambda \to 0$ em $W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon\big)$, $\lambda \to \infty$, e $W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon\big) \hookrightarrow L^{(p_-^{x_i})^*}\big(B_{\delta_{x_i}}(x_i)\big)$, existe $\lambda_i > 0$ tal que

$$J_0(\lambda) = \int_{A_{\frac{a_-}{4},\delta_{x_i},x_i}} \left(u_\lambda - \frac{a_-}{4}\right)^{(p_-^{x_i})^*} \leq \int_{A_{\frac{a_-}{4},\delta_{x_i},x_i}} u_\lambda^{(p_-^{x_i})^*} \leq C^{-\frac{1}{\eta}} B^{-\frac{1}{\eta^2}},\ \forall \lambda \geq \lambda_i$$

Pelo Lema 4.3.4, $J_n(\lambda) \to 0$, $n \to \infty$, para todo $\lambda \geq \lambda_i$ e, como

$$\int_{\frac{a_-}{2},\frac{\delta_{x_i}}{2},x_i} \left(u_\lambda - \frac{a_-}{2}\right)^{(p_-^{x_i})^*} \leq J_n(\lambda),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

segue-se que

$$u_\lambda \leq \frac{a_-}{2} < a_-,\ \text{em } B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i),\ \text{se } \lambda \geq \lambda_i.$$

Assim, considerando $\lambda^* = \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ concluímos que

$$|u_\lambda|_{\infty,\mathcal{N}(\partial\Omega'_\Upsilon)} < a_-,\ \forall \lambda \geq \lambda^*.$$

■

Demonstração da Proposição 4.3.1. Seja $\lambda \geq \lambda^*$, onde $\lambda^* > 0$ é dado no Lema 4.3.5. Definimos

$$\widetilde{u}_\lambda(x) = (u_\lambda - a_-)^+ (x), \;\; x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon.$$

Pelo Lema 4.3.5, podemos considerar $\widetilde{u}_\lambda \in W_0^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon\big)$. Demonstraremos que $\widetilde{u}_\lambda = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon$. Isto implica em

$$|u_\lambda|_{\infty, \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon} \leq a_-.$$

De fato, estendendo $\widetilde{u}_\lambda = 0$ em Ω'_Υ e tomando $\widetilde{u}_\lambda$ como função teste, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon} \left|\nabla u_\lambda\right|^{p(x)-2} \nabla u_\lambda \cdot \nabla \widetilde{u}_\lambda + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon} \big(\lambda V(x) + Z(x)\big) u_\lambda^{p(x)-2} u_\lambda \widetilde{u}_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon} g\left(x, u_\lambda\right) \widetilde{u}_\lambda.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon} \left|\nabla u_\lambda\right|^{p(x)-2} \nabla u_\lambda \cdot \nabla \widetilde{u}_\lambda = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon} \left|\nabla \widetilde{u}_\lambda\right|^{p(x)},$$

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon} \big(\lambda V(x) + Z(x)\big) u_\lambda^{p(x)-2} u_\lambda \widetilde{u}_\lambda = \int_{\left(\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon\right)_+} \big(\lambda V(x) + Z(x)\big) u_\lambda^{p(x)-2} \left(\widetilde{u}_\lambda + a_-\right) \widetilde{u}_\lambda$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon} g\left(x, u_\lambda\right) \widetilde{u}_\lambda = \int_{\left(\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon\right)_+} \frac{g\left(x, u_\lambda\right)}{u_\lambda} \left(\widetilde{u}_\lambda + a_-\right) \widetilde{u}_\lambda,$$

onde

$$\left(\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon\right)_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon ; \, u_\lambda(x) > a_-\right\},$$

concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon} \left|\nabla \widetilde{u}_\lambda\right|^{p(x)} + \int_{\left(\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon\right)_+} \left(\big(\lambda V(x) + Z(x)\big) u_\lambda^{p(x)-2} - \frac{g\left(x, u_\lambda\right)}{u_\lambda} \right) \left(\widetilde{u}_\lambda + a_-\right) \widetilde{u}_\lambda = 0,$$

Agora, devido a (4.6), em $\left(\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon\right)_+$ temos

$$\big(\lambda V(x) + Z(x)\big) u_\lambda^{p(x)-2} - \frac{g\left(x, u_\lambda\right)}{u_\lambda} > \nu u_\lambda^{p(x)-2} - \frac{\tilde{f}\left(x, u_\lambda\right)}{u_\lambda} \geq 0.$$

Desta maneira, $\widetilde{u}_\lambda = 0$ q.t.p. em $\left(\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon\right)_+$. Obviamente, $\widetilde{u}_\lambda = 0$ nos pontos em que $u_\lambda \leq a_-$ e, consequentemente, $\widetilde{u}_\lambda = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon$. ■

4.4 A condição $(PS)_\infty$

Definição 4.4.1. *Uma sequência* (u_n) *em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ *é dita uma* sequência $(PS)_\infty$ para a família $(\phi_\lambda)_{\lambda\geq 1}$ *se existe uma sequência* (λ_n) *em* $[1,\infty)$ *com* $\lambda_n \to \infty$*, quando* $n\to\infty$*, tal que*

$$\phi_{\lambda_n}(u_n)\to c \ \ e \ \ \left\|\phi'_{\lambda_n}(u_n)\right\|\to 0, \ \text{quando } n\to\infty.$$

Proposição 4.4.2. *Seja* (u_n) *em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ *uma sequência* $(PS)_\infty$ *para* $(\phi_\lambda)_{\lambda\geq 1}$*. Então, a menos de subsequência, existe* $u\in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $u_n\rightharpoonup u$ *em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$*. Além disso,*

(a) $\rho_{\lambda_n}(u_n-u)\to 0$ *e, consequentemente,* $u_n\to u$ *em* $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$*;*

(b) $u=0$ *em* $\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon$*,* $u\geq 0$ *e* $u_{|\Omega_j}$*,* $j\in\Upsilon$*, é uma solução para*

$$(P_j)\ \begin{cases} -\Delta_{p(x)}u+Z(x)|u|^{p(x)-2}u=f(x,u), \ \text{em } \Omega_j,\\ u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega_j);\end{cases}$$

(c) $\int_{\mathbb{R}^N}\lambda_n V(x)|u_n|^{p(x)}\to 0$*;*

(d) $\rho_{\lambda_n,\Omega'_j}(u_n)\to\int_{\Omega_j}\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)}+Z(x)|u|^{p(x)}\right)$, *se* $j\in\Upsilon$*;*

(e) $\rho_{\lambda_n,\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}(u_n)\to 0$*;*

(f) $\phi_{\lambda_n}(u_n)\to\int_{\Omega_\Upsilon}\frac{1}{p(x)}\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)}+Z(x)|u|^{p(x)}\right)-\int_{\Omega_\Upsilon}F(x,u)$.

Demonstração. Repetindo o raciocínio utilizando na demonstração da Proposição 4.2.2, obtemos que $\left(\rho_{\lambda_n}(u_n)\right)$ é limitado em $\mathbb{R}$. Por conseguinte, $\left(\|u_n\|_{\lambda_n}\right)$ é limitada em $\mathbb{R}$ e (u_n) é limitada em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$. Assim, a menos de subsequência, existe $u\in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n\rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ u_n(x)\to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Definimos agora, para cada $m\in\mathbb{N}$, o conjunto $C_m=\left\{x\in\mathbb{R}^N;\, V(x)\geq\dfrac{1}{m}\right\}$. Logo

$$\int_{C_m}|u_n|^{p(x)}\leq\frac{m}{\lambda_n}\int_{C_m}\lambda_n V(x)|u_n|^{p(x)}.$$

Sem perda de generalidade, podemos admitir que $\lambda_n<2(\lambda_n-1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Então

$$\int_{C_m}|u_n|^{p(x)}\leq\frac{2m}{\lambda_n}\int_{C_m}\big(\lambda_n V(x)+Z(x)\big)|u_n|^{p(x)}\leq\frac{2m}{\lambda_n}\rho_{\lambda_n}(u_n)\leq\frac{C}{\lambda_n},$$

sendo $C > 0$ uma constante que não depende de n. Do Lema de Fatou, deduzimos

$$\int_{C_m} |u|^{p(x)} \leq \liminf_n \int_{C_m} |u_n|^{p(x)} \leq \lim_n \frac{C}{\lambda_n} = 0.$$

Portanto

$$\int_{C_m} |u|^{p(x)} = 0,$$

implicando que $u = 0$ em C_m e, consequentemente, $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$. A partir disto, demonstramos:

(a) Como $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$, repetindo o argumento utilizado na Proposição 4.2.3, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(P_n^1(x) + \big(\lambda_n V(x) + Z(x)\big) P_n^2(x) \Big) \to 0,$$

onde

$$P_n^1(x) = \left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)-2} \nabla u_n - \left|\nabla u\right|^{p(x)-2} \nabla u \right) \cdot (\nabla u_n - \nabla u)$$

e

$$P_n^2(x) = \left(|u_n|^{p(x)-2} u_n - |u|^{p(x)-2} u \right) (u_n - u)$$

Portanto, $\rho_{\lambda_n}(u_n - u) \to 0$, implicando que $u_n \to u$ em $W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$;

(b) Como $u \in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$, podemos supor que $u \in W_0^{1,p(x)}\big(\Omega\big)$ ou, equivalentemente, $u_{|\Omega_j} \in W_0^{1,p(x)}\big(\Omega_j\big)$, para $j = 1, \ldots, k$. Afirmamos que

$$\int_{\Omega_j} \left(\left|\nabla u\right|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi + Z(x)|u|^{p(x)-2} u \varphi \right) - \int_{\Omega_j} g(x,u)\varphi = 0, \ \forall \varphi \in C_0^\infty\big(\Omega_j\big), \tag{4.13}$$

e, portanto, $u_{|\Omega_j}$ é uma solução para

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u + Z(x)|u|^{p(x)-2} u = g(x,u), \ \text{em } \Omega_j, \\ u \in W_0^{1,p(x)}\big(\Omega_j\big). \end{cases}$$

Deste modo, se $j \in \Upsilon$, então $u_{|\Omega_j}$ satisfaz (P_j). Caso contrário, obtemos

$$\int_{\Omega_j} \left(\left|\nabla u\right|^{p(x)} + Z(x)|u|^{p(x)} \right) - \int_{\Omega_j} \tilde{f}(x,u)u = 0.$$

Utilizando esta relação, (4.7) e (4.2), concluímos que

$$0 \geq \rho_{\lambda,\Omega_j}(u) - \nu\rho_{p(x),\Omega_j}(u) \geq \delta\rho_{\lambda,\Omega_j}(u) \geq 0, \text{ para qualquer } \lambda \geq 1,$$

de onde se segue que $u_{|\Omega_j} = 0$. Isto mostra que $u = 0$ fora de Ω_Υ e $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Devemos mostrar então (4.13). De fato, como $\phi'_{\lambda_n}(u_n)\varphi \to 0$, é suficiente que

$$d_n = \left|\phi'_{\lambda_n}(u_n)\varphi - \left(\int_{\Omega_j}\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi + Z(x)|u|^{p(x)-2}u\varphi\right) - \int_{\Omega_j} g(x,u)\varphi\right)\right| \to 0.$$

Agora

$$\begin{aligned} d_n \leq & \int_{\Omega_j}\left|\left|\nabla u_n\right|^{p(x)-2}\nabla u_n - \left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\nabla u\right|\left|\nabla\varphi\right| + K\int_{\Omega_j}\left||u_n|^{p(x)-2}u_n - |u|^{p(x)-2}u\right||\varphi| \\ & + \int_{\Omega_j}\left|\left(g(x,u_n) - g(x,u)\right)\varphi\right|. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder (Proposição 1.1.6), obtemos $C > 0$ independente de n tal que

$$d_n \leq C\big(A_1(n) + A_2(n)\big) + A_3(n),$$

onde

$$A_1(n) = \left|\left|\nabla u_n\right|^{p(x)-2}\nabla u_n - \left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\nabla u\right|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}},$$

$$A_2(n) = \left||u_n|^{p(x)-2}u_n - |u|^{p(x)-2}u\right|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}$$

e

$$A_3(n) = \int_{\Omega_j}\left|\left(g(x,u_n) - g(x,u)\right)\varphi\right|.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebegue, $A_3(n) = o_n(1)$. Quanto a $A_1(n)$, observe que sendo

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_j}\left|\left|\nabla u_n\right|^{p(x)-2}\nabla u_n - \left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\nabla u\right|^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \\ & \leq 2^{\frac{p_+}{p_--1}}\int_{\Omega_j}\left|\left|\nabla u_n\right|^{p(x)-2}\nabla u_n - \left|\nabla u_n - \nabla u\right|^{p(x)-2}(\nabla u_n - \nabla u) - \left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\nabla u\right|^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \\ & \quad + 2^{\frac{p_+}{p_--1}}\int_{\Omega_j}\left|\nabla u_n - \nabla u\right|^{p(x)}, \end{aligned}$$

pela Proposição 1.2.1, deduzimos $A_1(n) = o_n(1)$. O argumento para $A_2(n)$ é análogo. Consequentemente, $d_n \to 0$;

(c) Segue de (a), uma vez que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x)|u_n|^{p(x)} = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x)|u_n - u|^{p(x)} \leq 2\rho_{\lambda_n}(u_n - u);$$

(d) Seja $j \in \Upsilon$. Pelo item (a), concluímos que

$$\rho_{p(x),\Omega_j'}(u_n - u), \rho_{p(x),\Omega_j'}\big(\nabla u_n - \nabla u\big) \to 0.$$

Utilizando a Proposição 1.1.12, obtemos

$$\int_{\Omega_j'} \left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} - \left|\nabla u\right|^{p(x)}\right) \to 0, \int_{\Omega_j'} Z(x)\big(|u_n|^{p(x)} - |u|^{p(x)}\big) \to 0.$$

Do item (c),

$$\int_{\Omega_j'} \lambda_n V(x)\big(|u_n|^{p(x)} - |u|^{p(x)}\big) = \int_{\Omega_j' \setminus \overline{\Omega_j}} \lambda_n V(x)|u_n|^{p(x)} \to 0.$$

Assim,

$$\rho_{\lambda_n,\Omega_j'}(u_n) - \rho_{\lambda_n,\Omega_j'}(u) \to 0.$$

Como $u = 0$ em $\Omega_j' \setminus \Omega_j$, temos

$$\rho_{\lambda_n,\Omega_j'}(u_n) \to \int_{\Omega_j} \big(|\nabla u|^{p(x)} + Z(x)|u|^{p(x)}\big)\,;$$

(e) Pelo item (a), temos $\rho_{\lambda_n}(u_n - u) \to 0$. Disto

$$\rho_{\lambda_n,\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon}(u_n) \to 0,$$

pois $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$;

(f) Podemos escrever

$$\begin{aligned} \phi_{\lambda_n}(u_n) = &\sum_{j \in \Upsilon} \int_{\Omega_j'} \frac{1}{p(x)} \left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + \big(\lambda_n V(x) + Z(x)\big)|u_n|^{p(x)}\right) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon'} \frac{1}{p(x)} \left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + \big(\lambda_n V(x) + Z(x)\big)|u_n|^{p(x)}\right) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n). \end{aligned}$$

Raciocinando analogamente a (d) e (e), obtemos

$$\int_{\Omega_j'} \frac{1}{p(x)} \left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + \big(\lambda_n V(x) + Z(x)\big)|u_n|^{p(x)}\right) \to \int_{\Omega_j} \frac{1}{p(x)} \left(\left|\nabla u\right|^{p(x)} + Z(x)|u|^{p(x)}\right),$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_\Upsilon} \frac{1}{p(x)}\left(\left|\nabla u_n\right|^{p(x)} + \left(\lambda_n V(x) + Z(x)\right)|u_n|^{p(x)}\right) \to 0.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u_n) \to \int_{\Omega_\Upsilon} F(x,u).$$

Portanto

$$\phi_{\lambda_n}(u_n) \to \int_{\Omega_\Upsilon} \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + Z(x)|u|^{p(x)}\right) - \int_{\Omega_\Upsilon} F(x,u).$$

■

4.5 Um valor crítico especial para ϕ_λ

Para cada $j = 1,\dots,k$ e $\lambda \geq 1$, considere

$$I_j(u) = \int_{\Omega_j} \frac{1}{p(x)}\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)} + Z(x)|u|^{p(x)}\right) - \int_{\Omega_j} F(x,u),\ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_j),$$

o funcional energia correspondente a (P_j), e

$$\phi_{\lambda,j}(u) = \int_{\Omega'_j} \frac{1}{p(x)}\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)} + \left(\lambda V(x) + Z(x)\right)|u|^{p(x)}\right) - \int_{\Omega'_j} F(x,u),\ u \in W^{1,p(x)}(\Omega'_j),$$

o funcional energia correspondente a

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + \left(\lambda V(x) + Z(x)\right)|u|^{p(x)-2}u = f(x,u), \text{ em } \Omega'_j, \\ \hfill \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega'_j. \end{cases}$$

Verifica-se que I_j e $\phi_{\lambda,j}$ satisfazem a geometria do passo da montanha e sejam

$$c_j = \inf_{\gamma\in\Gamma_j}\max_{t\in[0,1]} I_j\big(\gamma(t)\big) \text{ e } c_{\lambda,j} = \inf_{\gamma\in\Gamma_{\lambda,j}}\max_{t\in[0,1]} \phi_{\lambda,j}\big(\gamma(t)\big),$$

os respectivos níveis do passo da montanha, onde

$$\Gamma_j = \left\{\gamma \in \mathcal{C}\Big([0,1], W_0^{1,p(x)}(\Omega_j)\Big)\,;\, \gamma(0) = 0 \text{ e } I_j\big(\gamma(1)\big) < 0\right\}$$

e

$$\Gamma_{\lambda,j} = \Big\{\gamma \in \mathcal{C}\Big([0,1], W^{1,p(x)}\big(\Omega_j'\big)\Big)\,;\, \gamma(0) = 0 \text{ e } \phi_{\lambda,j}\big(\gamma(1)\big) < 0\Big\}.$$

Invocando a condição (PS) sobre I_j e $\phi_{\lambda,j}$, garantimos a existência de $w_j \in W_0^{1,p(x)}\big(\Omega_j\big)$ e $w_{\lambda,j} \in W^{1,p(x)}\big(\Omega_j'\big)$ tais que

$$I_j\big(w_j\big) = c_j \text{ e } I_j'\big(w_j\big) = 0,$$
$$\phi_{\lambda,j}\big(w_{\lambda,j}\big) = c_{\lambda,j} \text{ e } \phi_{\lambda,j}'\big(w_{\lambda,j}\big) = 0.$$

Lema 4.5.1. *As seguintes afirmativas são válidas:*

(a) $0 < c_{\lambda,j} \le c_j$, $\forall \lambda \ge 1$, $\forall j \in \{1, \ldots, k\}$;

(b) $c_{\lambda,j} \to c_j$, *quando* $\lambda \to \infty$, $\forall j \in \{1, \ldots, k\}$.

Demonstração.

(a) Como $W_0^{1,p(x)}\big(\Omega_j\big) \subset W^{1,p(x)}\big(\Omega_j'\big)$, obtemos

$$\mathcal{C}\Big([0,1], W_0^{1,p(x)}\big(\Omega_j\big)\Big) \subset \mathcal{C}\Big([0,1], W^{1,p(x)}\big(\Omega_j'\big)\Big).$$

Para $\gamma \in \Gamma_j$, temos $\phi_{\lambda,j}\big(\gamma(1)\big) = I_j\big(\gamma(1)\big)$. Assim, $\Gamma_j \subset \Gamma_{\lambda,j}$. Portanto

$$c_{\lambda,j} = \inf_{\gamma \in \Gamma_{\lambda,j}} \max_{t \in [0,1]} \phi_{\lambda,j}\big(\gamma(t)\big) \le \inf_{\gamma \in \Gamma_j} \max_{t \in [0,1]} \phi_{\lambda,j}\big(\gamma(t)\big) = \inf_{\gamma \in \Gamma_j} \max_{t \in [0,1]} I_j\big(\gamma(t)\big) = c_j.$$

(b) É suficiente que $c_{\lambda_n,j} \to c_j$, quando $n \to \infty$, para quaisquer sequências (λ_n) em $[1,\infty)$ com $\lambda_n \to \infty$, quando $n \to \infty$. Seja (λ_n) uma tal sequência e considere uma subsequência arbitrária de $(c_{\lambda_n,j})$ (não renomeada) . Seja $w_n \in W^{1,p(x)}\big(\Omega_j'\big)$ tal que

$$\phi_{\lambda_n,j}\big(w_n\big) = c_{\lambda_n,j} \text{ e } \phi_{\lambda_n,j}'\big(w_n\big) = 0.$$

Pelo item (a), a sequência $\big(c_{\lambda_n,j}\big)$ é limitada, logo existe $\big(w_{n_k}\big)$ subsequência de $\big(w_n\big)$ tal que $\phi_{\lambda_{n_k},j}\big(w_{n_k}\big)$ converge e $\phi_{\lambda_{n_k},j}'\big(w_{n_k}\big) = 0$. Repetindo os mesmos tipos de argumentos explorados na demonstração da Proposição 4.4.2, existe $w \in W^{1,p(x)}\big(\Omega_j'\big)$ satisfazendo

$$w_{n_k} \to w \text{ em } \in W^{1,p(x)}\big(\Omega_j'\big), \text{ quando } k \to \infty.$$

Consequentemente,

$$w_{n_k} \to w \text{ em } \in L^{p(x)}\left(\Omega_j' \setminus \overline{\Omega_j}\right), \text{ quando } k \to \infty,$$

implicando que

$$\int_{\Omega_j' \setminus \overline{\Omega_j}} |w_{n_k}|^{p(x)} \to \int_{\Omega_j' \setminus \overline{\Omega_j}} |w|^{p(x)}, \text{ quando } k \to \infty.$$

Além disso, temos

$$\int_{\Omega_j' \setminus \overline{\Omega_j}} |w_{n_k}|^{p(x)} \to 0, \text{ quando } k \to \infty.$$

Portanto, $w = 0$ em $\Omega_j' \setminus \overline{\Omega_j}$, ou seja,

$$w \in W_0^{1,p(x)}\big(\Omega_j\big).$$

Agora, podemos mostrar que

$$c_{\lambda_{n_k},j} = \phi_{\lambda_{n_k},j}\big(w_{n_k}\big) \to I_j(w), \text{ quando } k \to \infty.$$

e

$$0 = \phi'_{\lambda_{n_k},j}\big(w_{n_k}\big) = I_j'(w).$$

Logo, devido a (f_4),

$$\lim_k c_{\lambda_{n_k},j} \geq c_j.$$

Esta última relação em conjunto com o item (a) implica que

$$c_{\lambda_{n_k},j} \to c_j, \text{ quando } k \to \infty,$$

o que estabelece o resultado assertado.

■

Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, escolha $R_j > 1$ tal que

$$0 < I_j\left(\frac{1}{R_j} w_j\right), I_j(R_j w_j) < c_j.$$

Se definimos

$$R = \min_{1 \leq j \leq k} R_j,$$

então

$$0 < I_j\left(\frac{1}{R}w_j\right), I_j(Rw_j) < c_j, \text{ para } j = 1, \dots, k. \tag{4.14}$$

Além disso, é válido

$$c_j = \max_{t\in[1/R^2,1]} I_j(tRw_j), \text{ para } j = 1, \dots, k.$$

Doravante, para simplificar a notação, renomeamos as componentes Ω_j de Ω de maneira que $\Upsilon = \{1, 2, \dots, l\}$, para algum $1 \leq l \leq k$. Então definimos:

$$\gamma_0(t_1, \dots, t_l)(x) = \sum_{j=1}^{l} t_j R w_j(x), \ \forall (t_1, \dots, t_l) \in [1/R^2, 1]^l,$$

$$\Gamma_* = \left\{\gamma \in \mathcal{C}\big([1/R^2, 1]^l, E_\lambda \setminus \{0\}\big) \,;\, \gamma = \gamma_0 \text{ sobre } \partial[1/R^2, 1]^l\right\}$$

e

$$b_{\lambda,\Upsilon} = \inf_{\gamma\in\Gamma_*} \max_{(t_1,\dots,t_l)\in[1/R^2,1]^l} \phi_\lambda\big(\gamma(t_1, \dots, t_l)\big).$$

Nossa intenção agora é demonstrar que $b_{\lambda,\Upsilon}$ é um valor crítico para ϕ_λ. Para isto, necessitamos de alguns lemas técnicos.

Lema 4.5.2. *Qualquer que seja* $\gamma \in \Gamma_*$*, existe* $(s_1, \dots, s_l) \in [1/R^2, 1]^l$ *tal que*

$$\phi'_{\lambda,j}\big(\gamma(s_1, \dots, s_l)\big)\big(\gamma(s_1, \dots, s_l)\big) = 0, \ \forall j \in \Upsilon.$$

Demonstração. Dado $\gamma \in \Gamma_*$, considere $\widetilde{\gamma}\colon [1/R^2, 1]^l \to \mathbb{R}^l$ tal que

$$\widetilde{\gamma}(\mathbf{t}) = \Big(\phi'_{\lambda,1}\big(\gamma(\mathbf{t})\big)\gamma(\mathbf{t}), \dots, \phi'_{\lambda,l}\big(\gamma(\mathbf{t})\big)\gamma(\mathbf{t})\Big), \text{ onde } \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_l).$$

Para $\mathbf{t} \in \partial[1/R^2, 1]^l$, é válido que $\widetilde{\gamma}(\mathbf{t}) = \widetilde{\gamma_0}(\mathbf{t})$. Disto, observamos que não existe $\mathbf{t} \in \partial[1/R^2, 1]^l$ com $\widetilde{\gamma}(\mathbf{t}) = 0$. Com efeito, para qualquer $j \in \Upsilon$,

$$\phi'_{\lambda,j}\big(\gamma_0(\mathbf{t})\big)\gamma_0(\mathbf{t}) = I'_j(t_j R w_j)(t_j R w_j).$$

Desta forma, se $\mathbf{t} \in \partial[1/R^2, 1]^l$, então $t_{j_0} = 1$ ou $t_{j_0} = \frac{1}{R^2}$, para algum $j_0 \in \Upsilon$. Consequentemente,

$$\phi'_{\lambda,j_0}\big(\gamma_0(\mathbf{t})\big)\gamma_0(\mathbf{t}) = I'_{j_0}(Rw_{j_0})(Rw_{j_0}) \text{ ou } \phi'_{\lambda,j_0}\big(\gamma_0(\mathbf{t})\big)\gamma_0(\mathbf{t}) = I'_{j_0}\left(\frac{1}{R}w_{j_0}\right)\left(\frac{1}{R}w_{j_0}\right).$$

Portanto, valendo $\phi'_{\lambda,j_0}\big(\gamma_0(\mathbf{t})\big)\gamma_0(\mathbf{t}) = 0$, obtemos $I_{j_0}(Rw_{j_0}) \geq c_{j_0}$ ou $I_{j_0}\left(\frac{1}{R}w_{j_0}\right) \geq c_{j_0}$, o que é uma contradição com (4.14).

Calculamos agora o grau $\deg\big(\widetilde{\gamma}, (1/R^2, 1)^l, (0, \ldots, 0)\big)$. Como

$$\deg\big(\widetilde{\gamma}, (1/R^2, 1)^l, (0, \ldots, 0)\big) = \deg\big(\widetilde{\gamma}_0, (1/R^2, 1)^l, (0, \ldots, 0)\big),$$

e, para $\mathbf{t} \in (1/R^2, 1)^l$,

$$\widetilde{\gamma}_0(\mathbf{t}) = 0 \iff \mathbf{t} = \left(\frac{1}{R}, \ldots, \frac{1}{R}\right),$$

concluímos que

$$\deg\big(\widetilde{\gamma}, (1/R^2, 1)^l, (0, \ldots, 0)\big) = (-1)^l \neq 0,$$

demonstrando a existência de $(s_1, \ldots, s_l) \in (1/R^2, 1)^l$ tal que

$$\phi'_{\lambda,j}\big(\gamma(s_1, \ldots, s_l)\big)\big(\gamma(s_1, \ldots, s_l)\big) = 0, \ \forall j \in \Upsilon.$$

∎

Proposição 4.5.3. *Se*

$$c_{\lambda,\Upsilon} = \sum_{j=1}^{l} c_{\lambda,j} \ \text{ e } \ c_\Upsilon = \sum_{j=1}^{l} c_j,$$

então

(a) $c_{\lambda,\Upsilon} \leq b_{\lambda,\Upsilon} \leq c_\Upsilon, \ \forall \lambda \geq 1$;

(b) $b_{\lambda,\Upsilon} \to c_\Upsilon$, *quando* $\lambda \to \infty$;

(c) $\phi_\lambda\big(\gamma(\mathbf{t})\big) < c_\Upsilon, \ \forall \lambda \geq 1, \gamma \in \Gamma_*$ *e* $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_l) \in \partial[1/R^2, 1]^l$.

Demonstração.

(a) Como $\gamma_0 \in \Gamma_*$, obtemos

$$b_{\lambda,\Upsilon} \leq \max_{(t_1,\ldots,t_l)\in[1/R^2,1]^l} \phi_\lambda\big(\gamma_0(t_1, \ldots, t_l)\big) = \max_{(t_1,\ldots,t_l)\in[1/R^2,1]^l} \sum_{j=1}^{l} I_j(t_j R w_j) = c_\Upsilon.$$

Fixando $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_l) \in [1/R^2, 1]^l$ dado no Lema 4.5.2 e recordando que

$$c_{\lambda,j} = \inf\left\{\phi_{\lambda,j}(u)\,;\, u \in W^{1,p(x)}\big(\Omega'_j\big) \setminus \{0\} \ \text{e} \ \phi'_{\lambda,j}(u)u = 0\right\},$$

segue-se que

$$\phi_{\lambda,j}\big(\gamma(s)\big) \geq c_{\lambda,j}, \ \forall j \in \Upsilon.$$

Como de (4.8) temos

$$\phi_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_\Upsilon}(u) \geq 0, \ \forall u \in W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N \setminus \Omega'_\Upsilon\big),$$

concluímos que

$$\phi_\lambda\big(\gamma(\mathbf{t})\big) \geq \sum_{j=1}^{l} \phi_{\lambda,j}\big(\gamma(\mathbf{t})\big), \ \forall \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_l) \in [1/R^2, 1]^l.$$

Logo

$$\max_{(t_1,\ldots,t_l)\in[1/R^2,1]^l} \phi_\lambda\big(\gamma(t_1, \ldots, t_l)\big) \geq \phi_\lambda\big(\gamma(s)\big) \geq c_{\lambda,\Upsilon},$$

e, portanto,

$$b_{\lambda,\Upsilon} \geq c_{\lambda,\Upsilon};$$

(b) É claro a partir do item anterior, pois já sabenos que $c_{\lambda,j} \to c_j$, quando $\lambda \to \infty$;

(c) Para $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_l) \in \partial[1/R^2, 1]^l$, é válido que $\gamma(\mathbf{t}) = \gamma_0(\mathbf{t})$. Disto,

$$\phi_\lambda\big(\gamma(\mathbf{t})\big) = \sum_{j=1}^{l} I_j(t_j R w_j).$$

Escrevendo

$$\phi_\lambda\big(\gamma(\mathbf{t})\big) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{l} I_j(t_j R w_j) + I_{j_0}(t_{j_0} R w_{j_0}),$$

onde $t_{j_0} \in \left\{\frac{1}{R^2}, 1\right\}$, de (4.14) deduzimos

$$\phi_\lambda\big(\gamma(\mathbf{t})\big) \leq c_\Upsilon - \epsilon,$$

para algum $\epsilon > 0$, mostrando (c).

■

Corolário 4.5.4. $b_{\lambda,\Upsilon}$ *é um valor crítico de* ϕ_λ*, para* λ *suficientemente grande.*

Demonstração. Suponha que $b_{\widetilde{\lambda},\Upsilon}$ não é um valor crítico de $\phi_{\widetilde{\lambda}}$, para algum $\widetilde{\lambda} > 0$. Mostraremos que existe λ_0 tal que $\widetilde{\lambda} < \lambda_0$. De fato, pelo item (c) da Proposição 4.5.3, temos

$$\phi_\lambda\big(\gamma_0(t)\big) < c_\Upsilon, \ \forall\lambda \geq 1, \ t \in \partial[1/R^2, 1]^l.$$

Deste modo

$$\mathcal{M} = \max_{t\in\partial[1/R^2,1]^l} \phi_{\widetilde{\lambda}}\big(\gamma_0(t)\big) < c_\Upsilon.$$

Pelo item (b) da Proposição 4.5.3, temos $b_{\lambda,\Upsilon} \to c_\Upsilon$, de onde existe $\lambda_0 > 0$ tal que se $\lambda \geq \lambda_0$, então

$$\mathcal{M} < b_{\lambda,\Upsilon}.$$

Portanto, se $\widetilde{\lambda} \geq \lambda_0$, podemos considerar $\tau = \tau(\widetilde{\lambda}) > 0$ suficientemente pequeno, com a propriedade de que

$$\mathcal{M} < b_{\widetilde{\lambda},\Upsilon} - 2\tau. \tag{4.15}$$

A partir do Lema de deformação [[82], página 38], existe $\eta\colon E_\lambda \to E_\lambda$ tal que

$$\eta\left(\phi_{\widetilde{\lambda}}^{b_{\widetilde{\lambda},\Upsilon}+\tau}\right) \subset \phi_{\widetilde{\lambda}}^{b_{\widetilde{\lambda},\Upsilon}-\tau} \ \text{ e } \ \eta(u) = u, \ \text{ para } u \notin \phi_{\widetilde{\lambda}}^{-1}\big([b_{\widetilde{\lambda},\Upsilon} - 2\tau, b_{\widetilde{\lambda},\Upsilon} + 2\tau]\big).$$

Então, de (4.15), obtemos

$$\phi_{\widetilde{\lambda}}\big(\gamma_0(t)\big) < b_{\widetilde{\lambda},\Upsilon} - 2\tau, \ \forall t \in \partial[1/R^2, 1]^l$$

e, consequentemente,

$$\eta\big(\gamma_0(t)\big) = \gamma_0(t), \ \forall t \in \partial[1/R^2, 1]^l.$$

Agora, utilizando a definição de $b_{\widetilde{\lambda},\Upsilon}$, existe $\gamma_* \in \Gamma_*$ com

$$\max_{t\in[1/R^2,1]^l} \phi_{\widetilde{\lambda}}\big(\gamma_*(t)\big) < b_{\widetilde{\lambda},\Upsilon} + \tau. \tag{4.16}$$

Definindo

$$\widetilde{\gamma}(t) = \eta\big(\gamma_*(t)\big), \ t \in [1/R^2, 1]^l,$$

devido a (4.16), temos

$$\phi_{\widetilde{\lambda}}\big(\widetilde{\gamma}(t)\big) \leq b_{\widetilde{\lambda},\Upsilon} - \tau, \ \forall t \in [1/R^2, 1]^l.$$

Mas, como

$$\widetilde{\gamma}(\mathbf{t}) = \eta\big(\gamma_0(\mathbf{t})\big) = \gamma_0(\mathbf{t}),\ \forall \mathbf{t} \in \partial[1/R^2, 1]^l,$$

concluímos que $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_*$. Desta forma,

$$b_{\widetilde{\lambda},\Upsilon} \leq \max_{\mathbf{t}\in[1/R^2,1]^l} \phi_{\widetilde{\lambda}}\big(\widetilde{\gamma}(\mathbf{t})\big) \leq b_{\widetilde{\lambda},\Upsilon} - \tau,$$

o que é uma contradição. Portanto, $\widetilde{\lambda} < \lambda_0$. ∎

4.6 A existência de soluções multi-bump para $\big(P_\lambda\big)$

Com o intuito de demonstrar o Teorema 4.1.1, necessitamos encontrar soluções não-negativas u_λ, para valores grandes de λ, as quais devem convergir em $W^{1,p(x)}\big(\mathbb{R}^N\big)$ para uma solução de energia mínima de (P_j) em cada Ω_j $(j \in \Upsilon)$ e para 0 em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$, quando $\lambda \to \infty$. Com esta finalidade, mostramos duas proposições que em conjunto com as Proposições 4.4.2 e 4.3.1 implicam o Teorema 4.1.1.

Doravante, denotamos por

$$r = R^{p_+} \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{1}{p_+} - \frac{1}{\theta}\right)^{-1} c_j, \quad \mathcal{B}_r^\lambda = \big\{u \in E_\lambda\,;\, \rho_\lambda(u) \leq r\big\}$$

e

$$\phi_\lambda^{c_\Upsilon} = \big\{u \in E_\lambda\,;\, \phi_\lambda(u) \leq c_\Upsilon\big\}.$$

Além disso, para valores pequenos de $\mu > 0$, também consideramos

$$\mathcal{A}_\mu^\lambda = \big\{u \in \mathcal{B}_r^\lambda\,;\, \rho_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}(u) \leq \mu,\ |\phi_{\lambda,j}(u) - c_j| \leq \mu,\ \forall j \in \Upsilon\big\}.$$

Observamos que

$$w = \sum_{j=1}^{l} w_j \in \mathcal{A}_\mu^\lambda \cap \phi_\lambda^{c_\Upsilon},$$

mostrando que $\mathcal{A}_\mu^\lambda \cap \phi_\lambda^{c_\Upsilon} \neq \emptyset$. Fixando

$$0 < \mu < \frac{1}{4}\min_{j\in\Gamma} c_j, \tag{4.17}$$

temos a seguinte estimativa uniforme $\big\|\phi_\lambda'(u)\big\|$ na região $\big(\mathcal{A}_{2\mu}^\lambda \setminus \mathcal{A}_\mu^\lambda\big) \cap \phi_\lambda^{c_\Upsilon}$.

Proposição 4.6.1. *Seja* $\mu > 0$ *satisfazendo* (4.17). *Então, existem* $\Lambda_* \geq 1$ *e* $\sigma_0 > 0$ *independente de* λ *tais que*

$$\left\|\phi_\lambda'(u)\right\| \geq \sigma_0, \text{ para } \lambda \geq \Lambda_* \text{ e } u \in \left(\mathcal{A}_{2\mu}^\lambda \setminus \mathcal{A}_\mu^\lambda\right) \cap \phi_\lambda^{c_\Upsilon}. \tag{4.18}$$

Demonstração. Suponhamos que existam $\lambda_n \to \infty$ e $u_n \in \left(\mathcal{A}_{2\mu}^{\lambda_n} \setminus \mathcal{A}_\mu^{\lambda_n}\right) \cap \phi_{\lambda_n}^{c_\Upsilon}$ tais que

$$\left\|\phi_{\lambda_n}'(u_n)\right\| \to 0.$$

Como $u_n \in \mathcal{A}_{2\mu}^{\lambda_n}$, isto implica que $\left(\rho_{\lambda_n}(u_n)\right)$ é uma sequência limitada e, consequentemente, segue-se que $\left(\phi_{\lambda_n}(u_n)\right)$ também é limitada. Portanto, passando a uma subsequência se necessário, podemos admitir que $\left(\phi_{\lambda_n}(u_n)\right)$ converge. Logo, da Proposição 4.4.2, existe $0 \leq u \in W_0^{1,p(x)}\left(\Omega_\Upsilon\right)$ tal que $u_{|\Omega_j}$, $j \in \Upsilon$, é uma solução para (P_j),

$$\rho_{\lambda_n, \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon}(u_n) \to 0 \text{ e } \phi_{\lambda_n, j}(u_n) \to I_j(u).$$

Sabemos que c_j é o nível de energia mínimo para I_j. Portanto, se $u_{|\Omega_j} \neq 0$, então $I_j(u) \geq c_j$. Agora, como $\phi_{\lambda_n}(u_n) \leq c_\Upsilon$, devemos analisar a seguintes possibilidades:

(i) $I_j(u) = c_j$, $\forall j \in \Upsilon$;

(ii) $I_{j_0}(u) = 0$, para algum $j_o \in \Upsilon$.

Se (i) ocorre, então para n suficientemente grande, é válido que

$$\rho_{\lambda_n, \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon}(u_n) \leq \mu \text{ e } |\phi_{\lambda_n, j}(u_n) - c_j| \leq \mu, \forall j \in \Upsilon.$$

Logo, $u_n \in \mathcal{A}_\mu^{\lambda_n}$, o que é uma contradição.

Se (ii) ocorre, então

$$|\phi_{\lambda_n, j_0}(u_n) - c_{j_0}| \to c_{j_0} > 4\mu,$$

o que é uma contradição com o fato de que $u_n \in \mathcal{A}_{2\mu}^{\lambda_n}$. Por conseguinte, a demonstração está terminada. ■

Proposição 4.6.2. *Sejam* $\mu > 0$ *satisfazendo* (4.17) *e* $\Lambda_* \geq 1$ *dado na Proposição 4.6.1. Então, para* $\lambda \geq \Lambda_*$, *existe uma solução* u_λ *de* (A_λ) *tal que* $u_\lambda \in \mathcal{A}_\mu^\lambda \cap \phi_\lambda^{c_\Upsilon}$.

Demonstração. Seja $\lambda \geq \Lambda_*$. Suponha que não existam pontos críticos de ϕ_λ em $\mathcal{A}_\mu^\lambda \cap \phi_\lambda^{c_\Upsilon}$. Como ϕ_λ é um funcional (PS), existe uma constante $d_\lambda > 0$ tal que

$$\left\|\phi_\lambda'(u)\right\| \geq d_\lambda, \text{ para qualquer } u \in \mathcal{A}_\mu^\lambda \cap \phi_\lambda^{c_\Upsilon}.$$

Da Proposição 4.6.1, temos

$$\left\|\phi_\lambda'(u)\right\| \geq \sigma_0, \text{ para qualquer } u \in \left(\mathcal{A}_{2\mu}^\lambda \setminus \mathcal{A}_\mu^\lambda\right) \cap \phi_\lambda^{c_\Upsilon},$$

onde $\sigma_0 > 0$ não depende de λ. No que se segue, $\Psi\colon E_\lambda \to \mathbb{R}$ é um funcional contínuo verificando

$$\Psi(u) = 1, \text{ para } u \in \mathcal{A}_{\frac{3}{2}\mu}^\lambda, \ \Psi(u) = 0, \text{ para } u \notin \mathcal{A}_{2\mu}^\lambda \text{ e } 0 \leq \Psi(u) \leq 1, \forall u \in E_\lambda.$$

Consideramos também $H\colon \phi_\lambda^{c_\Upsilon} \to E_\lambda$ definido por

$$H(u) = \begin{cases} -\Psi(u)\left\|Y(u)\right\|^{-1}Y(u), \text{ para } u \in \mathcal{A}_{2\mu}^\lambda, \\ 0, \text{ para } u \notin \mathcal{A}_{2\mu}^\lambda, \end{cases}$$

onde Y é um campo de vetores pseudo-gradiente para Φ_λ sobre $\mathcal{K} = \{u \in E_\lambda\,;\, \phi_\lambda'(u) \neq 0\}$. Observe que H está bem definido, uma vez que $\phi_\lambda'(u) \neq 0$, para $u \in \mathcal{A}_{2\mu}^\lambda \cap \phi_\lambda^{c_\Upsilon}$. A desigualdade

$$\left\|H(u)\right\| \leq 1, \forall \lambda \geq \Lambda_* \text{ e } u \in \phi_\lambda^{c_\Upsilon},$$

garante que o fluxo $\eta\colon [0, \infty) \times \phi_\lambda^{c_\Upsilon} \to \phi_\lambda^{c_\Upsilon}$ definido por

$$\frac{d\eta}{dt} = H(\eta), \ \eta(0, u) = u \in \phi_\lambda^{c_\Upsilon}$$

verifica

$$\frac{d}{dt}\phi_\lambda\big(\eta(t,u)\big) \leq -\frac{1}{2}\Psi\big(\eta(t,u)\big)\left\|\phi_\lambda'\big(\eta(t,u)\big)\right\| \leq 0, \tag{4.19}$$

$$\left\|\frac{d\eta}{dt}\right\|_\lambda = \left\|H(\eta)\right\|_\lambda \leq 1 \tag{4.20}$$

e

$$\eta(t,u) = u, \forall t \geq 0, u \in \phi_\lambda^{c_\Upsilon} \setminus \mathcal{A}_{2\mu}^\lambda. \tag{4.21}$$

Estudamos agora dois caminhos importantes para o que segue:

- O caminho $\mathbf{t} \mapsto \eta\big(t, \gamma_0(\mathbf{t})\big)$, onde $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_l) \in [1/R^2, 1]^l$.

Da definição de γ_0 combinada com a condição sobre μ, obtemos

$$\gamma_0(\mathbf{t}) \notin \mathcal{A}_{2\mu}^{\lambda}, \; \forall \mathbf{t} \in \partial[1/R^2, 1]^l.$$

Como

$$\phi_\lambda\big(\gamma_0(\mathbf{t})\big) < c_\Upsilon, \; \forall \mathbf{t} \in \partial[1/R^2, 1]^l,$$

de (4.21), segue-se que

$$\eta\big(t, \gamma_0(\mathbf{t})\big) = \gamma_0(\mathbf{t}), \; \forall \mathbf{t} \in \partial[1/R^2, 1]^l.$$

Portanto, $\eta\big(t, \gamma_0(\mathbf{t})\big) \in \Gamma_*$, para cada $t \geq 0$.

- O caminho $\mathbf{t} \mapsto \gamma_0(\mathbf{t})$, onde $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_l) \in [1/R^2, 1]^l$.

Observamos que

$$\text{supp}\big(\gamma_0(\mathbf{t})\big) \subset \overline{\Omega_\Upsilon}$$

e

$$\phi_\lambda\big(\gamma_0(\mathbf{t})\big) \text{ independe de } \lambda \geq 1,$$

para todo $\mathbf{t} \in [1/R^2, 1]^l$. Além disso,

$$\phi_\lambda\big(\gamma_0(\mathbf{t})\big) \leq c_\Upsilon, \; \forall \mathbf{t} \in [1/R^2, 1]^l$$

e

$$\phi_\lambda\big(\gamma_0(\mathbf{t})\big) = c_\Upsilon \text{ se, e somente se, } t_j = \frac{1}{R}, \; \forall j \in \Upsilon.$$

Portanto

$$m_0 = \sup\left\{\phi_\lambda(u)\,;\, u \in \gamma_0\big([1/R^2, 1]^l\big) \setminus A_\mu^\lambda\right\}$$

é independente de λ e $m_0 < c_\Upsilon$. Agora, observando que existe $K_* > 0$ tal que

$$\big|\phi_{\lambda,j}(u) - \phi_{\lambda,j}(v)\big| \leq K_* \|u - v\|_{\lambda,\Omega_j'}, \; \forall u, v \in \mathcal{B}_r^\lambda \text{ e } \forall j \in \Upsilon,$$

deduzimos

$$\max_{\mathbf{t} \in [1/R^2, 1]^l} \phi_\lambda\Big(\eta\big(T, \gamma_0(\mathbf{t})\big)\Big) \leq \max\left\{m_0, c_\Upsilon - \frac{1}{2K_*}\sigma_0 \mu\right\}, \tag{4.22}$$

para $T > 0$ grande.

De fato, escrevendo $u = \gamma_0(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in [1/R^2, 1]^l$, se $u \notin A_\mu^\lambda$, de (4.19),

$$\phi_\lambda\big(\eta(t,u)\big) \leq \phi_\lambda(u) \leq m_0, \ \forall t \geq 0,$$

e não temos mais nada a fazer. Assumimos então que $u \in A_\mu^\lambda$ e definimos

$$\widetilde{\eta}(t) = \eta(t,u), \ \widetilde{d}_\lambda = \min\{d_\lambda, \sigma_0\} \text{ e } T = \frac{\sigma_0\mu}{K_*\widetilde{d}_\lambda}.$$

Agora, analisamos os casos seguintes:

Caso 1: $\widetilde{\eta}(t) \in \mathcal{A}_{\frac{3}{2}\mu}^\lambda$, $\forall t \in [0,T]$.
Caso 2: $\widetilde{\eta}(t_0) \in \partial\mathcal{A}_{\frac{3}{2}\mu}^\lambda$, para algum $t_0 \in [0,T]$.

Análise do caso 1

Neste caso, temos $\Psi\big(\widetilde{\eta}(t)\big) = 1$ e $\big\|\phi_\lambda'\big(\widetilde{\eta}(t)\big)\big\| \geq \widetilde{d}_\lambda$ para todo $t \in [0,T]$. Logo, de (4.19),

$$\phi_\lambda\big(\widetilde{\eta}(T)\big) = \phi_\lambda(u) + \int_0^T \frac{d}{ds}\phi_\lambda\big(\widetilde{\eta}(s)\big)\,ds \leq c_\Upsilon - \frac{1}{2}\int_0^T \widetilde{d}_\lambda\,ds,$$

ou seja,

$$\phi_\lambda\big(\widetilde{\eta}(T)\big) \leq c_\Upsilon - \frac{1}{2}\widetilde{d}_\lambda T = c_\Upsilon - \frac{1}{2K_*}\sigma_0\mu,$$

mostrando (4.22).

Análise do caso 2

Neste caso, existem $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ satisfazendo

$$\widetilde{\eta}(t_1) \in \partial\mathcal{A}_\mu^\lambda,$$
$$\widetilde{\eta}(t_2) \in \partial\mathcal{A}_{\frac{3}{2}\mu}^\lambda,$$

e

$$\widetilde{\eta}(t) \in \mathcal{A}_{\frac{3}{2}\mu}^\lambda \setminus \mathcal{A}_\mu^\lambda, \ \forall t \in (t_1, t_2].$$

Afirmamos que

$$\big\|\widetilde{\eta}(t_2) - \widetilde{\eta}(t_1)\big\| \geq \frac{1}{2K_*}\mu.$$

Definindo $w_1 = \widetilde{\eta}(t_1)$ e $w_2 = \widetilde{\eta}(t_2)$, obtemos

$$\rho_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}(w_2) = \frac{3}{2}\mu \quad \text{ou} \quad \left|\phi_{\lambda,j_0}(w_2) - c_{j_0}\right| = \frac{3}{2}\mu,$$

para algum $j_0 \in \Upsilon$. Analisamos a última situação, uma vez que a primeira segue o mesmo raciocínio. Da definição de $\mathcal{A}_\mu^\lambda$,

$$\left|\phi_{\lambda,j_0}(w_1) - c_{j_0}\right| \le \mu,$$

consequentemente,

$$\|w_2 - w_1\| \ge \frac{1}{K_*}\left|\phi_{\lambda,j_0}(w_2) - \phi_{\lambda,j_0}(w_1)\right| \ge \frac{1}{2K_*}\mu.$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio, $t_2 - t_1 \ge \frac{1}{2K_*}\mu$ e, desta maneira,

$$\phi_\lambda\big(\widetilde{\eta}(T)\big) \le \phi_\lambda(u) - \int_0^T \Psi\big(\widetilde{\eta}(s)\big)\left\|\phi'_\lambda\big(\widetilde{\eta}(s)\big)\right\| ds$$

implicando que

$$\phi_\lambda\big(\widetilde{\eta}(T)\big) \le c_\Upsilon - \int_{t_1}^{t_2} \sigma_0\, ds = c_\Upsilon - \sigma_0(t_2 - t_1) \le c_\Upsilon - \frac{1}{2K_*}\sigma_0\mu,$$

o que demonstra 4.22. Fixando $\widehat{\eta}(t_1, \ldots, t_l) = \eta\big(T, \gamma_0(t_1, \ldots, t_l)\big)$, temos $\widehat{\eta} \in \Gamma_*$ e, portanto,

$$b_{\lambda,\Gamma} \le \max_{(t_1,\ldots,t_l)\in[1/R^2,1]} \phi_\lambda\big(\widehat{\eta}(t_1, \ldots, t_l)\big) \le \max\left\{m_0, c_\Upsilon - \frac{1}{2K_*}\sigma_0\mu\right\} < c_\Upsilon,$$

contradizendo o fato de que $b_{\lambda,\Upsilon} \to c_\Upsilon$, $\lambda \to \infty$. ■

Demonstração do Teorema 4.1.1. De acordo com a Proposição 4.6.2, para μ satisfazendo (4.17) e $\Lambda_* \ge 1$, existe uma solução u_λ para (A_λ) tal que $u_\lambda \in \mathcal{A}_\mu^\lambda \cap \phi_\lambda^{c_\Upsilon}$, qualquer que seja $\lambda \ge \Lambda_*$.

Afirmação: Existem $\lambda_0 \ge \Lambda_*$ e $\mu_0 > 0$ suficientemente pequeno, tais que u_λ é uma solução para $\big(P_\lambda\big)$ se $\lambda \ge \lambda_0$ e $\mu \in (0, \mu_0)$.

De fato, admita por contradição que existem $\lambda_n \to \infty$ e $\mu_n \to 0$ tais que (u_{λ_n}) não é uma solução para (P_{λ_n}). Da Proposição 4.6.2, a sequência (u_{λ_n}) verifica:

(i) $\phi'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\rho_{\lambda_n, \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon}(u_{\lambda_n}) \to 0$;

(iii) $\phi_{\lambda_n, j}(u_{\lambda_n}) \to c_j$, $\forall j \in \Upsilon$.

Por outro lado, do item (ii), podemos utilizar a Proposição 4.3.1 garantindo assim que u_{λ_n} é uma solução para (P_{λ_n}), para valores grandes de n, o que é uma contradição. Portanto, a afirmação é verdadeira.

Agora, nosso objetivo é demonstrar a segunda parte do teorema. Com esta finalidade, seja (u_{λ_n}) uma sequência verificando os limites acima. Como $\big(\phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})\big)$ é limitada, passando a uma subsequência, obtemos $\phi_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \to c$. Assim, utilizando a Proposição 4.4.2 combinada com o item (iii), deduzimos que u_{λ_n} converge em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ para uma função $u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, que satisfaz $u = 0$ fora de Ω_Υ e $u_{|\Omega_j}$, $j \in \Upsilon$, é uma solução de energia mínima para

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u + Z(x) u = f(u), \text{ em } \Omega_j, \\ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega_j), \; u \geq 0, \text{ em } \Omega_j. \end{cases}$$

■

Apêndices

Apêndice A

Espaços modulares

Neste apêndice apresentamos brevemente o conceito abstrato de espaço modular. Os espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis surgem naturalmente como exemplos concretos. Outros exemplos importantes de espaços modulares são os espaços de Orlicz.

Definição A.1. *Seja* X *um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial. Um funcional* $\rho\colon X \to [0,\infty]$ *é denominado uma* modular *sobre* X *se satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $\rho(x) = 0 \iff x = 0$;

(b) $\rho(-x) = \rho(x)$, $\forall x \in X$;

(c) ρ *é convexo, ou seja,*

$$\rho\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)\rho(x) + t\rho(y),\ \forall x, y \in X,\ t \in [0,1];$$

(d) *Para cada* $x \in X \setminus \{0\}$, *a função* $\lambda \mapsto \rho(\lambda x)$ *é contínua em* $[0,\infty)$.

Observação A.2. *A função no item* (d) *da definição acima é crescente. De fato, fixado* $x \neq 0$, *sejam* $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ *e* $\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. *Então, pela convexidade de* ρ, *segue-se que*

$$\rho(\lambda_1 x) \leq \alpha\rho(\lambda_2 x) + (1-\alpha)\rho(0).$$

Como $\rho(0) = 0$, *obtemos*

$$\rho(\lambda_1 x) \leq \rho(\lambda_2 x).$$

Observação A.3. *Se* $|\lambda| < 1$*, novamente pela convexidade de* ρ*, segue-se que*

$$\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda| x) \leq |\lambda| \rho(x).$$

Caso $|\lambda| > 1$*, utilizando a desigualdade anterior, concluímos que*

$$\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda| x) \geq |\lambda| \rho(x).$$

Definição A.4. *Um* espaço modular *é um par* (X, ρ)*, onde* X *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial e* ρ *uma modular sobre* X*.*

A proposição seguinte mostra que o par $\left(L^{h(x)}(\Omega), \rho_{h(x)}\right)$, onde

$$\rho_{h(x)}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{h(x)}\, dx,$$

é um espaço modular.

Proposição A.5. *Para quaisquer* $u, v \in L^{h(x)}(\Omega)$*, é válido que*

(a) $\rho_{h(x)}(u) = 0 \iff u = 0$;

(b) $\rho_{h(x)}(-u) = \rho_{h(x)}(u)$;

(c) $\rho_{h(x)}\big((1-t)u + tv\big) \leq (1-t)\rho_{h(x)}(u) + t\rho_{h(x)}(v),\ \forall\, t \in [0, 1]$;

(d) $\forall u \in L^{h(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$, $\lambda \mapsto \rho_{h(x)}(\lambda u)$ *é contínua em* $[0, \infty)$.

Demonstração.

(c) É suficiente observar que

$$\varphi(x, s) = |s|^{h(x)},\ x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},$$

é convexa em s, q.t.p. em Ω.

(d) Fixe $u \in L^{h(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ e seja (λ_n) uma sequência em $[0, \infty)$ tal que $\lambda_n \to \lambda$. Então

$$\phi_n(x) = |\lambda_n u(x)|^{h(x)} \to \phi(x) = |\lambda u(x)|^{h(x)},\ \text{q.t.p. em } \Omega,$$

e existe $K > 0$ tal que $\psi(x) = K|u(x)|^{h(x)}$ satisfaz

$$\phi_n \leq \psi,\ \forall n \geq 1.$$

Utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebegue, obtemos

$$\rho_{h(x)}\big(\lambda_n u\big) = \int_{\Omega} \phi_n(x)\, dx \to \int_{\Omega} \phi(x)\, dx = \rho_{h(x)}\big(\lambda u\big).$$

Portanto, $\rho_{h(x)}\big(\lambda u\big)$ é contínua em $\lambda \geq 0$.

■

Analogamente, mostra-se que o par $\big(W^{1,p(x)}\big(\Omega\big), \rho_{1,h(x)}\big)$, onde

$$\rho_{1,h(x)}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla u\right|^{h(x)} + |u|^{h(x)}\right) dx,$$

é um espaço modular.

Proposição A.6. *Seja* (X, ρ) *um espaço modular. Então,* X *é um espaço normado. A norma considerada sobre* X *é denominada* norma de Luxemburg *e definida como*

$$|x|_\rho = \inf\left\{\lambda > 0\,;\, \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Demonstração. Fixado $x \neq 0$, da Observação A.3 segue-se que $|x|_\rho < \infty$, mostrando que $|\cdot|_\rho$ é de fato uma função à valores reais. Evidentemente $|0|_\rho = 0$. Por outro lado, se $|x|_\rho = 0$, existe uma sequência (λ_n) contida em (0,1) tal que $\lambda_n \to 0$ e

$$\rho\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, pela Observação A.3, se $x \neq 0$, então

$$\rho\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \to \infty,$$

o que é um absurdo. Portanto, devemos ter $x = 0$.

Mostremos que $|\alpha x|_\rho = |\alpha||x|_\rho$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Óbvio para $\alpha = 0$ e $\alpha = -1$, de modo que é suficiente considerarmos $\alpha > 0$. Seja $\lambda > 0$. Então

$$\rho\left(\frac{(\alpha x)}{\lambda}\right) \leq 1 \Longrightarrow \frac{\lambda}{\alpha} \geq |x|_\rho \Longrightarrow \lambda \geq \alpha|x|_\rho.$$

Logo, $|\alpha x|_\rho \geq \alpha|x|_\rho$. Analogamente, obtemos a desigualdade oposta. Assim,

$$|\alpha x|_\rho = \alpha|x|_\rho,\ \forall \alpha > 0.$$

Finalmente mostremos a desigualdade triangular. Sejam $x, y \in X$. Dado $\epsilon > 0$, pela definição de ínfimo, existem $|x|_\rho \leq \lambda_x < |x|_\rho + \frac{\epsilon}{2}$ e $|y|_\rho \leq \lambda_y < |y|_\rho + \frac{\epsilon}{2}$ tais que

$$\rho\left(\frac{x}{\lambda_x}\right), \rho\left(\frac{y}{\lambda_y}\right) \leq 1.$$

Então, pela convexidade de ρ,

$$\rho\left(\frac{x+y}{\lambda_x+\lambda_y}\right) \leq \frac{\lambda_x}{\lambda_x+\lambda_y}\rho\left(\frac{x}{\lambda_x}\right) + \frac{\lambda_y}{\lambda_x+\lambda_y}\rho\left(\frac{y}{\lambda_y}\right) \leq 1,$$

mostrando que $|x+y|_\rho \leq \lambda_x + \lambda_y$ e, portanto,

$$|x+y|_\rho \leq |x|_\rho + |y|_\rho + \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, segue-se que

$$|x+y|_\rho \leq |x|_\rho + |y|_\rho.$$

■

Proposição A.7 (Propriedade da bola unitária). *Seja* (X, ρ) *um espaço modular. Então*

$$|x|_\rho < 1 (|x|_\rho = 1) \iff \rho(x) < 1 (\rho(x) = 1).$$

Demonstração. Suponhamos $0 < |x|_\rho = a < 1$ e seja $\epsilon > 0$ tal que $a + \epsilon < 1$. Pela definição de ínfimo, existe $a \leq \lambda_\epsilon < a+\epsilon$ tal que $\rho\left(\frac{x}{\lambda_\epsilon}\right) \leq 1$. Mas então, pela Observação A.3,

$$\rho(x) \leq \lambda_\epsilon \rho\left(\frac{x}{\lambda_\epsilon}\right) \leq \lambda_\epsilon < 1.$$

Reciprocamente, supondo $\rho(x) < 1$, pela continuidade da função

$$\lambda \in [0, \infty) \mapsto \rho(\lambda x),$$

existe $\lambda_0 > 1$ tal que $\rho(\lambda_0 x) < 1$. Assim, pela definição da norma de Luxemburg,

$$|x|_\rho \leq \frac{1}{\lambda_0} < 1.$$

Suponhamos agora $|x|_\rho = 1$ e seja $\lambda_n \to 1$ tal que $\rho\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \leq 1$. Após passagem ao limite quando $n \to \infty$ na desigualdade anterior, obtemos $\rho(x) \leq 1$. Como $\rho(x) < 1$ implica $|x|_\rho < 1$, necessariamente

$$\rho(x) = 1.$$

Reciprocamente, se $\rho(x) = 1$, então $|x|_\rho \leq 1$. Como $|x|_\rho < 1$ implica $\rho(x) < 1$, obrigatoriamente

$$|x|_\rho = 1.$$

■

Observação A.8. *Suponhamos que* $0 < |x|_\rho < 1$. *Então, pela Observação A.3 e Proposição A.7, obtemos*

$$\rho(x) = \rho\left(|x|_\rho \frac{x}{|x|_\rho}\right) \leq |x|_\rho \rho\left(\frac{x}{|x|_\rho}\right) = |x|_\rho.$$

Analogamente, quando $|x|_\rho > 1$ *mostra-se que*

$$\rho(x) \geq |x|_\rho.$$

Proposição A.9. *Seja* (X, ρ) *um espaço modular e* (x_k) *uma sequência em* X. *Então,*

$$|x_k|_\rho \to 0 \iff \rho(\lambda x_k) \to 0, \forall \lambda > 0.$$

Demonstração. Na hipótese de que $|x_k|_\rho \to 0$, dado $\lambda > 0$ arbitrariamente, temos também $|\lambda x_k|_\rho \to 0$. Assim, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\lambda x_k|_\rho < 1, \forall k \geq k_0,$$

e, utilizando a Observação A.8, temos

$$\rho(\lambda x_k) \leq |\lambda x_k|_\rho, \forall k \geq k_0,$$

implicando que

$$\rho(\lambda x_k) \to 0.$$

Reciprocamente, dado $\epsilon > 0$, fixe $\lambda > 0$ tal que $\frac{1}{\lambda} < \epsilon$. Como $\rho(\lambda x_k) \to 0$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(\lambda x_k) \leq 1, \forall k \geq k_1.$$

Logo

$$|x_k|_\rho \leq \frac{1}{\lambda} < \epsilon, \forall k \geq k_1,$$

mostrando que

$$|x_k|_\rho \to 0.$$

■

Dado um espaço modular (X, ρ) e uma sequência (x_k) em X, pela Observação A.8, é claro que

$$|x_k|_\rho \to 0 \Longrightarrow \rho(x_k) \to 0.$$

A recíproca é verdadeira para a classe de modulares descritas na próxima definição.

Definição A.10. *Seja* (X, ρ) *um espaço modular. Dizemos que* ρ *satisfaz a* condição Δ_2 *se para uma sequência* (x_k) *em* X *é válido*

$$\rho(x_k) \to 0 \Longrightarrow \rho(2x_k) \to 0.$$

Proposição A.11. *Seja* (X, ρ) *um espaço modular tal que* ρ *satisfaz a* condição Δ_2. *Então,*

$$\rho(x_k) \to 0 \Longrightarrow |x_k|_\rho \to 0.$$

Demonstração. Pela Proposição A.9, devemos mostrar que

$$\rho(\lambda x_k) \to 0, \ \forall \lambda > 0.$$

Seja então $\lambda > 0$ fixado arbitrariamente. Escolhemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m \geq \lambda$. Por aplicação repetida da hipótese obtemos

$$\rho\big(2^m x_k\big) \to 0.$$

Portanto, pela Observação A.3,

$$0 \leq \lim_{k \to \infty} \rho(\lambda x_k) \leq \frac{\lambda}{2^m} \lim_{k \to \infty} \rho(2^m x_k) = 0,$$

mostrando que

$$\rho(\lambda x_k) \to 0,$$

como queríamos. ■

Observação A.12. *Verifica-se facilmente que as modulares consideradas anteriormente sobre* $L^{h(x)}\big(\Omega\big)$ *e* $W^{1,h(x)}\big(\Omega\big)$ *satisfazem a condição* Δ_2. *Portanto, dada uma sequência* (u_k)*, digamos em* $L^{h(x)}\big(\Omega\big)$*, tem-se*

$$|u_k|_{\rho_{h(x)}} \to 0 \iff \rho_{h(x)}(u_k) \to 0.$$

Apêndice B

Uma Aplicação do Método de Iteração de Moser ao Problema (P_∞)

Neste apêndice demonstramos que adicionando a hipótese (H_5) às hipóteses do Teorema 2.2.1, deduzimos uma importante estimativa na norma L^∞ para a solução $u_\infty \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$ obtida neste teorema. Mais precisamente, demonstramos o seguinte resultado:

Teorema B.1. *Relativamente ao problema* (P_∞), *assuma que além das hipóteses* (H_1), (H_2), (H_3) *e* (H_7) *apresentadas no capítulo 2, seja válida também a hipótese* (H_5). *Então, a solução* $u_\infty = u$ *obtida no Teorema 2.2.1 satisfaz a seguinte estimativa*

$$|u_n|_{L^\infty(B_{R_2}(z))} \leq C|u|_{L^{m^*}(B_{R_1}(z+x_n))}, \text{ para } R < R_2 < R_1, \tag{B.1}$$

onde $C > 0$ *é independente de* n, $x_n = (n, 0, \ldots, 0)$ *e*

$$u_n(x) = u(x + x_n).$$

A ferramenta básica que utilizamos é o Método de Iteração de Moser (*vide* Moser [67], Gongbao [62] ou Alves & Figueiredo [16]). Além disso, o seguinte resultado de Teoria da Medida também é utilizado.

Lema B.2. *Se* $\varphi \in L^s(\mathbb{R}^N)$, $\forall s \in [p, \infty)$, *onde* $p \geq 1$, *e existe* $C > 0$ *tal que*

$$|\varphi|_s \leq C, \forall s \in [p, \infty),$$

então $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e*

$$|\varphi|_\infty \leq C.$$

Demonstração. Inicialmente fixamos $\epsilon > 0$ arbitrariamente e consideramos o conjunto

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |\varphi(x)| \geq C + \epsilon\}.$$

O objetivo é mostrar que

$$|Z| = 0.$$

Observamos em primeiro lugar que $|Z| < \infty$, pois caso contrário $\varphi \notin L^p(\mathbb{R}^N)$, contradizendo a hipótese. Em segundo lugar, dado qualquer $s \geq p$, temos por hipótese

$$(C + \epsilon)|Z|^{\frac{1}{s}} \leq |\varphi|_s \leq C.$$

Assim, se $|Z| > 0$, após passagem ao limite quando $s \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$C + \epsilon \leq C,$$

o que é um absurdo. Logo,

$$|Z| = 0.$$

■

Demonstração do Teorema B.1. Em primeiro lugar, fixamos uma sequência (r_j) de números reais tais que $r_j \downarrow R_2$ e $R_2 < r_j < R_1$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Para cada $j, n \in \mathbb{N}$ e $l > 0$ consideramos

$$u_{n,l}(x) = \begin{cases} u_n(x), & \text{se } u_n(x) \leq l \\ l, & \text{se } u_n(x) > l \end{cases},$$

$$z_{n,l}(x) = z_{n,l,j}(x) = \left(\eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)} u_n\right)(x)$$

e

$$w_{n,l}(x) = w_{n,l,j}(x) = \left(\eta u_{n,l}^{\beta-1} u_n\right)(x),$$

onde $\eta = \eta_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfaz $0 \leq \eta \leq 1$,

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_{r_{j+1}}(z) \\ 0, & \text{se } x \in B^c_{r_j}(z) \end{cases}.$$

e $\left|\nabla\eta\right| \leq \frac{2}{r_{j+1}}$. O número $\beta > 1$ será escolhido adiante convenientemente. Observamos que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos

$$u_{n,l}(x) \to u(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \text{ quando } \ l \to \infty.$$

Considerando $z_{n,l}$ como função teste e utilizando a hipótese (H_5), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_j}(z)} \eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)}\left|\nabla u_n\right|^m &= -\int_{B_{r_j}(z)} m\eta^{m-1}u_{n,l}^{m(\beta-1)}u_n\left|\nabla u_n\right|^{m-2}\nabla u_n\cdot\nabla\eta \\ &- \int_{B_{r_j}(z)} m(\beta-1)\eta^m u_{n,l}^{m\beta-m-1}u_n\left|\nabla u_n\right|^{m-2}\nabla u_n\cdot\nabla u_{n,l} \\ &- \int_{B_{r_j}(z)} V(x)\eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)}u_n^m + \int_{B_{r_j}(z)} f(x,u_n)\eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)}u_n.\end{aligned}$$

onde

$$f(x,\zeta) = \mu|\zeta|^{q(x)-2}\zeta + |\zeta|^{p^*(x)-2}\zeta,\ \forall x \in \mathbb{R}^N, \zeta \in \mathbb{R}.$$

Das hipóteses (H_3) e (H_5), dado $\xi > 0$, existe $C_\xi > 0$ tal que

$$|f(x,\zeta)| \leq \xi|\zeta|^{m-1} + C_\xi|\zeta|^{m^*-1},\ \forall x \in B_{R_1}(z), \zeta \in \mathbb{R}.$$

Fixando $\xi \approx 0^+$ tal que $\xi - V_0 \leq 0$, deduzimos

$$\begin{aligned}&\int_{B_{r_j}(z)} \eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)}\left|\nabla u_n\right|^m \\ &\leq m\int_{B_{r_j}(z)} \eta^{m-1}u_{n,l}^{m(\beta-1)}u_n\left|\nabla u_n\right|^{m-2}\big(-\nabla u_n\big)\cdot\nabla\eta + C\int_{B_{r_j}(z)} \eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)}u_n^{m^*}.\end{aligned}$$

Da desigualdade de Young, para cada $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_j}(z)} \eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)}\left|\nabla u_n\right|^m &\leq m\epsilon\int_{B_{r_j}(z)} \eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)}\left|\nabla u_n\right|^m \\ &+ mC_\epsilon\int_{B_{r_j}(z)} u_{n,l}^{m(\beta-1)}u_n^m\left|\nabla\eta\right|^m + C\int_{B_{r_j}(z)} \eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)}u_n^{m^*}.\end{aligned}$$

Fixando $\epsilon \approx 0^+$ tal que $1 - m\epsilon > 0$, concluímos que

$$\int_{B_{r_j}(z)} \eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)}\left|\nabla u_n\right|^m \leq C\left(\int_{B_{r_j}(z)} u_{n,l}^{m(\beta-1)}u_n^m\left|\nabla\eta\right|^m + \int_{B_{r_j}(z)} \eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)}u_n^{m^*}\right). \quad \text{(B.2)}$$

Observamos agora que das imersões contínuas de Sobolev, temos

$$
\begin{aligned}
|w_{n,l}|^m_{L^{m^*}(B_{r_j}(z))} &\leq C\int_{B_{r_j}(z)} \left|\nabla w_{n,l}\right|^m \\
&\leq C\int_{B_{r_j}(z)} \left(\eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)}\left|\nabla u_n\right|^m + (\beta-1)^m\eta^m u_{n,l}^{m(\beta-2)}u_n^m\left|\nabla u_{n,l}\right|^m + u_{n,l}^{m(\beta-1)}u_n^m\left|\nabla\eta\right|^m\right),
\end{aligned}
$$

para uma constante $C > 0$ que independe tanto de j quanto de n. Como

$$
\int_{B_{r_j}(z)} \eta^m u_{n,l}^{m(\beta-2)}u_n^m\left|\nabla u_{n,l}\right|^m \leq \int_{B_{r_j}(z)} \eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)}\left|\nabla u_n\right|^m,
$$

segue-se que

$$
|w_{n,l}|^m_{L^{m^*}(B_{r_j}(z))} \leq C\beta^m\left(\int_{B_{r_j}(z)} \eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)}\left|\nabla u_n\right|^m + \int_{B_{r_j}(z)} u_{n,l}^{m(\beta-1)}u_n^m\left|\nabla\eta\right|^m\right). \tag{B.3}
$$

Combinando (B.2) e (B.3), obtemos

$$
|w_{n,l}|^m_{L^{m^*}(B_{r_j}(z))} \leq C\beta^m\left(\int_{B_{r_j}(z)} u_{n,l}^{m(\beta-1)}u_n^m\left|\nabla\eta\right|^m + \int_{B_{r_j}(z)} \eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)}u_n^{m^*}\right), \tag{B.4}
$$

onde $C > 0$ independe de j e n, que é uma relação fundamental para o que se segue.

Vamos começar a utilizar (B.4), considerando $\beta = \frac{m^*}{m}$. Então, temos

$$
|w_{n,l}|^m_{L^{m^*}(B_{r_j}(z))} \leq C\beta^m\left(\int_{B_{r_j}(z)} u_{n,l}^{m^*-m}u_n^m\left|\nabla\eta\right|^m + \int_{B_{r_j}(z)} \left(\eta^m u_{n,l}^{m^*-m}u_n^m\right)\left(u_n^{m^*-m}\right)\right).
$$

Pela desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{m^*}{m}$ e $\frac{m^*}{m^*-m}$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{B_{r_j}(z)} \left[\eta u_{n,l}^{\frac{m^*-m}{m}}u_n\right]^{m^*}\right)^{\frac{m}{m^*}} &= |w_{n,l}|^m_{L^{m^*}(B_{r_j}(z))} \\
&\leq C\beta^m\int_{B_{r_j}(z)} u_{n,l}^{m^*-m}u_n^m\left|\nabla\eta\right|^m + C\beta^m\left(\int_{B_{r_j}(z)} \left[\eta u_{n,l}^{\frac{m^*-m}{m}}u_n\right]^{m^*}\right)^{\frac{m}{m^*}}\left(\int_{B_{r_j}(z)} u_n^{m^*}\right)^{\frac{m^*-m}{m^*}}
\end{aligned}
$$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $1 - \varepsilon^{\frac{m^*-m}{m^*}}C\beta^m > 0$. Das hipóteses (H_1) e (H_5), para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $K_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$
\int_{B_{r_j}(z)} u_n^{m^*} < \varepsilon, \ \forall n \geq K_j.
$$

Como $r_{j+1} < r_j$, sem perda de generalidade, podemos supor $K_j = K_1 = 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto

$$\left(\int_{B_{r_j}(z)} \left[\eta u_{n,l}^{\frac{m^*-m}{m}} u_n\right]^{m^*}\right)^{\frac{m}{m^*}} \leq C\beta^m \int_{B_{r_j}(z)} u_{n,l}^{m^*-m} u_n^m |\nabla \eta|^m$$
$$\leq C\beta^m \int_{B_{r_j}(z)} u_{n,l}^{m^*-m} u_n^m \leq C\beta^m \int_{B_{r_j}(z)} u_n^{m^*} < C\beta^m \varepsilon, \forall j, n \in \mathbb{N},$$

onde observamos que $C > 0$ independe de j, pois $|\nabla \eta| \leq \frac{2}{r_{j+1}} \leq \frac{2}{R_2}$. Pelo Lema de Fatou (na variável l), concluímos que

$$\int_{B_{r_j}(z)} \eta^{m^*} u_n^{\frac{m^{*2}}{m}} \leq C\beta^{m^*} \varepsilon^{\frac{m^*}{m}} < \infty, \forall j, n \in \mathbb{N}. \tag{B.5}$$

Afirmação: É válido que

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+1}s}\left(B_{r_{k+1}}(z)\right)} \leq C^{\frac{1}{\chi^k}+\cdots+\frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{k}{\chi^k}+\cdots+\frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^{m^*}\left(B_{r_1}(z)\right)}, \ k = 1, 2, \ldots, \tag{B.6}$$

onde $C > 0$ independe de n,

$$\chi = \frac{m^*(t-1)}{mt}, \ s = \frac{mt}{t-1} \ \text{ e } \ t = \frac{m^{*2}}{m(m^*-m)}$$

De fato, como $\chi > 1$, utilizamos (B.4) com $\beta = \chi$ e $j = 1$. Então

$$u_n \in L^{\frac{\beta m t}{t-1}}\left(B_{r_1}(z)\right)$$

e

$$|w_{n,l}|_{L^{m^*}(B_{r_1}(z))}^m \leq C\beta^m \left(\int_{B_{r_1}(z)} u_{n,l}^{m(\beta-1)} u_n^m |\nabla \eta|^m + \int_{B_{r_1}(z)} \eta^m u_{n,l}^{m(\beta-1)} u_n^{m^*}\right)$$
$$\leq C\beta^m \left(\int_{B_{r_1}(z)} u_n^{\beta m} + \int_{B_{r_1}(z)} \eta^{m\frac{m^*-m}{m^*}} u_n^{m^*-m} u_n^{\beta m}\right).$$

Utizando a desigualdade de Hölder com expoentes t e $\frac{t}{t-1}$ e (B.5), segue-se que

$$|w_{n,l}|_{L^{m^*}(B_{r_1}(z))}^m \leq C\beta^m \left\{\left(\int_{B_{r_1}(z)} u_n^{\frac{\beta m t}{t-1}}\right)^{\frac{t-1}{t}} |B_{R_1}(z)|^{\frac{1}{t}} + \left(C\beta^{m^*} \varepsilon^{\frac{m^*}{m}}\right)^{\frac{1}{t}} \left(\int_{B_{r_1}(z)} u_n^{\frac{\beta m t}{t-1}}\right)^{\frac{t-1}{t}}\right\},$$

implicando que

$$|w_{n,l}|^m_{L^{m^*}(B_{r_1}(z))} \leq C\beta^m \left(\int_{B_{r_1}(z)} u_n^{\frac{\beta m t}{t-1}} \right)^{\frac{t-1}{t}}, \forall j, n \in \mathbb{N},$$

e, consequentemente,

$$|u_{n,l}|^{\beta m}_{L^{\beta m^*}\left(B_{r_2}(z)\right)} = \left(\int_{B_{r_2}(z)} u_{n,l}^{\beta m^*} \right)^{\frac{m}{m^*}} \leq \left(\int_{B_{r_1}(z)} \eta^{m^*} u_{n,l}^{m^*(\beta-1)} u_n^{m^*} \right)^{\frac{m}{m^*}}$$
$$= |w_{n,l}|^m_{L^{m^*}(B_{r_1}(z))} \leq C\beta^m \left(\int_{B_{r_1}(z)} u_n^{\frac{\beta m t}{t-1}} \right)^{\frac{t-1}{t}} = C\beta^m |u_n|^{\beta m}_{L^{\frac{\beta m t}{t-1}}\left(B_{r_1}(z)\right)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Lema de Fatou, deduzimos

$$|u_n|^{\beta m}_{L^{\beta m^*}\left(B_{r_2}(z)\right)} \leq C\beta^m |u_n|^{\beta m}_{L^{\frac{\beta m t}{t-1}}\left(B_{r_1}(z)\right)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mas, como $\beta = \chi$ e $m^* = \chi s$, da desigualdade acima obtemos

$$|u_n|^{\beta m}_{L^{\chi^2 s}\left(B_{r_2}(z)\right)} \leq C\chi^m |u_n|^{\beta m}_{L^{m^*}\left(B_{r_1}(z)\right)}, \forall n \in \mathbb{N},$$

implicando que

$$|u_n|_{L^{\chi^2 s}\left(B_{r_2}(z)\right)} \leq C^{\frac{1}{\chi}} \chi^{\frac{1}{\chi}} |u_n|_{L^{m^*}\left(B_{r_1}(z)\right)}, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{B.7}$$

o que mostra ser a fórmula (B.6) verdadeira para $k = 1$.

Suponhamos agora que $k = 2$. Em (B.4) consideramos $\beta = \chi^2$ e $j = 2$. Então

$$u_n \in L^{\frac{\beta m t}{t-1}}\left(B_{r_2}(z)\right).$$

Repetindo os cálculos anteriores, deduzimos

$$|u_n|^{\beta m}_{L^{\beta m^*}\left(B_{r_3}(z)\right)} \leq C\beta^m |u_n|^{\beta m}_{L^{\frac{\beta m t}{t-1}}\left(B_{r_2}(z)\right)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mas como $\beta = \chi^2$ e $m^* = \chi s$, da desigualdade acima obtemos

$$|u_n|^{\beta m}_{L^{\chi^3 s}\left(B_{r_3}(z)\right)} \leq C\left(\chi^2\right)^m |u_n|^{\beta m}_{L^{\chi^2 s}\left(B_{r_2}(z)\right)}, \forall n \in \mathbb{N},$$

implicando que

$$|u_n|_{L^{\chi^3 s}\left(B_{r_3}(z)\right)} \leq C^{\frac{1}{\chi^2}} \chi^{\frac{2}{\chi^2}} |u_n|_{L^{\chi^2 s}\left(B_{r_2}(z)\right)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Utilizando B.7, segue-se que

$$|u_n|_{L^{\chi^3 s}\left(B_{r_3}(z)\right)} \leq C^{\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\chi}}\chi^{\frac{2}{\chi^2}+\frac{1}{\chi}}|u_n|_{L^{m^*}\left(B_{r_1}(z)\right)}, \forall n \in \mathbb{N},$$

o que mostra ser a fórmula (B.6) verdadeira também para $k = 2$.

Suponhamos agora que a fórmula (B.6) seja verdadeira para algum $k \geq 1$. Em (B.4) consideramos $\beta = \chi^{k+1}$ e $j = k+1$. Então

$$u_n \in L^{\frac{\beta m t}{t-1}}\left(B_{r_{k+1}}(z)\right)$$

e, repetindo os cálculos anteriores, deduzimos

$$|u_n|^{\beta m}_{L^{\beta m^*}\left(B_{r_{k+2}}(z)\right)} \leq C\beta^m |u_n|^{\beta m}_{L^{\frac{\beta m t}{t-1}}\left(B_{r_{k+1}}(z)\right)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\beta = \chi^{k+1}$ e $m^* = \chi s$, segue-se que

$$|u_n|^{\beta m}_{L^{\chi^{k+2}s}\left(B_{r_{k+2}}(z)\right)} \leq C\left(\chi^{k+1}\right)^m |u_n|^{\beta m}_{L^{\chi^{k+1}s}\left(B_{r_{k+1}}(z)\right)}, \forall n \in \mathbb{N},$$

implicando que

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2}s}\left(B_{r_{k+2}}(z)\right)} \leq C^{\frac{1}{\chi^{k+1}}}\chi^{\frac{k+1}{\chi^{k+1}}}|u_n|_{L^{\chi^{k+1}s}\left(B_{r_{k+1}}(z)\right)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pela hipótese de indução, obtemos

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+2}s}\left(B_{r_{k+2}}(z)\right)} \leq C^{\frac{1}{\chi^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{\chi}}\chi^{\frac{k+1}{\chi^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{\chi}}|u_n|_{L^{m^*}\left(B_{r_1}(z)\right)}, \forall n \in \mathbb{N},$$

mostrando por indução a validade de (B.6).

Para terminar, observamos que as séries que aparecem na fórmula (B.6) são convergentes. Portanto, existe $C > 0$ independente de n tal que

$$|u_n|_{L^{\chi^{k+1}s}\left(B_{R_2}(z)\right)} \leq |u_n|_{L^{\chi^{k+1}s}\left(B_{r_{k+1}}(z)\right)} \leq C|u_n|_{L^{m^*}\left(B_{r_1}(z)\right)} \leq C|u_n|_{L^{m^*}\left(B_{R_1}(z)\right)}, \forall n, k \in \mathbb{N}.$$

Por interpolação, $u \in L^p\left(B_{R_2}(z)\right)$, para todo $p \geq \chi^2 s$. Utilizando então o Lema B.2 concluímos que $u_n \in L^\infty\left(B_{R_2}(z)\right)$ e

$$|u_n|_{L^\infty\left(B_{R_2}(z)\right)} \leq C|u_n|_{L^{m^*}\left(B_{R_1}(z)\right)} = C|u|_{L^{m^*}\left(B_{R_1}(z+x_n)\right)},$$

onde C independe de n, conforme queríamos demonstrar. ■

Apêndice C

Uma propriedade do nível do passo da montanha correspondente a I_∞.

Neste apêndice demonstramos uma propriedade importante do nível do passo da montanha c_∞ correspondente a I_∞.

Proposição C.1. *Seja* c_∞ *o nível do passo da montanha correspondente a* I_∞. *Então*

$$c_\infty \to 0, \ \textit{quando } \mu \to \infty.$$

Demonstração. Inicialmente fixamos $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$. Então, existe $t_\mu > 0$ tal que

$$I_\infty(t_\mu \psi) = \max_{t \geq 0} I_\infty(t\psi).$$

Como $I'_\infty(t_\mu\psi)\psi = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla(t_\mu\psi)\right|^{p(x)-2}\nabla(t_\mu\psi)\cdot\nabla\psi + V(x)|t_\mu\psi|^{p(x)-2}(t_\mu\psi)\psi \\ -\mu\int_{\mathbb{R}^N}|t_\mu\psi|^{q(x)-2}(t_\mu\psi)\psi - \int_{\mathbb{R}^N}|t_\mu\psi|^{p^*(x)-2}(t_\mu\psi)\psi = 0,\end{aligned}$$

obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} t_\mu^{p(x)}\left(\left|\nabla\psi\right|^{p(x)} + V(x)|\psi|^{p(x)}\right) = \mu\int_{\mathbb{R}^N} t_\mu^{q(x)}|\psi|^{q(x)} + \int_{\mathbb{R}^N} t_\mu^{p^*(x)}|\psi|^{p^*(x)}. \tag{C.1}$$

A igualdade acima implica que $t_\mu \leq 1$, para valores suficientemente grandes de $\mu > 0$. De fato, se $t_\mu > 1$, de (C.1) concluímos que

$$t_\mu^{p_+} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla\psi\right|^{p(x)} + V(x)|\psi|^{p(x)} \right) \geq \mu t_\mu^{q_-} \int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^{q(x)}$$

e, portanto,

$$1 \geq \mu t_\mu^{q_- - p_+} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^{q(x)}}{\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla\psi\right|^{p(x)} + V(x)|\psi|^{p(x)} \right)} \geq \mu \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^{q(x)}}{\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla\psi\right|^{p(x)} + V(x)|\psi|^{p(x)} \right)}.$$

Assim

$$t_\mu > 1 \Longrightarrow \mu \leq C_\psi := \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla\psi\right|^{p(x)} + V(x)|\psi|^{p(x)} \right)}{\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^{q(x)}}.$$

Mostraremos agora que

$$t_\mu \to 0, \text{ quando } \mu \to \infty.$$

Para isto, considere uma sequência arbitrária (μ_n) com $\mu_n \to \infty$, quando $n \to \infty$. Devemos mostrar que

$$t_{\mu_n} \to 0, \text{ quando } n \to \infty, \tag{C.2}$$

Com efeito, dada $\left(t_{\mu_{n_k}}\right)$ uma subsequência de (t_{μ_n}), seja $\left(t_{\mu_{n_{k_j}}}\right)$ subsequência de $\left(t_{\mu_{n_k}}\right)$ tal que

$$t_{\mu_{n_{k_j}}} \to l \in [0,1], \text{ quando } j \to \infty.$$

Como $t_{\mu_{n_{k_j}}} \leq 1$, $\forall j \in \mathbb{N}$, de (C.1) obtemos

$$t_{\mu_{n_{k_j}}}^{p_-} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla\psi\right|^{p(x)} + V(x)|\psi|^{p(x)} \right) \geq \mu_{n_{k_j}} t_{\mu_{n_{k_j}}}^{q_+} \int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^{q(x)}, \forall j \in \mathbb{N},$$

e, em consequência,

$$1 \geq \mu_{n_{k_j}} t_{\mu_{n_{k_j}}}^{q_+ - p_-} C_\psi^{-1}, \forall j \in \mathbb{N}. \tag{C.3}$$

Agora, se $l > 0$, então $t_{\mu_{n_{k_j}}} \geq \dfrac{l}{2}$, para valores suficientementes grandes de j. Combinando esta informação com (C.3), concluímos que

$$1 \geq \mu_{n_{k_j}} \frac{l}{2}^{q_+ - p_-} C_\psi^{-1},$$

para valores suficientementes grandes de j, o que é uma contradição com o limite $\mu_{n_{k_j}} \to \infty$, $j \to \infty$. Desta maneira, $t_{\mu_{n_{k_j}}} \to 0$ e um resultado conhecido de Análise implica (C.2). Para terminar a demonstração, observamos que

$$0 < c_\infty \leq I_\infty(t_\mu \psi) \leq t_\mu^{p-} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| \nabla \psi \right|^{p(x)} + V(x) |\psi|^{p(x)} \right),$$

onde na última desigualdade supomos $t_\mu \leq 1$. Desta maneira, segue-se que

$$c_\infty \to 0, \text{ quando } \mu \to \infty.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] E. Acerbi & G. Mingione, Regularity results for a class of functionals with non-standard growth, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **156** (2001), 121-140.

[2] E. Acerbi & G. Mingione, Regularity results for electrorheological fluids: stationary case, *C.R. Math. Acad. Sci. Paris* **334** (2002), 817-822.

[3] E. Acerbi & G. Mingione, Regularity results for stationary electrorheological fluids, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **164** (2002), 213-259.

[4] C.O. Alves, Multiple positive solutions for equations involving critical Sobolev exponent in $\mathbb{R}^N$, *Electron. J. Differential Equations* **1997(13)** (1997), 1-10.

[5] C.O. Alves, Existence of positive solutions for a problem with lack of compactness involving the p-Laplacian, *Nonlinear Anal.* **51** (2002), 1187-1206.

[6] C.O. Alves, Existência de solução do tipo multi-bump para uma classe de problemas quasilineares em $\mathbb{R}^N$, Tese de Professor Titular (2005).

[7] C.O. Alves, Existence of multi-bump solutions for a class of quasilinear problems, *Adv. Nonlinear Stud.* **6(4)** (2006), 491-509.

[8] C.O. Alves, Multiplicity of multi-bump type nodal solutions for a class of elliptic problems in $\mathbb{R}^N$, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **34(2)** (2009), 231-250.

[9] C.O. Alves, Existence of radial solutions for a class of $p(x)$-Laplacian equations with critical growth, *Differential Integral Equations* **23** (2010), 113-123.

[10] C.O. Alves, Existence of solutions for a degenerate $p(x)$-Laplacian equation in $\mathbb{R}^N$, *J. Math. Anal. Appl.* **345** (2008), 731-742.

[11] C.O. Alves & J.L.P. Barreiro, Existence and multiplicity of solutions for a $p(x)$-Laplacian equation with critical growth, *J. Math. Anal. Appl.* **403** (2013), 143-154.

[12] C.O. Alves & Y.H. Ding, Existence, multiplicity and concentration of positive solutions for a class of quasilinear problems, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **29(2)** (2007), 265-278.

[13] C.O. Alves & M.C. Ferreira, Nonlinear perturbations of a $p(x)$-Laplacian equation with critical growth in $\mathbb{R}^N$, to appear in *Math. Nachr.*, DOI 10.1002/mana.201200336.

[14] C.O. Alves & M.C. Ferreira, Existence of solutions for a class of $p(x)$-Laplacian equations involving a concave-convex nonlinearity with critical growth in $\mathbb{R}^N$, to appear in *Topol. Methods Nonlinear Anal.*

[15] C.O. Alves & M.C. Ferreira, Multi-bump solutions for a class of quasilinear problems involving variable exponents, submitted paper.

[16] C.O. Alves & G.M. Figueiredo, Existence and multiplicity of positive solutions to a p-Laplacian equation in $\mathbb{R}^N$, *Differential Integral Equations* **19** (2006), 143-162.

[17] C.O. Alves & M.A.S. Souto, Existence of solutions for a class of problems in $\mathbb{R}^N$ involving $p(x)$-Laplacian, *Prog. Nonlinear Differential Equations Appl.* **66** (2005), 17-32.

[18] C.O. Alves, D.C. de Morais Filho & M.A.S. Souto, Multiplicity of positive solutions for a class of problems with critical growth in $\mathbb{R}^N$, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **52** (2009), 1-21.

[19] C.O. Alves, J. Marcos do Ó & O.H. Miyagaki, On perturbations of a class of a periodic m-Laplacian equation with critical growth, *Nonlinear Anal.* **45** (2001), 849-863.

[20] C.O. Alves, P.C. Carrião & O.H. Miyagaki, Nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem with critical growth, *J. Math. Anal. Appl.* **260** (2001), 133-146.

[21] A. Ambrosetti & P. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Funct. Anal.* **14** (1973), 349-381.

[22] A. Ambrosetti, H. Brézis & G. Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, *J. Funct. Anal.* **122** (1994), 519-543.

[23] S.N. Antontsev & J.F. Rodrigues, On stationary thermo-rheological viscous flows, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. **52** (2006), 19-36.

[24] S.N. Antontsev & S.I. Shmarev, Elliptic equations and systems with nonstandard growth conditions: existence, uniqueness and localization properties of solutions, Nonlinear Anal. **65** (2006), 722-755.

[25] J.L.P. Barreiro, Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quasilineares envolvendo expoentes variáveis, Ph. D. thesis, UAMAT-UFCG, 2014.

[26] T. Bartsch & Y.H. Ding, On a nonlinear Schröndiger equation with periodic potential, *Math. Ann.* **313** (1999), 15-37.

[27] T. Bartsch & Z.Q. Wang, Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$, *Comm. Partial Differential Equations* **20** (1995) 1725-1741.

[28] T. Bartsch & Z.Q. Wang, Multiple positive solutions for a nonlinear Schrödinger equation, *Z. Angew. Math. Phys.* **51** (2000) 366-384.

[29] T. Bartsch, A.A. Pankov & Z.Q. Wang, Nonlinear Schrödinger equations with steep potential well, *Commun. Contemp. Math.* **3(4)** (2001) 549-569.

[30] J. Bonder & A. Silva, Concentration-compactness principle for variable exponent spaces and applications, *Electron. J. Differential Equations* **2010(141)** (2010), 1-18.

[31] J. Bonder, N. Saintier & A. Silva, On the Sobolev embedding theorem for variable exponent spaces in the critical range, *J. Differential Equations* **253(5)** (2012), 1604-1620.

[32] H. Brezis & L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear equations involving critical Sobolev exponents, *Comm. Pure Appl. Math.* **36** (1983), 437-477.

[33] D.M. Cao, G.B Li & H. S. Zhou, Multiple solutions for non-homogeneous elliptic equations with critical Sobolev exponents, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **124** (1994), 1177-1191.

[34] J. Chabrowski & J. Yang, On Schrödinger equation with periodic potetial and critical Sobolev exponent, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **12** (1998), 245-261.

[35] Y. Chen, S. Levine & M. Rao, Variable exponent, linear growth functionals in image restoration, *SIAM J. Appl. Math.* **66** (2006), 1383-1406.

[36] M. Clapp & Y.H. Ding, Positive solutions of a Schrödinger equation with critical nonlinearity, *Z. Angew. Math. Phys.* **55** (2004), 592-605.

[37] V. Coti-Zelati & P.H. Rabinowitz, Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on $\mathbb{R}^N$, *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992), 1217-1269.

[38] M. del Pino & P.L. Felmer, Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **4** (1996), 121-137.

[39] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö & M. Růžička, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, vol. 2017 of Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Heildeberg, 2011.

[40] Y.H. Ding & K. Tanaka, Multiplicity of positive solutions of a nonlinear Schrödinger equation, *Manuscripta Math.* **112(1)** (2003) 109-135.

[41] I. Ekeland, On the variational principle, *J. Math. Anal. Appl.* **47** (1974) 324-353.

[42] X.L. Fan, Global $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ regularity for variable exponent elliptic equations in divergence form, *J. Differential Equations* **235** (2007), 397-417.

[43] X. Fan, $p(x)$-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with periodic data and nonperiodic perturbations, *J. Math. Anal. Appl.* **341** (2008), 103-119.

[44] X. Fan & D. Zhao, A class of De Giorgi type and Hölder continuity, *Nonlinear Anal.* **36** (1999), 295-318.

[45] X. Fan & D. Zhao, On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$, *J. Math. Anal. Appl.* **263** (2001), 424-446.

[46] X. Fan, J. Shen & D. Zhao, Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$, *J. Math. Anal. Appl.* **262** (2001), 749-760.

[47] X. Fan, Y. Zhao & D. Zhao, Compact embedding theorems with symmetry of Strauss-Lions type for the space $W^{1,p(x)}(\Omega)$, *J. Math. Anal. Appl.* **255** (2001), 333-348.

[48] Y. Fu, The principle of concentration compactness in $L^{p(x)}$ spaces and its application, *Nonlinear Anal.* **71** (2009), 1876-1892.

[49] Y. Fu & X. Zhang, Multiple solutions for a class of $p(x)$-Laplacian equations in involving the critical exponent, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **466** (2010), 1667-1686.

[50] N. Fusco & C. Sbordone, Some remarks on the regularity of minima of anisotropic integrals, *Comm. Partial Differential Equations* **18(1-2)** (1993), 153-167.

[51] J. Garcia Azorero & I. Peral Alonso, Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term, *Trans. Amer. Math. Soc.* **323(2)** (1991), 877-895.

[52] J.V. Gonçalves & C.O. Alves, Existence of positive solutions for m-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ involving critical exponents, *Nonlinear Anal.* **32** (1998) 53-70.

[53] M. Guedda & L. Veron, Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Nonlinear Anal.* **13** (1989), 879-902.

[54] D. Gilbarg & N. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of second order, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[55] C.J. Guimarães, Sobre os espaços de Lebesgue e Sobolev generalizados e aplicações envolvendo o $p(x)$-laplaciano, Dissertação de Mestrado, UAMAT-UFCG, 2006.

[56] T.C. Halsey, Electrorheological fluids, *Science* **258** (1992), 761-766.

[57] P. Harjulehto, P. Hästö, U.V. Lê, M. Nuortio, Overview of differential equations with non-standard growth, *Nonlinear Anal.* **72** (2010), 4551-4574.

[58] O. Kavian, Introduction à la théorie de points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[59] O. Kováčik & J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, *Czechoslovak Math. J.* **41** (1991), 592-618.

[60] W. Kryszewski & A. Szulkin, Generalized linking theorem with an application to semilinear Schrödinger equation, *Adv. Differential Equations* **3(3)** (1998), 441-472.

[61] O. A. Ladyzhenskaya & N. N. Ural'tseva, Linear and quasilinear elliptic equations, Acad. Press, 1968.

[62] G. Li, Some properties of weak solutions of nonlinear scalar field equations, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. A I Math.* **15** (1990), 27-36.

[63] P. L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, Part II, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (1984) 223-283.

[64] C. Mercuri & M. Willem, A global compactness result for the p-Laplacian involving critical nonlinearities, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **28** (2010) 469-493.

[65] Y. Mizuta, T. Ohno, T. Shimomura & N. Shioji, Compact embeddings for Sobolev spaces of variable exponents and existence of solutions for nonlinear elliptic problems involving the $p(x)$-Laplacian and its critical exponent, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **35** (2010), 115-130.

[66] P. Montecchiari, Multiplicity results for a class of semilinear elliptic equations on $\mathbb{R}^N$, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **95** (1996), 217-252.

[67] J. Moser, A new proof de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (1960), 457-468.

[68] R. Palais & S. Smale, A generalized Morse theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70** (1964), 165-171.

[69] X. Pan, Positive solutions of the elliptic equation $\Delta u + u^{\frac{(N+2)}{(N-2)}} + K(x)u^q = 0$ in $\mathbb{R}^N$ and balls, *J. Math. Anal. Appl.* **172** (1993), 323-338.

[70] A.A. Pankov, Semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with nonstabilizing coefficients, *Ukraine Math. J.* **41(9)** (1989), 1075-1078.

[71] A. A. Pankov & K. Pflüger, On a semilinear Schrödinger equation with periodic potential, *Nonlinear Anal.* **33** (1998), 593-609.

[72] P.H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, American Mathematical Society, Rhode Island, 1988.

[73] P.H. Rabinowitz, A note on semilinear elliptic equations on $\mathbb{R}^N$, in Nonlinear Analysis: A Tribute in Honour of G. Prodi, Sc. Norm. Super. di Pisa Quaderni, Pisa, 1991.

[74] V. Rădulescu & B. Zhang, Morse theory and local linking for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids, *Pré-print*, 2013.

[75] K.R. Rajagopal & M. Ruzicka, Mathematical modelling of electrorheological fluids, *Continuum Mech. Thermdyn.* **13** (2001), 59-78.

[76] M. Růžička, Electrorheological fluids: Modeling and Mathematical Theory, vol. 1748 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[77] M. Schechter & W. Zou, Weak linking theorems and Schrödinger equations with critical Sobolev exponent, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **9** (2003), 601-619.

[78] E. Séré, Existence of infinitely many homoclinic orbits in Halmitonian systems, *Math Z* **209** (1992), 27-42.

[79] G. Tarantello, On nonhomogenous elliptic equations involving critical Sobolev exponent, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non. Lineáire* **9** (1992), 243-261.

[80] C. Troestler & M. Willem, Nontrivial solution of a semilinear Schrödinger equation, *Comm. Partial Diff. Eq.* **21** (1996), 1431-1449.

[81] Z.Q. Wang, Existence and symmetry of multi-bump solutions for nonlinear schrödinger equations, *J. Differential Equations* **159** (1999), 102-137.

[82] M. Willem, Minimax Theorems, Birkhäuser Boston, MA, 1996.

[83] M. Willem & W.M. Zou, On a Schröndinger equation with periodic potential and spectrum point zero, *Indiana Univ. Math. J.* **52** (2003), 109-132.

[84] W.M. Winslow, Induced fibration of suspensions, *Journal of Applied Physics* **20** (1949), 1137-1140.

[85] V. Zhikov, Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory, *Math. USSR-Izv.* **29** (1987), 675-710.