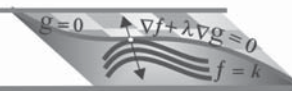


5. Integral de Superfície



5.1 Área de uma Superfície

5.1A Em cada caso, calcule a área da superfície S .

- (a) S é uma esfera de raio R . [resp. $4\pi R^2$]
- (b) S é a porção do plano $x + y + z = a$, $a > 0$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. [resp. $\pi a^2 \sqrt{3}$]
- (c) S é a porção do parabolóide $x^2 + y^2 + z = a^2$, delimitada pelo cilindro vazado $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. [resp. $(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5}) \approx 30.71$]
- (d) S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = ay$. [resp. $(2\pi - 4)a^2$]
- (e) S é a porção do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$, delimitada por $y^2 = a(x + a)$. [resp. $8a^2\sqrt{2}$]
- (f) S é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$. [resp. $\pi a^2 \sqrt{2}$]
- (g) S é a porção do parabolóide $x^2 + z^2 = 2ay$, $a > 0$, abaixo do plano $y = a$. [resp. $2\pi a^2(3\sqrt{3} - 1)/3$]
- (h) S é a porção do cilindro $y^2 + z^2 = 16$, compreendida acima da região triangular $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2 - x$. [resp. $8\sqrt{3} + 4\pi/3 - 16$]
- (i) S é a porção do plano $3x + 2y + z = 7$ no primeiro octante. [resp. $49\sqrt{14}/12$]
- (j) S é a porção do cilindro parabólico $z^2 = 8x$, compreendida acima da região $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{x}$. [resp. $(6\sqrt{3} - 4\sqrt{2})/3$]
- (k) S é a porção do cilindro $y^2 + z^2 = 4$, interna ao cilindro parabólico $x^2 = 2y + 4$ e acima do plano $z = 0$. [resp. $16\sqrt{2}$]
- (l) S é o triângulo com vértices $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ e $\gamma(0, 0, 2)$. [resp. $\sqrt{22}$]
- (m) S é a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e externa a $x^2 + y^2 = 1$. [resp. $\pi\sqrt{2}/3 + \sqrt{6}/2$]

5.1B Seja S a superfície de um paralelogramo do $\mathbb{R}^3$ e sejam S_1 , S_2 e S_3 suas projeções nos planos coordenados. Verifique que $A(S) = \sqrt{A(S_1)^2 + A(S_2)^2 + A(S_3)^2}$.

5.1C Uma edificação é erguida no formato da figura ao lado, onde a fachada é descrita pela superfície cilíndrica $xy = 1$. Usando as aproximações: $\ln 2 = 0.7$ e $\int_{0.5}^2 \sqrt{1+t^{-4}} dt = 2.26$, calcule a área total da edificação. [resp. 19.32]

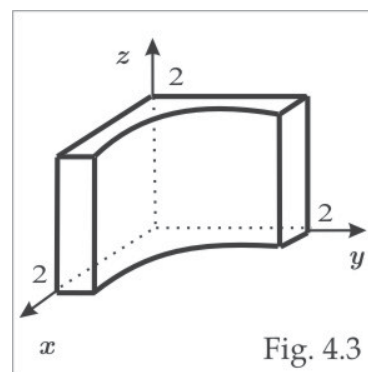


Fig. 4.3

5.1D Deduza as fórmulas para as áreas de um cone e de um cilindro (circular reto) de raio a e altura h . [resp. $A_{cone} = \pi a \sqrt{a^2 + h^2}$ e $A_{cilindro} = 2\pi ah$]

5.2 Cálculo de Integrais de Superfícies

5.2A Calcule as seguintes integrais de superfícies:

- (a) $\iint_S x dS$; $S: x^2 + y^2 = R^2$, $-1 \leq z \leq 1$. [resp. 0]
- (b) $\iint_S z \sqrt{x^2 + y^2} dS$; S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, compreendida entre os planos $z = 1$ e $z = 2$. [resp. $2\pi(16\sqrt{2} - 5\sqrt{5})$]
- (c) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$; $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$ e $\vec{F} = y\vec{j} + z\vec{k}$. [resp. $4\pi R^3/3$]
- (d) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$; $S: x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq a$ e $\vec{F} = \sin z \vec{i} + xy\vec{j} - \cos z \vec{k}$. [resp. $(1 - \cos a)R + aR^3/3$]
- (e) $\iint_S xy dS$; $S: x^2 + y^2 = 2z$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. [resp. $(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1)/15$]
- (f) $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$; $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. [resp. $4\pi R^4$]
- (g) $\iint_S z^2 dS$; S é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $z = x + 3$. [resp. 60π]
- (h) $\iint_S x dS$; S é a porção do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante. [resp. $\sqrt{3}/6$]
- (i) $\iint_S x dS$; S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + 2$. [resp. π]

- (j) $\iint_S x^2 dS$; S é a porção do plano $z = x$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. [resp. $\pi\sqrt{2}/4$]
- (k) $\iint_S x^2 dS$; $S : x^2 + y^2 = z^2$, $1 \leq z \leq 2$. [resp. $15\pi\sqrt{2}/4$]
- (l) $\iint_S (x + y) dS$; S é a porção do plano $2x + 3y + z = 6$ no primeiro octante. [resp. $5\sqrt{14}$]
- (m) $\iint_S \frac{xz}{y} dS$; S é a porção do cilindro $x = y^2$, situada no primeiro octante, entre os planos $z = 0$, $z = 5$, $y = 1$ e $y = 4$. [resp. $\frac{125}{24}(13\sqrt{65} - \sqrt{5})$]

5.2B Considere o campo $\vec{F} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ e compare os valores das integrais: $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}_S dS$ e $\iiint_\Omega \operatorname{div}(\vec{F}) dV$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e Ω é a bola do $\mathbb{R}^3$ $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ [resp. 0]

5.3 Fórmulas de Gauss e Stokes. Aplicações

5.3A Com auxílio do Teorema de Stokes calcule $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo γ o bordo da superfície S :

- (a) $\vec{F} = y^2 \vec{i} + z^2 \vec{j} + x^2 \vec{k}$; S é a porção do plano $x + y + z = 1$, situada no primeiro octante. [resp. -1]
- (b) $\vec{F} = 3y \vec{i} - xz \vec{j} + yz^2 \vec{k}$; S é a superfície do parabolóide $2z = x^2 + y^2$, situada abaixo do plano $z = 2$. [resp. 20π]
- (c) $\vec{F} = 2y \vec{i} + z \vec{j} + 3 \vec{k}$; S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. [resp. -2π]
- (d) $\vec{F} = z \vec{i} + x \vec{j} + y \vec{k}$; S é o hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. [resp. π]
- (e) $\vec{F} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$; S é o cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$. [resp. 0]

5.3B Com auxílio do Teorema de Stokes calcule $\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz$:

- (a) $\int_\gamma ydx + zdy + xdz$; $\gamma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$. [resp. $-\sqrt{3}\pi R^2$]
- (b) $\int_\gamma (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$; $\gamma : x^2 + y^2 = 2y$, $y = z$. [resp. 0]
- (c) $\int_\gamma (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$; γ é a curva interseção da fronteira do cubo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$, com plano $x + y + z = 3a/2$. [resp. $-9a^3/2$]
- (d) $\int_\gamma x^3 dz$; γ é o bordo da superfície $S : z = y + 4$; $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. [resp. $45\pi/4$]

(e) $\int_{\gamma} ydx - x^2dy + 5dz$; γ é o bordo da superfície $S : \vec{r}(u, v) = u \vec{i} + v \vec{j} + (1 - u^2) \vec{k}$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, $u + v \leq 1$. [resp. $-5/6$]

5.3C Calcule o fluxo do campo $\vec{F}$ através da superfície S e, quando possível, use o Teorema da Divergência de Gauss para comprovar o resultado:

(a) $\vec{F} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$; S é a superfície do sólido limitado pelo hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$. [resp. $2\pi a^3$]

(b) $\vec{F} = 2 \vec{i} + 5 \vec{j} + 3 \vec{k}$; S é a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. [resp. -3π]

(c) $\vec{F} = x \vec{i} - y \vec{j}$; S é a parte do primeiro octante, limitada pelos três planos coordenados e pela esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. [resp. 0]

(d) $\vec{F} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$; S é a fronteira do sólido no primeiro octante limitado pelos planos $x = 1$, $y = 2$, e $3x + 2y + z = 12$. [resp. 51]

5.3D Seja S a superfície descrita por: $\vec{X}(u, v) = u \vec{i} + v \vec{j} + (2 - u^2 + v^2) \vec{k}$, $u^2 + v^2 \leq 1$, e considere o campo $\vec{F} = y \vec{i} + (x + y) \vec{k}$. Calcule o fluxo de $\text{rot}(\vec{F})$ através de S de duas maneiras: primeiro por um cálculo direto e, depois, usando a Fórmula de Stokes. [resp. $-\pi$]

5.3E Seja $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ o vetor posição do ponto $P(x, y, z)$ e seja $r = \|\vec{r}\|$. Verifique que o fluxo do campo $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ através de uma superfície simples fechada regular S que não contenha a origem é igual a zero. Qual seria o fluxo do campo $\vec{F}$, se a superfície S contivesse a origem no seu interior? [resp. 4π]

5.3F Com a notação do exercício precedente e admitindo que Ω representa uma região compacta do $\mathbb{R}^3$ delimitada por uma superfície simples fechada e regular S (por exemplo uma esfera), use o Teorema da Divergência de Gauss e verifique a relação:

$$\iint_S r \vec{r} \cdot \vec{n}_S dS = 4 \iiint_{\Omega} r dV.$$

5.3G Use a Fórmula de Gauss e estabeleça as seguintes identidades:

(a) $\iiint_{\Omega} (v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) dV = \iint_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_S} dS.$

(b) $\iiint_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dV = \iint_{\partial \Omega} (v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_S} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}_S}) dS.$

$$(c) \operatorname{vol}(\Omega) = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} \|\vec{r}\| \cos(\vec{r}, \vec{n}_S) dS.$$

5.3H Se $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ representam os co-senos diretores da normal exterior à superfície S , use o Teorema de Gauss e calcule as seguintes integrais de superfícies:

$$(a) \iint_S (xy \cos \alpha + yz \cos \beta + xz \cos \gamma) dS; \quad S \text{ é a esfera } x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad [\text{resp. } 0][\text{resp. } 0]$$

$$(b) \iint_S x^2 y^2 z^2 (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS; \quad S \text{ é a fronteira do cubo } 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq z \leq a. \\ [\text{resp. } a^8/3][\text{resp. } a^8/3]$$

5.3I Uma curva regular γ no plano xz , de equação cartesiana $z = f(x)$, $a \leq x \leq b$, gira em torno do eixo z descrevendo uma superfície S . Deduza a *Fórmula de Pappus*: $A(S) = 2\pi Lh$, onde L é o comprimento da curva γ e h é a distância do centróide de γ ao eixo de rotação.

5.3J Em coordenadas cilíndricas uma superfície S é descrita pela equação $z = G(r, \theta)$, $(r, \theta) \in D$. Mostre que:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + G_r^2 + \frac{1}{r^2} G_\theta^2} \, r dr d\theta.$$

5.3K Mostre que em coordenadas cilíndricas, a equação $z = G(r)$, $a \leq r \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, representa uma superfície de revolução cuja área é:

$$A = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + G_r^2} \, r dr.$$

5.3L Calcule a área do cone obtido por rotação da reta $y = 3x + 2$, $0 \leq x \leq 3$, $z = 0$, em torno do eixo x . [resp. $39\pi/\sqrt{10}$]

5.3M Calcule o momento de inércia da superfície homogênea S em torno do eixo indicado. Em cada caso admita que a densidade superficial de massa é $\rho \equiv 1$.

(a) S é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, que jaz entre as folhas do cone $x^2 + y^2 = z^2$; Eixo x . [resp. $1024/45$]

(b) S é a superfície do tetraedro com vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $\gamma(0, 0, 1)$ e $D(0, 0, 0)$; Eixo y . [resp. $(2 + \sqrt{3})/6$]

(c) S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; Eixo z . [resp. $8\pi R^4/3$]

(d) S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; Eixo é a reta $x = y$, $z = 0$. [resp. $8\pi R^4/3$]

5.3N Encontre o centróide de cada superfície S dada abaixo. Como no exercício precedente, admita que a densidade superficial de massa é $\rho \equiv 1$.

(a) S é o hemisfério $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. [resp. $C(0, 0, R/2)$]

(b) S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que jaz no interior do cone $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$. [resp. $C(0, 0, (2 + \sqrt{2})/4)$]

(c) S é a porção do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$, externa ao cilindro $x^2 + y^2 = 2$. [resp. $C_M(0, (2 + \sqrt{2})/2, 0)$]

5.3O Uma concha esférica homogênea de raio a é cortada pela folha de um cone circular reto cujo vértice está no centro da esfera. Se o ângulo do vértice do cone é α , $0 < \alpha < \pi$, qual o centro de massa da porção da concha que jaz no interior do cone? [resp. sobre o eixo do cone, distante $\frac{a(1 - \cos \alpha)}{4[1 - \cos(\alpha/2)]}$ do centro da esfera]

5.3P Calcule o potencial eletrostático $\varphi(x, y, z)$ no ponto $A(0, 0, z)$ devido a uma distribuição uniforme de carga elétrica, com densidade ρ , no disco $x^2 + y^2 \leq a^2$. Qual o campo elétrico $\vec{E}$ no ponto A ? [resp. $\varphi = 2\pi\rho(\sqrt{a^2 + z^2} - |z|)$; $\vec{E} = -\nabla\varphi = 2\pi\rho z \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \vec{k}$]

5.3Q No exercício precedente qual seria o potencial eletrostático e o campo elétrico no ponto A , se a densidade no ponto (x, y) do disco fosse $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$? Use os resultados:

$$\int \frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \ln \left| r + \sqrt{r^2 + z^2} \right| \quad \text{e} \quad \int \sqrt{r^2 + z^2} dr = \frac{r}{2} \sqrt{r^2 + z^2} + \frac{z^2}{2} \ln \left| r + \sqrt{r^2 + z^2} \right|,$$

e encontre as seguintes expressões para o potencial e o campo elétrico:

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi z^2 \left[\frac{a}{z} \sqrt{1 + (a/z)^2} - \ln \left(\frac{a}{z} + \sqrt{1 + (a/z)^2} \right) \right] \\ \vec{E} &= 2\pi z \left[\ln \left(\frac{a}{z} + \sqrt{1 + (a/z)^2} \right) - \frac{a}{z} \sqrt{1 + (a/z)^2} \right] \vec{k} \end{aligned}$$

5.3R Calcule o campo eletrostático na origem devido a uma distribuição uniforme de carga sobre o cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq a$. [resp. $\vec{E} = \frac{2\pi\rho(\sqrt{R^2 + a^2} - R)}{R^2 + a^2} \vec{k}$]

5.3S Qual o potencial eletrostático no ponto $(0, 0, z)$, devido a uma distribuição uniforme de carga sobre o hemisfério $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$? [resp. $\frac{2\pi\rho R(\sqrt{R^2 + z^2} - R + z)}{z}$]

5.3T Considere uma distribuição uniforme de carga elétrica sobre uma esfera S de raio a . Mostre que o campo elétrico num ponto do eixo z interior a S é zero. Qual o campo elétrico nos pontos do eixo z exteriores à esfera S ? [resp. $\vec{E}(0, 0, z) = \frac{4\pi a^2 \rho}{z^2} \vec{k}$. O fenômeno ocorre como se toda carga estivesse concentrada no centro da esfera]

5.3U Mostre que $\iint_S (x^2 + y^2) (x \vec{i} + y \vec{j}) \cdot \vec{n} dS = 4I_z$, onde I_z representa o momento de inércia, com relação ao eixo z , do sólido com densidade de massa $\rho \equiv 1$, delimitado por S .

5.3V Seja S a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$, $0 \leq z \leq 1$, que jaz entre os planos $x = 2a$ e $x = b$, $0 < b < 2a$. Admita a densidade constante ρ_0 e calcule: (a) a massa de S ; e (b) o momento de inércia I_z de S . [resp. (a) $2a\rho_0 \arcsin\left(\frac{1}{a}\sqrt{2ab - b^2}\right)$ (b) $4a^2\rho_0(a + \sqrt{2ab - b^2})$]

5.3W Dada uma superfície S de equação cartesiana $\varphi(x, y, z) = 0$, $(y, z) \in D$, φ de classe γ^1 , com $\varphi_x \neq 0$, mostre que:

$$(a) \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2} \frac{f(x, y, z)}{|\varphi_x|} dydz;$$

$$(b) \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}_S dS = \iint_D (\vec{F} \cdot \nabla \varphi) \frac{1}{|\varphi_x|} dydz.$$