

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN-Departamento de Matemática

Lista 5

Disciplina: Introdução a Análise, **Data:** 20/01/2004.

Aluno: _____

- 1) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, então existe $x_0 \in \mathbb{R}$ no qual f assume o seu valor mínimo
- 2) Seja $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Se $f : K \rightarrow K$ é tal que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todo $x, y \in K$, então f possui um único ponto fixo. **Sug:** $x_n = f^n(x), x \in K$.
- 3) Uma aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *própria* se para todo $K \subset \mathbb{R}$ compacto, $f^{-1}(K)$ for compacto. Mostre que todo polinômio não constante é uma aplicação *própria*.
- 4) Seja K compacto e $f : K \rightarrow K$ contínua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Mostre que existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$. Dê um exemplo para verificar que a compacidade é necessária.
- 5) Seja $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Mostre que toda aplicação contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.
- 6) Sejam $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$ funções uniformemente contínuas e K compacto, mostre que $f.g$ é uniformemente contínua.
- 7) Sejam $K_1, K_2, \dots$, subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Verifique se $\cup_{n=1}^{\infty} K_i$, $\cap_{n=1}^{\infty} K_i$ são compactos. O que podemos afirmar no caso finito?
- 8) Verifique que a função $f(x) = \sin(x^2)$ não é uniformemente contínua.
- 9) Dê exemplo de uma bijeção $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que seja descontínua em todos os pontos.
- 10) Dê exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que seja contínua em um único ponto.