

Capítulo 6

Integrais de Superfície

Situando a Temática

Não sendo possível utilizar um instrumento adequado de medição, para conhecermos a área de uma superfície qualquer, precisamos nos deslocar sobre todos os pontos da superfície e, então, aferir a extensão percorrida. Isto, porém, se esse nosso deslocamento for viável. Em muitos casos, deslocar-se de um ponto a outro pode constituir tarefa praticamente impossível de ser realizada, em razão da inexistência de meios de locomoção ou em virtude de um consumo excessivo de tempo e recursos, como seria o caso de avaliarmos a área de uma região montanhosa.

Fazer uso de uma integral de superfície é certamente um ótimo procedimento para resolver o problema do cálculo de área quando métodos comuns de mensuração não podem ser aplicados. Esta técnica e outros importantes conhecimentos nós vamos adquirir com o estudo de Integrais de Superfícies.

Os conteúdos da Integral de Superfície que iremos desenvolver, mesmo em nível elementar, são o alicerce teórico de resultados aplicados para descrever o escoamento de fluidos, projetar cabos de transmissão subaquáticos e calcular o trabalho necessário para colocar um satélite em órbita, e especialmente importantes para a Física e as Engenharias.

Problematizando a Temática

Como dissemos, uma relevante aplicação da integral de superfície se dá quando necessitamos avaliar áreas. Por essa razão, consideremos o problema de determinar a área de uma superfície dada pelo gráfico da função $z = f(x, y)$, com $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e U uma região compacta.

Veremos, em breve, que o problema proposto acima é bem simples de ser resolvido, bastando, para tanto, conhecermos a fórmula da área de uma região.

Vamos, então, iniciar o nosso estudo de superfícies regulares para termos condição de solucionar esta e muitas outras questões.

Conhecendo a Temática

6.1 Superfícies Regulares

As superfícies consideradas nos Capítulos anteriores eram dadas explicitamente como um gráfico de uma função $z = f(x, y)$ ou implicitamente pela equação

$$F(x, y, z) = 0.$$

Nesta seção apresentaremos o conceito mais preciso de uma superfície de modo análogo ao conceito de curva parametrizada.

Sejam U uma região em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbf{r} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação. Se um sistema de coordenadas é escolhido no espaço, então a transformação $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ pode ser representado como o vetor

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k},$$

com $f, g, h : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções escalares. Reciprocamente, se $f, g, h : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções escalares, então o vetor

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k},$$

é uma representação.

Observe que

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$$

pode ser visto como um vetor posição. Portanto, as equações escalares

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v) \quad \text{e} \quad z = h(u, v)$$

são as equações paramétricas da superfície S descrita por $\mathbf{r}$ quando os parâmetros u e v variam em U e

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$$

é a representação pararmétrica vetorial de S .

Note que as noções de limite, continuidade, diferenciabilidade, etc. de uma transformação vetorial são introduzidos em termos das funções escalares f , g e h . Por exemplo, P é uma transformação vetorial diferenciável se as funções f , g e h o são. Além disso, embora S esteja contida em $\mathbb{R}^3$, necessitamos apenas de dois parâmetros u e v em U para localizarmos todos os pontos de S . Neste caso, o conjunto de todos esses pontos é o *gráfico* de S ou a *superfície* S . Por exemplo, se

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{1 - u^2 - v^2}\mathbf{k},$$

então $\mathbf{r}$ transforma o círculo sólido (disco unitário)

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

na semiesfera (gráfico de S)

$$S = \mathbf{r}(D) = \left\{ (u, v, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \right\}.$$

Observe que esta transformação é bijetora, mas não é diferenciável em D , pois as derivadas parciais $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ de $\mathbf{r}$ não existem na fronteira de D .

Exemplo 6.1 *Seja S a superfície de revolução obtida girando a curva C , no plano xz , em torno do eixo dos z . Determine uma representação pararmétrica vetorial para S .*

Solução. Primeiro vamos obter uma parametrização para a curva C . Neste caso, uma pararmetrização para a curva C é dada pelas equações

$$x = g(v), \quad y = 0 \quad \text{e} \quad z = h(v), \quad v \in [a, b].$$

Assim, após um giro de um ângulo u no sentido de x para y , obtemos uma cópia de C cuja parametrização em coordenadas cilíndricas é dada pelas equações

$$r = g(v), \quad \theta = u \quad \text{e} \quad z = h(v), \quad v \in [a, b] \quad \text{e} \quad u \in [0, 2\pi].$$

Como $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ temos que

$$\mathbf{r}(u, v) = (g(v) \cos u)\mathbf{i} + (g(v) \sin u)\mathbf{j} + h(v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in U,$$

com

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi \quad \text{e} \quad a \leq v \leq b\},$$

é uma representação pararmétrica vetorial para S . Observe que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = (-g(v) \sin u, g(v) \cos u, 0)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = (g'(v) \cos u, g'(v) \sin u, h'(v))$$

Portanto,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (g(v)h'(v) \cos u)\mathbf{i} + (g(v)h'(v) \sin u)\mathbf{j} - (g(v)g'(v))\mathbf{k}.$$

Neste caso, às curvas $v = c_2$ e $u = c_1$ ($\mathbf{r}(u, c_2)$ e $\mathbf{r}(c_1, v)$) são ortogonais, pois para $v = c_2$ às curvas são círculos (paralelos) com centro no eixo dos z e paralelos ao plano xy , enquanto para $u = c_1$ as curvas são cópias de C (meridianos) contidas no plano que contém o eixo dos z . A Figura 6.1 expõe graficamente uma parametrização da superfície de revolução S . ■

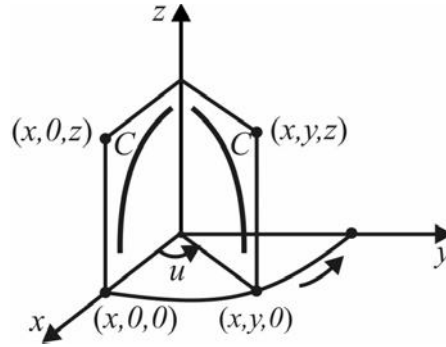


Figura 6.1: Parametrização da superfície de revolução S .

Exemplo 6.2 Determine uma parametrização para a superfície de revolução S de um cone gerado pela reta $z = x$, $y = 0$.

Solução. Primeiro obtemos uma parametrização para a reta. Neste caso, uma parametrização da reta é dada pelas equações

$$x = g(v) = v, \quad y = 0 \quad \text{e} \quad z = h(v) = v, \quad v \in [0, b].$$

Assim, uma representação paramétrica vetorial para S é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = (v \cos u)\mathbf{i} + (v \sin u)\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \quad (u, v) \in U,$$

com

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq v \leq b\}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (v \cos u)\mathbf{i} + (v \sin u)\mathbf{j} - v\mathbf{k}.$$

Observe que como $x = x(u, v) = v \cos u$, $y = y(u, v) = v \sin u$ e $z = z(u, v) = v$ temos que

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

que é a equação cartesiana do cone. ■

Exemplo 6.3 Determine uma parametrização para a superfície S de uma esfera de centro na origem e raio ρ .

Solução. Primeiro obtemos uma parametrização para a semicircunferência geradora C no plano xz . Neste caso, uma parametrização da curva C é dada pelas equações

$$x = g(\phi) = \rho \sin \phi, \quad y = 0 \quad \text{e} \quad z = h(\phi) = \rho \cos \phi, \quad \phi \in [0, \pi].$$

Assim, uma representação paramétrica vetorial para S é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = \rho[(\cos \theta \sin \phi)\mathbf{i} + (\sin \theta \sin \phi)\mathbf{j} + (\cos \phi)\mathbf{k}],$$

com

$$U = \{(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= -\rho^2 [(\cos \theta \sin^2 \phi) \mathbf{i} + (\sin \theta \sin^2 \phi) \mathbf{j} + \cos \phi \sin \phi \mathbf{k}] \\ &= -\rho \sin \phi \mathbf{r}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

Observe que como $x = x(\theta, \phi) = \rho \cos \theta \sin \phi$, $y = y(\theta, \phi) = \rho \sin \theta \sin \phi$ e $z = z(\theta, \phi) = \rho \cos \phi$ temos que

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2,$$

que é a equação cartesiana da esfera. ■

Seja $\mathbf{r} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma representação paramétrica de uma superfície S , com U uma região. Diremos que $\mathbf{r}$ é uma *superfície regular* ou *suave* se as funções escalares $f, g, h : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, possuem derivadas parciais primeira ordem contínuas e o vetor

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \neq (0, 0, 0),$$

para todo ponto (u, v) no interior de U ou, equivalentemente, qualquer curva C sobre S , com equação paramétrica

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)), \quad t \in I,$$

é regular. Neste caso, os vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ são linearmente independentes. Portanto, eles determinam um plano de equação cartesiana

$$\overrightarrow{PQ} \bullet \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = 0,$$

ou ainda, na forma paramétrica

$$Q = P + s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + t \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

com $Q = (x, y, z)$ um ponto qualquer deste plano, o qual chama-se *plano tangente* de S no ponto P de S . Observe que o plano

$$\alpha = \left\{ s \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + t \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ e sua translação $T_P S = P + \alpha$ é o plano tangente à superfície S em P .

Exemplo 6.4 *Determine uma representação do plano tangente e da reta normal à superfície S , com equação cartesiana*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25,$$

no ponto $P = (3, 4, 0)$.

Solução. Primeiro obtemos uma representação paramétrica vetorial para S . Neste caso, a parametrização é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi)\mathbf{i} + (\rho \sin \theta \sin \phi)\mathbf{j} + (\rho \cos \phi)\mathbf{k},$$

com

$$U = \{(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

Assim,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\rho^2 [(\cos \theta \sin^2 \phi)\mathbf{i} + (\sin \theta \sin^2 \phi)\mathbf{j} + \cos \phi \sin \phi \mathbf{k}].$$

É fácil verificar que as coordenadas esféricas do ponto $P = (3, 4, 0)$ são $\rho = 5$, $\theta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$. Logo,

$$\overrightarrow{PQ} = (x-3)\mathbf{i} + (y-4)\mathbf{j} + z\mathbf{k} \text{ e } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} = -5(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}).$$

Portanto,

$$\overrightarrow{PQ} \bullet \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = 0 \Leftrightarrow 3(x-3) + 4(y-4) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 25 = 0.$$

Já vimos, no final do Capítulo 2, que se a superfície S é dada pela equação cartesiana $F(x, y, z) = 0$, então

$$\overrightarrow{PQ} \bullet \nabla F(P) = 0$$

é a equação do plano tangente à superfície S no ponto P de S . Como $\nabla F(P) = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ temos que

$$\overrightarrow{PQ} \bullet \nabla F(P) = 0 \Leftrightarrow 6(x-3) + 8(y-4) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 25 = 0.$$

Finalmente, a reta normal à superfície S no ponto P é a reta paralela ao vetor $\nabla F(P) = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, isto é,

$$\overrightarrow{PQ} = t\nabla f(P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = 4 + 8t \\ z = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

que é o resultado desejado. ■

Seja $\mathbf{r} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma representação paramétrica de uma superfície S , com U uma região. Diremos que P é um *superfície regular por partes* se as funções $f, g, h : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e $\mathbf{r}$ é uma superfície regular em um número finito sub-região U_i , com $U_i \subseteq U$ e

$$U = U_1 \cup \dots \cup U_n.$$

Exemplo 6.5 *Seja S a superfície de um cubo limitado pelos planos*

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad z = 0 \text{ e } z = 1.$$

Então S não é regular, mas é regular por partes.

Seja $\mathbf{r} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma representação paramétrica de uma superfície regular S , com U uma região. Uma *orientação* para S é um par $(S, \mathbf{n})$, com $\mathbf{n}$ um vetor normal unitário a S que varia continuamente sobre a superfície S sem mudar o sentido. Diremos que S é uma *superfície orientada* se uma orientação for escolhida para S . Neste caso, podemos associar uma orientação positiva para a curva fechada simples formando a fronteira de S e para cada curva C da fronteira de S podemos escolher um vetor tangente $\mathbf{T}$ na direção escolhida, um vetor normal interno $\mathbf{N}$, em um plano tangente a S , de modo que o terno $(\mathbf{n}, \mathbf{T}, \mathbf{N})$ seja positivo em todos os pontos de S (regra da mão direita ou sacarrolhas). Mais precisamente, o valor do determinante de terceira ordem da matriz cujas linhas são os vetores $\mathbf{n}$, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$, neste ordem, é positivo. Neste caso, $\mathbf{N} = \mathbf{n} \times \mathbf{T}$. A Figura 6.2 expõe graficamente uma orientação da superfície S .

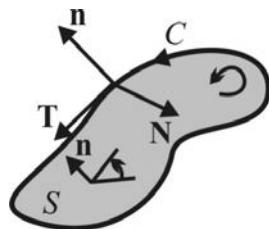


Figura 6.2: Uma orientação para a superfície S .

Observe que, no caso da superfície ser regular por partes, podemos orientá-la do seguinte modo: ao longo de cada curva que é fronteira comum de duas partes, a direção positiva de uma parte é a oposta da direção positiva para a outra parte. A Figura 6.3 expõe graficamente uma orientação para o cubo do Exemplo 6.5.

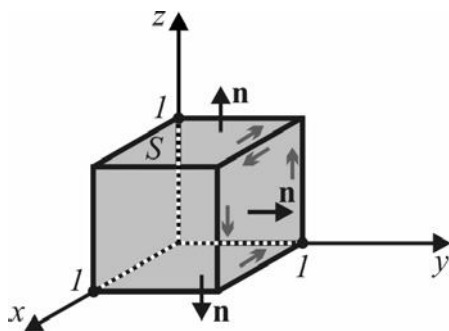


Figura 6.3: Orientação do cubo.

É importante lembrar que nem toda superfície é orientável, o contra exemplo clássico é dado pela “faixa de Möbius” dada pelas equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= \left(4 + t \cos \left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \cos \theta, \quad y = \left(4 + t \cos \left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \sin \theta \text{ e} \\ z &= t \sin \left(\frac{\theta}{2}\right), \quad t \in [-1, 1] \text{ e } \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

August Ferdinand Möbius (1790-1868), matemático alemão. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar um texto de Introdução à Geometria Diferencial. A Figura 6.4 expõe graficamente a faixa de Möbius.



Figura 6.4: Faixa de Möbius.

Sejam S_1 e S_2 duas superfícies com representações paramétricas

$$\mathbf{r}_1(s, t) = x_1(s, t)\mathbf{i} + y_1(s, t)\mathbf{j} + z_1(s, t)\mathbf{k}, \quad s, t \in U_1$$

e

$$\mathbf{r}_2(u, v) = x_2(u, v)\mathbf{i} + y_2(u, v)\mathbf{j} + z_2(u, v)\mathbf{k}, \quad u, v \in U_2,$$

respectivamente. Diremos que S_1 é *equivalente* a S_2 se existir uma função bijetora, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$, $\varphi(s, t) = u(s, t)\mathbf{i} + v(s, t)\mathbf{j}$, tal que

$$\mathbf{r}_1(s, t) = \mathbf{r}_2(\varphi(s, t)), \quad s, t \in U_1.$$

A função φ chama-se *mudança de coordenadas* ou *mudança de parâmetros*. Neste caso, “superfície” significa uma classe de equivalência e

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \right) \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \right) J(\varphi).$$

De fato, como $\mathbf{r}_1(s, t) = \mathbf{r}_2(u, v)$, $u = u(s, t)$ e $v = v(s, t)$ temos, pela Regra da Cadeia, que

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \right) \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}. \end{aligned}$$

Portanto, S_1 e S_2 possuem as mesmas orientações se $J(\varphi) > 0$. Caso contrário, S_1 e S_2 possuem orientações opostas.

Exemplo 6.6 Seja S a superfície dada pelo gráfico da função $z = f(x, y)$. Então uma orientação para S é dada por $(S, \mathbf{n})$ ou $(S, -\mathbf{n})$. Neste caso, é sempre possível escolher um vetor normal unitário $\mathbf{n}$ a S . Por outro lado, se S é a superfície dada implicitamente pela equação $f(x, y, z) = c$, então podemos escolher $\mathbf{n}$ como o vetor

$$\frac{1}{|\nabla f|} \nabla f,$$

quando $\nabla f \neq \mathbf{0}$.

Seja $\mathbf{r} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma representação pararmétrica de uma superfície regular S , com U uma região. Diremos que S é uma *superfície fechada* se ela é fronteira de uma região compacta em $\mathbb{R}^3$ e que é uma *superfície simples* se $\mathbf{r}(u_1, v_1) \neq \mathbf{r}(u_2, v_2)$, para todos $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U$, com $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$.

Exemplo 6.7 Seja S a superfície de uma esfera de centro na origem e raio ρ . Então S é uma superfície fechada simples, cuja parametrização é dada no Exemplo 6.3.

EXERCÍCIOS

1. Determine uma representação paramétrica para as seguintes superfícies:

- (a) O plano xy .
- (b) O plano $z = x$.
- (c) O plano $x + y + z = 1$.
- (d) O cilindro de revolução $x^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$.
- (e) O parabolóide $z = x^2$.
- (f) O cilindro elítico $y^2 + 9z^2 = 9$.

2. Determine a representação cartesiana das seguintes superfícies:

- (a) O elipsoide $\mathbf{r} = (a \cos u \cos v)\mathbf{i} + (b \sin u \cos v)\mathbf{j} + c \sin v\mathbf{k}$.
- (b) O parabolóide elítico $\mathbf{r} = (au \cos v)\mathbf{i} + (bu \sin v)\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$.
- (c) O parabolóide hiperbólico $\mathbf{r} = (au \cosh v)\mathbf{i} + (bu \sinh v)\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$.
- (d) O hiperbolóide $\mathbf{r} = (a \sinh u \cos v)\mathbf{i} + (b \sinh u \sin v)\mathbf{j} + c \cosh u\mathbf{k}$.

3. Determine uma representação paramétrica para a superfície de revolução S de um toro gerado pelo círculo $(x - a)^2 + z^2 = b^2$, $y = 0$, com $0 < b < a$.

4. Determine uma representação do plano tangente e da reta normal às superfícies no ponto indicado.

(a) $z = xy$, em $P = (1, 1, 1)$.

(b) $z = x^2$, em $P = (2, 1, 4)$.

(c) $x^2 + y^2 = 8$, em $P = (2, 2, 3)$.

6.2 Integrais de Superfície

Nesta seção vamos estender o conceito de integral de linha para integrais de superfícies.

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, com D uma região, e $S \subseteq D$ uma superfície regular e orientável dada pelas equações paramétricas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad \text{e} \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in U,$$

com U uma região compacta. Quando $v = c_2$ e $u = c_1$ em U podemos ver as equações paramétricas da superfície S como uma curva sobre S . Logo, os vetores tangentes, no ponto P , às curvas $\mathbf{r}(u, c_2)$ e $\mathbf{r}(c_1, v)$ são

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Em particular, os vetores

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v$$

são também tangentes às curvas $\mathbf{r}(u, c_2)$ e $\mathbf{r}(c_1, v)$.

As curvas $\mathbf{r}(u, c_2)$ e $\mathbf{r}(c_1, v)$ podem ser usadas para particionar a região U em elementos de área $\Delta A = \Delta u \Delta v$ de modo semelhante à formação da integral dupla. Observe que cada retângulo de área ΔA desta divisão corresponde um elemento de área $\Delta \mathbf{r}$ sobre S , com área dada, aproximadamente, pela área do paralelogramo determinado pelos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, isto é,

$$\Delta \mathbf{r} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v,$$

com o vetor

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

normal à superfície S em $\mathbf{r}(u, v)$, confira Figura 6.5.

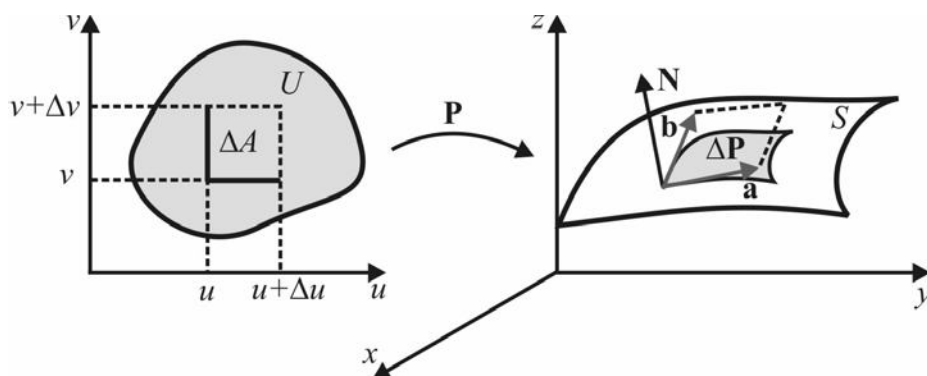


Figura 6.5: Elemento de área.

Portanto, é razoável definirmos a *integral de superfície* de f sobre S por

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv,$$

com $dS = d\mathbf{r}$.

Já vimos, no curso de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, a identidade vetorial

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|^2 \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2.$$

Assim, pondo

$$E = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|^2, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad \text{e} \quad G = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2,$$

obtemos

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Observe que quando $f(x, y, z) = 1$ a integral de superfície de f sobre S representa a *área* da superfície S , ou seja,

$$A(S) = \iint_U \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Exemplo 6.8 Determine a área da superfície de um cone de revolução S gerado pela reta $z = x$, $y = 0$ e $z = 1$.

Solução. Pelo Exemplo 6.2, uma representação paramétrica vetorial para S é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = (v \cos u)\mathbf{i} + (v \sin u)\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \quad (u, v) \in U,$$

com

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq v \leq 1\}.$$

Como

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -(v \sin u)\mathbf{i} + (v \cos u)\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \cos u\mathbf{i} + \sin u\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

temos que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (v \cos u) \mathbf{i} + (v \sin u) \mathbf{j} - v \mathbf{k}.$$

Portanto,

$$A(S) = \iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2v^2 dv du = \frac{4\pi}{3} \text{ u a,}$$

que é o resultado desejado. ■

Exemplo 6.9 Determine a área da superfície S .

1. Se S é dada pelo gráfico da função $z = f(x, y)$, com $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e D uma região compacta.
2. Se S é dada implicitamente pela equação $f(x, y, z) = c$, com c uma constante real e $f_z \neq 0$.

Solução. (1) Para resolver este problema devemos dividir a prova em três passos:

1.^o **Passo.** Determine uma representação paramétrica mais simples possível para a superfície S . Uma parametrização de S é dada pelas equações paramétricas (autoparametrização)

$$x = x, \quad y = y \text{ e } z = f(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

2.^o **Passo.** Determine o elemento de área da superfície

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right| dx dy = \sqrt{EG - F^2} dx dy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy,$$

pois

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x} \right) \text{ e } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left(\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

implicam que

$$E = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right|^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \text{ e } G = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right|^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2.$$

3.^o **Passo.** Calcule a integral dupla comum

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

(2) Seja $F(x, y, z) = f(x, y, z) - c$. Então $F_z = f_z \neq 0$ e pelo Teorema da Função Implícita, obtemos $z = z(x, y)$,

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z} \text{ e } z_y = -\frac{f_y}{f_z}.$$

Portanto, pelo item (1), obtemos

$$A(S) = \iint_D \frac{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}{|f_z|} dx dy.$$

É importante observar que o resultado acima continua verdadeiro se substituirmos z por x ou y . ■

Exemplo 6.10 *Determine a área da elipse obtida pela interseção do plano $z = 2x + 2y + 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.*

Solução. A projeção da elipse sobre o plano xy é o círculo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Como $z = f(x, y)$ temos, pelo item (1) do Exemplo 6.9, que

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + 2^2 + 2^2} dx dy \\ &= 3 \iint_D dx dy = 3\pi \text{ u. a,} \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. ■

Agora veremos que a integral de superfície

$$\iint_S f(x, y, z) dS$$

é análoga a integral de linha

$$\int_C f(x, y) ds = \int_C L dx + M dy.$$

Para isso, consideremos o vetor normal unitário

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k},$$

com α , β e γ os ângulos diretores, isto é, os ângulos entre o vetor $\mathbf{n}$ e os vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, respectivamente. Como

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k}$$

temos que

$$\cos \alpha = \frac{1}{|\mathbf{N}|} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \cos \beta = \frac{1}{|\mathbf{N}|} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \quad \text{e} \quad \cos \gamma = \frac{1}{|\mathbf{N}|} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Provaremos, confira a Figura 6.6,

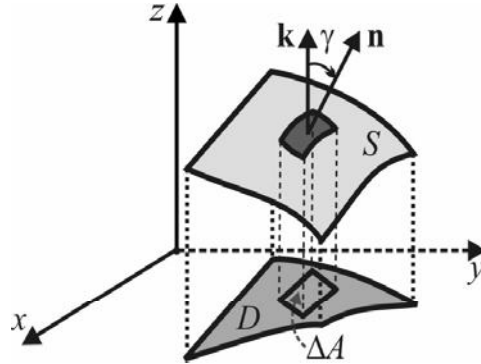


Figura 6.6: Projeção sobre o plano xy .

que a projeção ortogonal (com sinal) do elemento de área $\Delta \mathbf{r}$ sobre S no plano xy é igual a

$$\Delta A = \Delta \mathbf{r} \cos \gamma \quad \text{ou} \quad \Delta \mathbf{r} = \sec \gamma \Delta A,$$

com $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$, pois

$$\begin{aligned} \pm \Delta A &= \left(\text{Pr} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) \times \text{Pr} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \right) \bullet \mathbf{k} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \bullet \mathbf{k} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| |\mathbf{k}| \cos \gamma = \Delta \mathbf{r} \cos \gamma. \end{aligned}$$

Assim, é razoável definir

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = \iint_S f(x, y, z) \cos \gamma dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

sendo $dS = |\mathbf{N}| du dv$. Agora, se $L, M, N : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas com $S \subseteq D$, então

$$\iint_S L dy dz + M dz dx + N dx dy = \pm \iint_D \left(L \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + M \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + N \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) du dv,$$

com o sinal depende da orientação $(S, \mathbf{n})$. Portanto, se $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial definido por

$$\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k},$$

com $L, M, N : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em D , então

$$\begin{aligned} \iint_S L dy dz + M dz dx + N dx dy &= \iint_D (L \cos \alpha + M \cos \beta + N \cos \gamma) dS \\ &= \iint_D (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS. \end{aligned}$$

Exemplo 6.11 Seja S a superfície dada pelo gráfico da função $z = f(x, y)$, com $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e D uma região compacta. Mostre que

$$\iint_S L dy dz + M dz dx + N dx dy = \iint_D \left(-L \frac{\partial f}{\partial x} - M \frac{\partial f}{\partial y} + N \right) dx dy.$$

Neste caso

$$dS = \pm \left(-L \frac{\partial f}{\partial x} - M \frac{\partial f}{\partial y} + N \right) dx dy,$$

ou ainda,

$$dS = \mathbf{n} |\sec \gamma| dx dy = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n} \bullet \mathbf{k}|} dx dy.$$

pois a componente z em N é igual a 1 e

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{n} \bullet \mathbf{k}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{k}|} = \mathbf{n} \bullet \mathbf{k} = \frac{\mathbf{N} \bullet \mathbf{k}}{|\mathbf{N}|}.$$

Solução. Uma representação paramétrica de S é dada pelas equações paramétricas

$$x = x, \quad y = y \quad \text{e} \quad z = f(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Como

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

e de modo inteiramente análogo, obtemos

$$\frac{\partial(z, x)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = 1,$$

temos que

$$\iint_S L dy dz + M dz dx + N dx dy = \iint_D \left(-L \frac{\partial f}{\partial x} - M \frac{\partial f}{\partial y} + N \right) dx dy,$$

que é o resultado desejado. ■

Exemplo 6.12 Calcule a integral de superfície

$$\iint_S xy dS,$$

com S a superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ e $-1 \leq z \leq 1$.

Solução. Pelo Exemplo 6.1, uma representação paramétrica vetorial para S é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = (2 \cos u) \mathbf{i} + (2 \sin u) \mathbf{j} + v \mathbf{k}, \quad (u, v) \in U,$$

com

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi \quad \text{e} \quad -1 \leq v \leq 1\}.$$

Assim,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (-2 \sin u, 2 \cos u, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 0, 1) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (2 \cos u) \mathbf{i} + (2 \sin u) \mathbf{j}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_S xy dS &= \iint_U 4 \cos u \sin u \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sin(2u) dv du = 0, \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. ■

Vamos finalizar esta seção determinando o elemento linear ds de uma curva C que se situa sobre a superfície S , dada pelas equações paramétricas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad \text{e} \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in U,$$

com U uma região compacta. A diferencial

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

pode ser escrita sob a forma

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \mathbf{k} \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv. \end{aligned}$$

Então o elemento linear ds da curva C é dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= |d\mathbf{r}|^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \right) \bullet \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \right) \\ &= Edu^2 + 2F du dv + G dv^2. \end{aligned}$$

Esta forma diferencial quadrática chama-se *primeira forma fundamental* de S .

Exemplo 6.13 Considerando o plano xy parametrizado em coordenadas polares

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta) \mathbf{i} + (r \sin \theta) \mathbf{j}, \quad (r, \theta) \in U,$$

com

$$U = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r \in \mathbb{R}_+ \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Determine a primeira forma fundamental de xy .

Solução. Como

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

temos que

$$E = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right|^2 = 1, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{e} \quad G = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right|^2 = r^2.$$

Portanto, $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. ■

EXERCÍCIOS

1. Calcule a área da superfície S em cada caso:

- (a) S é uma esfera de raio ρ .
- (b) S é a porção do plano $x + y + z = a$, com $a > 0$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.
- (c) S é a porção do parabolóide $x^2 + y^2 + z = a^2$, delimitada pelo cilindro vazado $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.
- (d) S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = ay$.
- (e) S é a porção do cilindro $x^2 + z^2 = a^2$, delimitada por $y^2 = a(x + a)$.
- (f) S é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$.
- (g) S é a porção do parabolóide $x^2 + z^2 = 2ay$, com $a > 0$, abaixo do plano $y = a$.
- (h) S é a porção do cilindro $y^2 + z^2 = 16$, compreendida acima da região triangular $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 2 - x$.
- (i) S é a porção do plano $3x + 2y + z = 7$ no primeiro octante.
- (j) S é a porção do cilindro parabólico $z^2 = 8x$, compreendida acima da região $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq \sqrt{x}$.
- (k) S é a porção do cilindro $y^2 + z^2 = 4$, interna ao cilindro parabólico $x^2 = 2y + 4$ e acima do plano $z = 0$.
- (l) S é o triângulo com vértices $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ e $C = (0, 0, 2)$.
- (m) S é a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e externa ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

2. Seja S a superfície de um paralelogramo em $\mathbb{R}^3$ não paralelo aos planos coordenados. Mostre que se S_1 , S_2 e S_3 são suas projeções nos planos coordenados, então

$$A(S) = \sqrt{A(S_1)^2 + A(S_2)^2 + A(S_3)^2}.$$

3. Deduza as fórmulas para as áreas de um cone e de um cilindro (circular reto) de raio a e altura h .

4. Calcule as seguintes integrais de superfícies:

- (a) $\iint_S x dS$, S é o cilindro $x^2 + y^2 = r^2$, $-1 \leq z \leq 1$.
- (b) $\iint_S z \sqrt{x^2 + y^2} dS$, S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, compreendida entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.
- (c) $\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS$. S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, com $x \geq 0$ e $\mathbf{F} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
- (d) $\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS$, S é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq a$ e $\mathbf{F} = \sin z \mathbf{i} + xy\mathbf{j} - \cos z \mathbf{k}$.
- (e) $\iint_S xy dS$, S é a porção do parabolóide $x^2 + y^2 = 2z$, $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.
- (f) $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$, S é a esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.
- (g) $\iint_S z^2 dS$, S é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $z = x + 3$.
- (h) $\iint_S x dS$, S é a porção do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante.
- (i) $\iint_S x dS$, S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + 2$.
- (j) $\iint_S x^2 dS$, S é a porção do plano $z = x$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- (k) $\iint_S x^2 dS$, S é porção do cone $x^2 + y^2 = z^2$, $1 \leq z \leq 2$.
- (l) $\iint_S (x + y) dS$, S é a porção do plano $2x + 3y + z = 6$ no primeiro octante.
- (m) $\iint_S \frac{xz}{y} dS$, S é a porção do cilindro $x = y^2$, situada no primeiro octante, entre os planos $z = 0$, $z = 5$, $y = 1$ e $y = 4$.

5. Determine a primeira forma fundamental das seguintes superfícies:

- (a) $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$.
- (b) $\mathbf{r} = 2u\mathbf{i} + 3v\mathbf{j}$.
- (c) $\mathbf{r} = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j}$.
- (d) $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$.
- (e) $\mathbf{r} = \cos u\mathbf{i} + \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$.
- (f) $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$.
- (g) $\mathbf{r} = 2 \cos u\mathbf{i} + 2 \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$.
- (h) $\mathbf{r} = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$.

6. Seja $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ a representação vetorial da superfície S . Mostre que a família de curvas $u = c_1$ e $v = c_2$ sobre S se interceptam em um ângulo reto se, e somente se, $\mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_v = 0$. Conclua que a família de curvas $u = c_1$ e $v = c_2$ sobre a superfície S , com representação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k},$$

não são ortogonais.

7. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies equivalentes. Mostre que

$$\iint_{S_1} f(x, y, z) dS_1 = \pm \iint_{S_2} f(x, y, z) dS_2,$$

para alguma função contínua $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, com D uma região contendo as superfícies S_1 e S_2 .

6.3 Teorema de Green

Nesta seção, por meio do *Teorema de Green*, estabeleceremos uma relação entre uma integral de linha ao longo de uma curva fechada simples C no plano e uma integral dupla comum na região plana D delimitada por C . George Green (1793-1841), matemático inglês. Neste caso, a orientação de C é definida como sendo aquela tal que a região D esteja sempre à *esquerda* quanto o ponto $\mathbf{r}(t)$ percorre C , ou seja, o vetor obtido do vetor tangente unitário

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{r}'(t)$$

mediante uma rotação anti-horária de 90° aponta sempre *para dentro* da região D .

Teorema 6.14 (Teorema de Green) *Seja C uma curva fechada simples, regular por partes que delimita a região D no plano. Se $L, M : X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções escalares contínuas que possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em X , com X uma região aberta contendo D , então*

$$\oint_C Ldx + Mdy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dxdy,$$

com a integral de linha ao longo de C orientada no sentido anti-horário.

Exemplo 6.15 *Calcule a integral de linha*

$$\oint_{\partial D} 3xydx + 2x^2dy,$$

com D a região delimitada pela reta $y = x$ e a parábola $y = x^2 - 2x$.

Solução. Primeiro faça um esboço da região D . Como $L = 3xy$ e $M = 2x^2$ temos que

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 3x, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = 4x \quad \text{e} \quad \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = x.$$

Logo, pelo Teorema de Green,

$$\oint_{\partial D} 3xydx + 2x^2dy = \iint_D x dA = \iint_D x dxdy.$$

Os pontos de interseções dos gráficos são obtidos quando (faça um esboço da região delimitada pelas curvas)

$$x^2 - 2x = x \Rightarrow x = 0 \quad \text{e} \quad x = 3.$$

Assim,

$$\iint_D x dx dy = \int_0^3 \left[\int_{x^2-2x}^x x dy \right] dx = - \int_0^3 x^2 (x-3) dx = \frac{27}{4}.$$

Portanto,

$$\oint_{\partial D} 3xy dx + 2x^2 dy = \frac{27}{4},$$

que é o resultado desejado. ■

Exemplo 6.16 Calcule a integral de linha

$$\oint_{\partial D} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy, \text{ com } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Solução. Observe que a região D não é simplesmente conexa. Como

$$L = -\frac{y}{x^2+y^2} \text{ e } M = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

temos que

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ e } \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Note que $\partial D = C_3 \cup (-C_1)$, com C_3 e C_1 as circunferências de centro na origem O e raios 3 e 1, respectivamente. Portanto, pelo Teorema de Green,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} L dx + M dy &= \oint_{C_3} L dx + M dy + \oint_{-C_1} L dx + M dy \\ &= \iint_D 0 dx dy = 0. \end{aligned}$$

Neste caso,

$$\oint_{C_3} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \oint_{C_1} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy.$$

É importante observar que C_3 pode ser substituída por qualquer curva fechada simples C envolvendo a origem e C_1 por uma circunferência de centro na origem e raio suficientemente pequeno r , de modo que $C_r \cap C = \emptyset$ e C envolva C_r . A Figura 6.7 expõe graficamente a região delimitada por C e C_r . ■

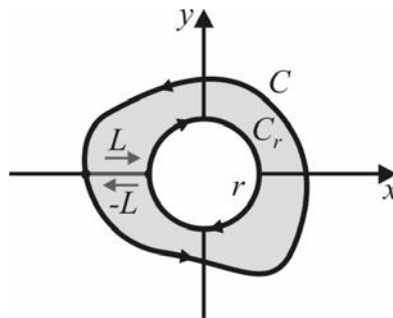


Figura 6.7: Região D .

Exemplo 6.17 (Área em Coordenadas Cartesianas) *Seja C uma curva fechada simples, regular por partes, que delimita a região D no plano. Mostre que a área $A(D)$ da região D é dada por*

$$A(D) = \oint_C xdy = - \oint_C ydx = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx.$$

Em particular, calcule a área da região D limitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solução. Como $L = 0$ e $M = x$ temos que

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 1.$$

Logo, pelo Teorema de Green,

$$\oint_C xdy = \iint_D dA = A(D).$$

Finalmente, como uma parametrização para a elipse C é dada por

$$x = a \cos t \quad \text{e} \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

obtemos

$$A = \int_0^{2\pi} a \cos t b \cos t dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi ab,$$

que é o resultado desejado. ■

Exemplo 6.18 (Área em Coordenadas Polares) *Seja C uma curva fechada simples, regular por partes, que delimita a região D no plano xy . Mostre que a área $A(D)$ da região D é dada por*

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_C r^2 d\theta.$$

Em particular, calcule a área do cardiode $r = a(1 - \cos \theta)$, $a > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Solução. Pelo Exemplo 6.17, a área $A(D)$ da região D é dada, em coordenadas cartesianas, por

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx.$$

Como $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ temos que

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \quad \text{e} \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx \\ &= \frac{1}{2} \oint_C r \cos \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) - r \sin \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \\ &= \frac{1}{2} \oint_C r^2 d\theta. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$A(D) = \frac{a^2}{2} \oint_C (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{2} a^2 \text{ u. a.},$$

que é o resultado desejado. ■

Já vimos que a integral de linha no plano em relação ao comprimento de arco s é dada por

$$\int_C Ldx + Mdy = \oint_C F_T ds,$$

com $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j}$,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \text{ e } F_T = |\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))| \cos \theta = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{u}(t)$$

a componente tangencial de $\mathbf{F}$ em $P = \mathbf{r}(t)$, na direção do vetor tangente unitário

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{r}'(t) = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j})$$

à curva C em P . Neste caso, o vetor normal unitário exterior $\mathbf{n}$ à curva C em P é definido por

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(t) = \mathbf{u} \times \mathbf{k} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} (y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j}).$$

Portanto, se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que possui derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D , com ∇f sobre C , então a derivada direcional de f em P , na direção de $\mathbf{n}$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \bullet \mathbf{n}.$$

Em particular, se $f = M\mathbf{i} - L\mathbf{j}$ é um campo vetorial ortogonal ao campo vetorial $\mathbf{F}$, então

$$\int_C Ldx + Mdy = \oint_C (f \bullet \mathbf{n}) ds = \oint_C f_N ds,$$

com f_N a componente normal de f em $P = \mathbf{r}(t)$, na direção do vetor unitário $\mathbf{n}$, pois $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$ e

$$\begin{aligned} (f \bullet \mathbf{n}) ds &= (M\mathbf{i} - L\mathbf{j}) \bullet \left(\frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} (y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j}) \right) ds \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} (Lx'(t) + My'(t)) ds \\ &= (Lx'(t) + My'(t)) dt \\ &= Ldx + Mdy. \end{aligned}$$

Note que

$$\oint_C (f \bullet \mathbf{n}) ds = \oint_C Ldx + Mdy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (\nabla \bullet f) dxdy.$$

A integral

$$\oint_C (f \bullet \mathbf{n}) ds$$

chama-se o *fluxo de divergência* de f através da curva C . Finalmente, como

$$\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k} = (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{k} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ L & M & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$$

temos que

$$\oint_C F_T ds = \oint_C L dx + M dy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D ((\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}) dxdy.$$

A integral

$$\oint_C F_T ds$$

chama-se a *circulação do fluxo* de $\mathbf{F}$ sobre a curva C . As integrais

$$\oint_C f_N ds = \iint_D (\text{div } f) dxdy \text{ e } \oint_C F_T ds = \iint_D (\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}) dxdy$$

são chamadas de *fórmulas vetoriais do Teorema de Green*.

Exemplo 6.19 Calcule a integral de linha

$$\oint_{\partial D} (x - y) dx + x dy,$$

com D a região delimitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Solução. Note que $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ e $f = x\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$. Assim, pela fórmula vetorial do Teorema de Green,

$$\oint_C (x - y) dx + x dy = \iint_D (\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}) dxdy = \iint_D 2 dxdy = 2\pi.$$

com $C = \partial D$. Observe que o mesmo resultado é obtido como

$$\oint_C (x - y) dx + x dy = \iint_D (\text{div } f) dxdy = \iint_D 2 dxdy = 2\pi,$$

que é o resultado desejado. ■

EXERCÍCIOS

1. Calcule as seguintes integrais de linha:

- (a) $\oint_C (\sin x + 4xy) dx + (2x^2 - \cos y) dy$, C é qualquer curva regular fechada simples.
- (b) $\oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) dy$, C é qualquer curva regular fechada simples, que não envolve a origem.
- (c) $\oint_C 2dx + (x^2 - y \tan y) dy$, C é o círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.
- (d) $\oint_C L(x) dx + M(y) dy$, C é um círculo de raio r e $L(x)$ e $M(y)$ são de funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas na região delimitada pela curva C .
- (e) $\oint_C \exp(x) \sin y dx + \exp(x) \cos y dy$, C é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$.
- (f) $\oint_C x^2 dx + xy dy$. C é a cardioide $r = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
2. Sejam D o anel descrito por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ e $L(x, y)$ e $M(x, y)$ funções contínuas com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D tais que $L_y = M_x$ na região D . Quantos valores são possíveis para a integral de linha

$$\oint_C L dx + M dy,$$

sendo C uma curva regular por partes fechada simples contida em D ? Este resultado pode ser ilustrado com campo vetorial Faraday

$$\mathbf{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Michael Faraday (1791-1867), físico e químico inglês.

3. Sejam C uma curva regular fechada simples, orientada, que não passa por $(0, 0)$, e $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Mostre que se $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário exterior à curva C , então a integral de linha

$$\oint_C (\nabla f \bullet \mathbf{n}) ds$$

assume apenas os valores 0 e 4π , conforme a curva C envolva ou não a origem.

4. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em D . Mostre que se $\Delta f = \nabla^2 f = 0$ em D , então

$$\int_{\partial D} f_y dx - f_x dy = 0.$$

5. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em D . Mostre que se $\Delta f = \nabla^2 f = 0$ em D ,

$$\int_{\partial D} (f_x dy - f_y dx) g = \iint_D (g_x f_x + g_y f_y) dx dy,$$

para qualquer função contínua $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D .

6. Sejam C uma curva simplesmente conexa e orientável que delimita uma região $R \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j}$ o vetor normal unitário exterior à curva C . Mostre que

$$\oint_C n_1(x, y) ds = \oint_C n_2(x, y) ds = 0.$$

7. Mostre que se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função contínua com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D , então

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} f n_1 ds,$$

com $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j}$ o vetor normal unitário exterior à fronteira ∂D .

6.4 Teorema de Gauss

Nesta seção apresentaremos um dos mais importantes teoremas do cálculo vetorial: O *Teorema da Divergência*, também conhecido por *Teorema de Gauss*. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático alemão. Este teorema estabelece o fluxo de um campo vetorial através de qualquer superfície fechada S que é fronteira de uma região U em três dimensões.

Teorema 6.20 (Teorema da Divergência) *Sejam S uma superfície regular, fechada e orientável, que delimita uma região $U \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário exterior a S . Se $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial definido por*

$$\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k},$$

com $L, M, N : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funções escalares contínuas que possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D e D uma região aberta contendo S , então

$$\iint_S F_N dS = \iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS = \iiint_U (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy dz,$$

com F_N a componente normal de $\mathbf{F}$ na direção do vetor $\mathbf{n}$, ou seja, o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S é igual à integral tripla do divergente $\mathbf{F}$ de sobre U . Alternativamente,

$$\iint_S L dy dz + M dz dx + N dx dy = \iiint_U \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \iint_S L dy dz &= \iiint_U \frac{\partial L}{\partial x} dx dy dz \\ \iint_S M dz dx &= \iiint_U \frac{\partial M}{\partial y} dx dy dz \\ \iint_S N dx dy &= \iiint_U \frac{\partial N}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$

A integral

$$\iiint_U \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) dx dy dz$$

é chamada o *fluxo* do campo vetorial $\mathbf{F}$ através da superfície S .

Observação 6.21 Sejam C uma curva simplesmente conexa e orientável que delimita uma região $R \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário exterior à curva C . Se $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo vetorial definido por

$$\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j},$$

com $L, M : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções escalares contínuas que possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D e D uma região aberta contendo C , então, pelo Teorema de Gauss, obtemos

$$\oint_C (f \bullet \mathbf{n}) ds = \oint_C L dx + M dy = \iint_R (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy,$$

que é o Teorema de Green, ou seja, o Teorema de Green é um caso especial do Teorema de Gauss no plano.

Exemplo 6.22 Seja U a região delimitada pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$. Determine a integral de superfície

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS,$$

com $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$ e S a superfície que delimita U .

Solução. Como

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 2 + 0 - 2xz = 2(1 - xz)$$

temos, pelo Teorema de Gauss, que

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS = 2 \iiint_U (1 - xz) dx dy dz = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1 - xz) dx dy dz = \frac{3}{2},$$

que é o resultado desejado. ■

Exemplo 6.23 Seja U a região delimitada pelo cilindro circular reto $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 3$. Determine a integral de superfície

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS,$$

com $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ e S a superfície que delimita U .

Solução. Como

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

temos, pelo Teorema de Gauss, que

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS = 3 \iiint_U (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Consideremos a transformação $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e $z = z$. Então

$$J(r, \theta, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Assim,

$$3 \iiint_U (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 3 \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 + z^2) r dr d\theta dz = 180\pi.$$

Portanto,

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS = 180\pi,$$

que é o resultado desejado. ■

Exemplo 6.24 *Seja U a região delimitada pelo cilindro $z = 4 - x^2$ e pelos planos $y = 5$, xy e xz . Determine a integral de superfície*

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS,$$

com $\mathbf{F} = (x^3 + \sin z)\mathbf{i} + (x^2y + \cos z)\mathbf{j} + \exp(x^2 + y^2)\mathbf{k}$ e S a superfície que delimita U .

Solução. Primeiro faça um esboço da superfície e de sua orientação. Observe que seria extremamente difícil calcular diretamente a integral de superfície. Não obstante, nossa tarefa será possível graças ao Teorema de Gauss. Como

$$L = x^3 + \sin z, \quad M = x^2y + \cos z \quad \text{e} \quad N = \exp(x^2 + y^2)$$

temos que

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = x^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial z} = 0,$$

ou seja,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 3x^2 + x^2 + 0 = 4x^2.$$

Pelo Teorema de Gauss

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS = 4 \iiint_U x^2 dx dy dz.$$

Assim, basta calcular essa integral tripla,

$$4 \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^5 x^2 dy dz dx = \frac{512}{3}.$$

Portanto,

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS = \frac{512}{3},$$

que é o resultado desejado. ■

Exemplo 6.25 *Determine o volume da região (elipsoide sólido)*

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \ a > 0, \ b > 0 \ e \ c > 0 \right\}.$$

Solução. Note que, fazendo $L = M = 0$ e $N = z$, obtemos

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E dx dy dz = \iiint_E \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iint_S L dy dz + M dz dx + N dx dy \\ &= \iint_S z dx dy, \end{aligned}$$

com S a superfície do elipsoide. Agora, uma representação pararamétrica vetorial de S é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a \cos \theta \sin \phi) \mathbf{i} + (b \sin \theta \sin \phi) \mathbf{j} + (c \cos \phi) \mathbf{k},$$

com

$$D = \{(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

Logo,

$$\iint_S z dx dy = c \iint_D \cos \phi \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} \right| d\theta d\phi.$$

Como

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} = -ab \sin \phi \cos \phi$$

temos que

$$\iint_S z dx dy = abc \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \phi \sin \phi d\phi d\theta = \frac{4}{3} abc \pi.$$

Portanto, $V(E) = \frac{4}{3} abc \pi$ u v. ■

Observação 6.26 *Pelo Exemplo 6.25, o volume da esfera sólida*

$$S_\rho^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \rho^2\}$$

é igual a

$$V(S_\rho^3) = \frac{4}{3} \rho^3 \pi = \rho^3 V(S_1^3).$$

Note que

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \Leftrightarrow z^2 \leq 1 - x^2 - y^2 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1.$$

Assim,

$$V(S_1^3) = \iiint_{S_1^3} dx dy dz = \iint_C \left[\int_{S_\delta^1} dz \right] dx dy,$$

com

$$C = S_1^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ e } S_\delta^1 = \{z \in \mathbb{R} : z^2 \leq \delta^2, \delta = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}.$$

Como

$$V(S_\delta^1) = \int_{S_\delta^1} dz = \delta V(S_1^1)$$

temos que

$$V(S_1^3) = V(S_1^1) \iint_C \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Logo, considerando a mudança de coordenadas $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, teremos

$$V(S_1^3) = V(S_1^1) \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr d\theta = \frac{2}{3} \pi V(S_1^1).$$

Portanto, obtemos a fórmula de recorrência

$$V(S_1^n) = \frac{2}{n} \pi V(S_1^{n-2}), \text{ com } n \geq 3,$$

$V(S_1^1) = 2$ e $V(S_1^2) = \pi$, para determinar o volume de uma esfera sólida de centro na origem e raio igual a 1 em $\mathbb{R}^n$.

EXERCÍCIOS

1. Seja $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$. Calcule as integrais

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dx dy \text{ e } \iiint_E (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy dz,$$

com S a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e E é a esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$. Compare os valores.

2. Calcule a integral

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS,$$

nos seguintes casos:

- (a) $\mathbf{F} = 3y \mathbf{i} - 2x \mathbf{j}$, S é a região delimitada pelo hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.
 - (b) $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j}$, S é a região delimitada pela elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.
3. Calcule o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}$ através da superfície S em cada um dos seguintes casos:

- (a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, com S a superfície do sólido limitado pelo semiesfera $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$.
- (b) $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, com S a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- (c) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$, com S a parte do primeiro octante, limitada pelos três planos coordenados e pela esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- (d) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, com S a fronteira do sólido no primeiro octante limitado pelos planos $x = 1$, $y = 2$ e $3x + 2y + z = 12$.
4. Seja S uma superfície regular por partes, fechada simples e orientável, que delimita a região U no espaço. Mostre que o volume $V(U)$ da região U é dada por

$$\begin{aligned} V(U) &= \iint_S x dy dz = \iint_S y dz dx = \iint_S z dx dy \\ &= \frac{1}{3} \iint_S (x dy dz + y dz dx + z dx dy). \end{aligned}$$

5. Calcule o volume de um cubo qualquer.
6. Calcule o volume do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ e $0 \leq z \leq h$.
7. Mostre que se $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas com derivadas parciais de primeira ordem em D , então

$$\nabla \bullet (g \nabla f) = g \Delta f + \nabla f \bullet \nabla g.$$

Conclua que

$$\iiint_U (g \Delta f + \nabla f \bullet \nabla g) dx dy dz = \iint_S g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

com S a superfície regular, fechada e orientável, que delimita uma região $U \subseteq \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário exterior a S e $U \subseteq D$.

8. Mostre que se $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua com derivadas parciais de primeira ordem em D , então

$$\iiint_U (f \Delta f + |\nabla f|^2) dx dy dz = \iint_S f \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

com S a superfície regular, fechada e orientável, que delimita uma região $U \subseteq \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário exterior a S e $U \subseteq D$.

9. Mostre que se $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua com derivadas parciais de primeira ordem em D , então

$$\iiint_U \Delta f dx dy dz = \iint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

com S a superfície regular, fechada e orientável, que delimita uma região $U \subseteq \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário exterior a S e $U \subseteq D$.

10. Mostre que se $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas com derivadas parciais de primeira ordem em D , então

$$\iiint_U (g\Delta f - f\Delta g) dxdydz = \iint_S \left(g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

com S a superfície regular, fechada e orientável, que delimita uma região $U \subseteq \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário exterior a S e $U \subseteq D$.

11. Calcule a integral

$$\iint_S g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

com $f = y^2 + z^2$, $g = x^2 + y^2$ e S a superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

12. Calcule a integral

$$\iint_S \left(g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right) dS,$$

com $f = x^2 + y^2 + x + 2z$, $g = x^2 + y^2 + x + z$ e S a superfície do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ e $0 \leq z \leq h$.

13. Calcule a integral

$$\iint_S f \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

com $f = \exp(x) \sin y$ e S a superfície delimitada pelo planos $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

6.5 Teorema de Stokes

Nesta seção apresentaremos o *Teorema de Stokes* que estabelece uma relação entre uma integral de linha ao longo de uma curva fechada simples C no espaço e uma integral de superfície sobre S delimitada por C , ou seja, vamos estender o Teorema de Green para o espaço. George Gabriel Stokes (1819-1903), matemático e físico irlandês.

Teorema 6.27 (Teorema de Stokes) *Seja S uma superfície fechada, regular e orientável, com fronteira $C = \partial S$ orientada. Se $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial definido por*

$$\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k},$$

com $L, M, N : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funções escalares contínuas que possuem derivadas parciais primeira ordem contínuas em D e D uma região aberta contendo S , então

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S ((\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}) dS = \iint_S (\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}) dS,$$

com $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário exterior à superfície S . Alternativamente,

$$\begin{aligned} \oint_C Ldx + Mdy + Ndz &= \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dzdx \\ &\quad + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dxdy. \end{aligned}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned}\oint_C L dx &= \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) dy dz \\ \oint_C M dy &= \iint_S \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dz dx \\ \oint_C N dz &= \iint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy.\end{aligned}$$

A integral

$$\iint_S (\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}) dS$$

é chamada o *fluxo do rotacional de $\mathbf{F}$ através da superfície S* , com $C = \partial S$.

Observação 6.28 Seja S uma região simplesmente conexa e orientável, com fronteira $C = \partial S$ orientada. Se $\mathbf{F} : S \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo vetorial definido por $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j}$, com $L, M : S \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções escalares contínuas que possuem derivadas parciais primeira ordem contínuas em S , então, pelo Teorema de Stokes, obtemos

$$\oint_C L dx + M dy = \iint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy,$$

que é o Teorema de Green, ou seja, o Teorema de Green é um caso especial do Teorema de Stokes.

Exemplo 6.29 Calcule a integral de linha

$$\oint_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz,$$

com C a fronteira da superfície S determinada pelo plano $x + y + z = a$, $a > 0$ no primeiro octante.

Solução. Como $L = y^2$, $M = z^2$ e $N = x^2$ temos que

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \text{ e } \frac{\partial N}{\partial y} = 0.$$

Assim,

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = -2z, \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = -2x \text{ e } \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = -2y.$$

Logo, pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned}\oint_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= \iint_S (-2z) dy dz + (-2x) dz dx + (-2y) dx dy \\ &= -2 \iint_S z dy dz + x dz dx + y dx dy.\end{aligned}$$

Sendo $z = a - x - y$, $dz = -dx$ e $dz = -dy$, obtemos

$$\begin{aligned} -2 \iint_S z dy dz + x dz dx + y dx dy &= -2 \iint_S -z dx dy - x dx dy + y dx dy \\ &= -2a \iint_D dx dy, \end{aligned}$$

com D a projeção de S sobre o plano xy , ou seja, o triângulo delimitado pelos eixos coordenados e a reta $x + y = a$. Portanto,

$$\oint_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz = -2a \int_0^a \int_0^{a-x} dy dx = -2a \cdot \frac{a^2}{2} = -a^3.$$

Observe que sem o Teorema de Stokes deveríamos calcular três integrais curvilíneas, pois a curva é formada por três segmentos. ■

Exemplo 6.30 Calcule a integral de linha

$$\oint_C (3x^2 + y^2) dx + 2xy dy + 3z^2 dz,$$

com C a fronteira de qualquer superfície regular, fechada e orientável.

Solução. Como $\mathbf{F} = (3x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$ temos que

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 + y^2 & 2xy & 3z^2 \end{vmatrix} = [(0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)y\mathbf{j} + (2y - 2y)\mathbf{k}] \bullet \mathbf{n} = 0.$$

Logo, pelo Teorema de Stokes,

$$\oint_C (3x^2 + y^2) dx + 2xy dy + 3z^2 dz = \iint_S ((\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}) dS = 0.$$

Note que o campo $\mathbf{F}$ é conservativo. ■

Exemplo 6.31 Calcule a circulação do campo vetorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ ao longo da curva C , $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 3$, orientada no sentido anti-horário, de duas maneiras:

1. Por um cálculo direto.
2. Usando o Teorema de Stokes.

Solução. (1) A curva C é uma circunferência de raio 2 no plano $z = 3$. Assim, uma parametrização para C é dada por

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t \quad \text{e} \quad z = 3, \quad t \in [0, 2\pi].$$

De modo que $dx = -2 \sin t dt$, $dy = 2 \cos t dt$ e $dz = 0$. Logo, a circulação do campo vetorial $\mathbf{F}$ é dada por

$$\oint_C y dx + x^2 dy - z dz = \int_0^{2\pi} (-4 \sin^2 t + 8 \cos^3 t) dt = -4\pi.$$

(2) A superfície fechada, regular e orientável S , com fronteira $C = \partial S$ é o círculo sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } z = 3\}.$$

Neste caso, para manter a orientação de C devemos escolher $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Como $\text{rot } \mathbf{F} = (2x - 1)\mathbf{k}$ temos, pelo Teorema de Stokes, que

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}) dS = \iint_S (2x - 1) dx dy.$$

Consideremos a transformação em coordenadas polares $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Então

$$J(r, \theta) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

Note que a região S foi transformada na região

$$R_{r\theta} = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } z = 3\}$$

no plano $r\theta$.

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \iint_{R_{r\theta}} (2r \cos \theta - 1) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r \cos \theta - 1) r dr d\theta = -4\pi, \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. ■

EXERCÍCIOS

1. Calcule a integral

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r},$$

com $C = \partial S$, em cada um dos seguintes casos:

- (a) $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$, com S a porção do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante.
- (b) $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$, com S a superfície do parabolóide $2z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 2$.
- (c) $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, com S a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ no interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- (d) $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, com S a semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
- (e) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$, com S a superfície do cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

2. Calcule a integral

$$\int_C Ldx + Mdy + ndz$$

em cada um dos seguintes casos:

- (a) $\int_C ydx + zdy + xdz$, com C a fronteira de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$.
- (b) $\int_C (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$, com C a fronteira de $x^2 + y^2 = 2y$, $y = z$.
- (c) $\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, com C a interseção da fronteira do cubo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$ com plano $2x + 2y + 2z = 3a$.
- (d) $\int_C x^3 dz$, com C a fronteira da superfície $z = y + 4$, $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.
- (e) $\int_C ydx - x^2 dy + 5dz$, com C a fronteira da superfície $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (1 - u^2)\mathbf{k}$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u + v \leq 1$.

3. Calcule a circulação do campo vetorial $\mathbf{F}$ ao longo da curva C , de duas maneiras

- i. Por um cálculo direto.
- ii. Usando o Teorema de Stokes,

em cada um dos seguintes casos: Reciprocamente,

- (a) $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, com C a curva $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$.
- (b) $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, com C a curva $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$ e $z \geq 0$.
- (c) $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, com C a curva obtida pela interseção do plano $x + y + 2z = 2$ com os planos coordenados.
- (d) $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$, com C a curva $x^2 + y^2 = z$ e $z = 1$.
- (e) $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i}$, com C a curva $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.
- (f) $\mathbf{F} = zy^2\mathbf{i} - xz^2\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$, com C a curva $x = y^2 + z^2$, $x = 9$ e $\mathbf{n} = \mathbf{i}$.
- (g) $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j}$, com C a curva $x^2 + y^2 = 9$, $3y + 4z = 5$ e $\mathbf{n} = \frac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$.
- (h) $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, com C a curva $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = z$ e $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + \mathbf{k})$.

4. Sejam S uma superfície dada na forma paramétrica por

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (2 - u^2 + v^2)\mathbf{k},$$

com $u^2 + v^2 \leq 1$, e $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{k}$ um campo vetorial. Calcule o fluxo de $\text{rot } \mathbf{F}$ através de S de duas maneiras: primeiro por um cálculo direto e pelo Teorema de Stokes. [resp. $-\pi$]

5. Sejam $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ o vetor posição do ponto $P = (x, y, z)$ e $r = |\mathbf{r}|$. Mostre que o fluxo do campo vetorial

$$\mathbf{F} = \frac{1}{r^3} \mathbf{r}$$

através de uma superfície simples fechada regular S que não contenha a origem é igual a zero. Qual seria o fluxo do campo $\mathbf{F}$, se a superfície S contivesse a origem no seu interior? [resp. 4π]

Avaliando o que foi construído

Neste Capítulo apresentamos os conceitos de superfícies parametrizadas e integrais de superfície. Além disso, apresentamos os Teoremas de Divergências, os quais são de grande importância no Cálculo Vetorial e Geometria Analítica. Em particular, o Teorema de Green tem grande importância na teoria das variáveis complexas. Portanto, você pode procurar as listas de exercícios no final de cada seção para trabalhar no desenvolvimento de resultados relacionados. Você ainda terá oportunidade de por em prática seus conhecimentos nas aplicações elaboradas sobre o tema.

Prepare-se para grandes descobertas!

Respostas, Sugestões e Soluções

Seção 6.1

1. Vamos resolver apenas o item (a).

- (a) Uma parametrização do plano xy é $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Já vimos, no curso de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, que a equação paramétrica do plano é dada por

$$\begin{cases} x = x(u, v) = a_0 + a_1u + a_2v \\ y = y(u, v) = b_0 + b_1u + b_2v \end{cases}$$

com $u, v \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\mathbf{r}_1(u) = (a_0 + a_1u + a_2v)\mathbf{i} + (b_0 + b_1u + b_2v)\mathbf{j}$$

é outra parametrização do plano xy , com

$$(x, y) = \varphi(u, v) = (a_0 + a_1u + a_2v, b_0 + b_1u + b_2v)$$

a mudança de parâmetro. Neste caso,

$$J(\varphi) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0.$$

(b) $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u\mathbf{k}.$

(c) $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (1 - u - v)\mathbf{k}.$

(d) $\mathbf{r}(u, v) = a \cos u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + a \sin u \mathbf{k},$ com $a > 0.$

(e) $\mathbf{r}(u, v) = (v \cos u)\mathbf{i} + (v \sin u)\mathbf{j} + v^2 \mathbf{k}.$

(f) $\mathbf{r}(u, v) = v\mathbf{i} + 3 \cos u \mathbf{j} + \sin u \mathbf{k}.$

2. Vamos resolver apenas o item (d).

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

(b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2.$

(c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z^2.$

(d) Como $x = a \sinh u \cos v$, $y = b \sinh u \sin v$ e $z = c \cosh u$ temos que

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= -\frac{1}{a^2}(a^2 \sinh^2 u \cos^2 v) - \frac{1}{b^2}(b^2 \sinh^2 u \sin^2 v) \\ &\quad + \frac{1}{c^2}(c^2 \cosh^2 u) \\ &= -\sinh^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \cosh^2 u \\ &= -\sinh^2 u + \cosh^2 u = 1. \end{aligned}$$

que é a equação cartesiana do hiperboloide $\mathbf{r} = (a \sinh u \cos v)\mathbf{i} + (b \sinh u \sin v)\mathbf{j} + c \cosh u \mathbf{k}.$

3. Uma parametrização para o círculo $(x - a)^2 + z^2 = b^2$ é dada pelas equações

$$x = a + b \cos v, \quad y = 0 \quad \text{e} \quad z = b \sin v, \quad v \in [0, 2\pi].$$

Assim, após um giro de um ângulo u no sentido de x para y , obtemos uma cópia do círculo cuja parametrização em coordenadas cilíndricas é dada pelas equações

$$r = a + b \cos v, \quad \theta = u \quad \text{e} \quad z = b \sin v, \quad v \in [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad u \in [0, 2\pi].$$

Como $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ temos que

$$\mathbf{r}(u, v) = (a + b \cos v) \cos u \mathbf{i} + (a + b \cos v) \sin u \mathbf{j} + b \sin v \mathbf{k}, \quad u, v \in [0, 2\pi],$$

é a parametrização do toro de revolução.

4. Vamos resolver apenas o item (c).

(a) $x + y - z = 1$ e

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) $4x - z = 4$ e

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 4 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(c) Seja $F(x, y) = x^2 + y^2 - 8$. Então $\nabla F(P) = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Logo,

$$\overrightarrow{PQ} \bullet \nabla F(P) = 0 \Leftrightarrow 4(x - 2) + 4(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0.$$

Finalmente, a reta normal à superfície S no ponto P é a reta paralela ao vetor $\nabla F(P) = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, isto é,

$$\overrightarrow{PQ} = t\nabla f(P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Seção 6.2

- Observe a solução do Exemplo 6.9. (a) $4\pi\rho^2$, (b) $\pi a^2\sqrt{3}$, (c) $\frac{(37\sqrt{37}-5\sqrt{5})\pi}{24} \simeq 30.71$, (d) $(2\pi - 4)a^2$, (e) $8a^2\sqrt{2}$, (f) $\pi a^2\sqrt{2}$, (g) $\frac{(3\sqrt{3}-1)2\pi a^2}{3}$, (h) $8\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} - 16$, (i) $\frac{49\sqrt{14}}{12}$, (j) $\frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$, (k) $16\sqrt{2}$, (l) $\sqrt{22}$, (m) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2}$.
- Sejam $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ os vetores que geram o paralelogramo S . Então a área $A(S_1)$ da projeção de S sobre o plano xy é dado por

$$\begin{aligned} A(S_1) &= (\text{Pr } \mathbf{a} \times \text{Pr } \mathbf{b}) \bullet \mathbf{k} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{k} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{k}| \cos \gamma = A(S) \cos \gamma, \end{aligned}$$

com γ o ângulo diretor entre os vetores

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{k}.$$

De modo inteiramente análogo, obtemos $A(S_2) = A(S) \cos \beta$ (plano xz) e $A(S_3) = A(S) \cos \alpha$ (plano yz). Assim,

$$A(S_1)^2 + A(S_2)^2 + A(S_3)^2 = A(S)^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = A(S)^2,$$

pois

$$\cos \gamma = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}, \quad \cos \beta = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \quad \text{e} \quad \cos \alpha = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

Portanto,

$$A(S) = \sqrt{A(S_1)^2 + A(S_2)^2 + A(S_3)^2}.$$

3. $\pi a \sqrt{a^2 + h^2}$ e $2\pi a h$.

4. Comprove as respostas. (a) 0, (b) $2\pi(16\sqrt{2} - 5\sqrt{5})$, (c) $\frac{4}{3}\pi\rho^3$, (d) $(1 - \cos a)r + \frac{1}{3}ar^3$, (e) $\frac{1}{15}(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1)$, (f) $4\pi\rho^4$, (g) 60π , (h) $\frac{\sqrt{3}}{6}$, (i) π , (j) $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$, (k) $\frac{15\sqrt{2}}{4}\pi$, (l) $5\sqrt{14}$, (m) $\frac{125}{24}(13\sqrt{65} - \sqrt{5})$.

5. Vamos resolver apenas os itens (c) e (e).

(a) $ds^2 = du^2 + dv^2$.

(b) $ds^2 = 4du^2 + 9dv^2$.

(c) Como

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1, 1, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (1, -1, 0)$$

temos que

$$E = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|^2 = 2, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0 \quad \text{e} \quad G = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 = 2.$$

Portanto, $ds^2 = 2du^2 + 2dv^2$.

(d) $ds^2 = (1 + 4u^2)du^2 + dv^2$.

(e) Como

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (-\sin u, \cos u, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 0, 1)$$

temos que

$$E = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|^2 = 1, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0 \quad \text{e} \quad G = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 = 1.$$

Portanto, $ds^2 = du^2 + dv^2$.

(f) $ds^2 = (1 + v^2)du^2 + 2uvdu dv + (1 + u^2)dv^2$.

(g) $ds^2 = 4du^2 + dv^2$.

(h) $ds^2 = (1 + 4u^2)du^2 + u^2dv^2$.

6. Como

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

temos que os vetores tangentes (no ponto de interseção das curvas) às curvas $\mathbf{r}(u, c_2)$ e $\mathbf{r}(c_1, v)$ são

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

respectivamente. Portanto, a família de curvas $u = c_1$ e $v = c_2$ sobre S se interceptam em um ângulo reto se, e somente se, $\mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_v = 0$.

7. Sejam $\mathbf{r}_1(s, t)$, $(s, t) \in U_1$ e $\mathbf{r}_2(u, v)$, $(u, v) \in U_2$ as representações paramétricas de S_1 e S_2 , respectivamente. Então existe uma função bijetora, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$, $\varphi(s, t) = u(s, t)\mathbf{i} + v(s, t)\mathbf{j}$, tal que

$$\mathbf{r}_1(s, t) = \mathbf{r}_2(\varphi(s, t)), \quad s, t \in U_1.$$

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função contínua, com D uma região contendo as superfícies S_1 e S_2 . Então

$$\iint_{S_2} f(x, y, z) dS_2 = \iint_{U_2} f(\mathbf{r}_2(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \right| du dv.$$

Como $u = u(s, t)$ e $v = v(s, t)$ temos, pelo Teorema de Mudança de Variáveis 4.11, que

$$\iint_{U_2} f(\mathbf{r}_2(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \right| du dv = \iint_{U_1} f(\mathbf{r}_1(s, t)) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \right| ds dt$$

Sendo

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \right) \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \right) J(\varphi),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} f(x, y, z) dS_2 &= \iint_{U_1} f(\mathbf{r}_1(s, t)) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v} \right| ds dt \\ &= \pm \iint_{U_1} f(\mathbf{r}_1(s, t)) \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t} ds dt \\ &= \pm \iint_{S_1} f(x, y, z) dS_1, \end{aligned}$$

pois $J(\varphi) > 0$ ou $J(\varphi) < 0$.

Seção 6.3

- (a) 0, (b) 0, (c) 2π , (d) 0, (e) 0, (f) 0.
- Como a curva C pode ser a fronteira de D , $C = C_2 \cup (-C_1)$ ou uma curva regular por partes fechada simples no interior de D envolvendo o círculo C_1 (por exemplo, um círculo C_r , $1 \leq r \leq 2$) ou uma curva regular por partes fechada simples no interior de D sem conter o círculo C_1 temos que os valores da integral de linha são: 0, 2π e -2π , pois C_r possui duas orientações.
- Inteiramente análogo ao Exercício 2.

4. Como $L = f_y$ e $M = -f_x$ temos, pelo Teorema de Green, que

$$\oint_{\partial D} f_y dx - f_x dy = \iint_D \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy = - \iint_D \Delta f dx dy = 0.$$

5. Como $L = -gf_y$ e $M = gf_x$ temos, pelo Teorema de Green, que

$$\oint_{\partial D} (f_x dy - f_y dx) g = \iint_D \left(\frac{\partial(gf_x)}{\partial x} + \frac{\partial(gf_y)}{\partial y} \right) dx dy.$$

Sendo

$$\frac{\partial(gf_x)}{\partial x} = g_x f_x + g \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ e } \frac{\partial(gf_y)}{\partial y} = g_y f_y + g \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

obtemos

$$\frac{\partial(gf_x)}{\partial x} + \frac{\partial(gf_y)}{\partial y} = g_x f_x + g_y f_y + g \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = g_x f_x + g_y f_y.$$

Portanto,

$$\oint_{\partial D} (f_x dy - f_y dx) g = \iint_D (g_x f_x + g_y f_y) dx dy.$$

6. Considerando o campo vetorial $\mathbf{F} = \mathbf{i}$, obtemos $L = 1$, $M = 0$ e $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. Assim, pela fórmula vetorial do Teorema de Green, obtemos

$$\oint_C n_1(x, y) ds = \oint_C (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = \iint_R (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy = 0.$$

com R a região delimitada por C . De modo inteiramente análogo para o campo vetorial $\mathbf{F} = \mathbf{j}$, obtemos

$$\oint_C n_2(x, y) ds = \oint_C (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = \iint_R (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy = 0.$$

7. Considerando o campo vetorial $\mathbf{F} = f(x, y) \mathbf{i}$, obtemos $L = f(x, y)$, $M = 0$ e $\operatorname{div} \mathbf{F} = f_x$. Assim, pela fórmula vetorial do Teorema de Green, obtemos

$$\oint_{\partial D} n_1 f(x, y) ds = \oint_{\partial D} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = \iint_D (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy = \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy.$$

Seção 6.4

1. 0.

2. Vamos resolver apenas o item (b).

(a) 0.

(b) Como $L = x^2$, $M = y^2$ e $N = z$ temos que

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial z} = 0,$$

ou seja,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 2(x + y).$$

Pelo Teorema de Gauss

$$\oint_C (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = 2 \iint_S (x + y) dx dy.$$

Assim, basta calcular essa integral dupla, considerando a transformação $x = 5u$ e $y = 2v$, obtemos

$$2 \iint_S (x + y) dx dy = 20 \iint_{R_{uv}} (5u + 2v) du dv.$$

Note que a elipse sólida foi transformada no círculo sólido

$$R_{uv} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 20 \iint_{R_{uv}} (5u + 2v) du dv &= 40 \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-u^2}} (5u + 2v) dv \right] du \\ &= 40 \int_0^1 (5u\sqrt{1-u^2} - u^2 + 1) du = \frac{280}{3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS = \frac{280}{3}.$$

3. Vamos resolver apenas o item (a).

(a) Como $L = x$, $M = x$ e $N = z$ temos que

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial z} = 1.$$

Logo, pelo Teorema de Gauss, devemos resolver a integral

$$\iiint_U (1 + 1 + 1) dx dy dz = 3 \iiint_U dx dy dz.$$

Considerando a transformação em coordenadas esféricas

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi \quad \text{e} \quad z = \rho \cos \phi,$$

$0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, obtemos Então

$$J(\rho, \theta, \phi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \rho^2 \sin \phi.$$

e

$$\begin{aligned} 3 \iiint_U dx dy dz &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a (\rho^2 \sin \phi) d\rho d\phi d\theta = a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi d\theta \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a^3. \end{aligned}$$

Portanto, o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}$ é igual a $2\pi a^3$.

(b) -3π .

(c) 0.

(d) 51.

4. Como $L = x$, $M = 0$ e $N = 0$ temos que

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

Logo, pelo Teorema de Gauss,

$$\iint_S x dy dz = \iiint_U \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_U dx dy dz = V(U).$$

5. Se a é o comprimento do lado do cubo, então

$$V(U) = \iint_S x dy dz = \int_0^a \int_0^a a dy dz = a^3, \quad \text{u v.}$$

6. Note que

$$V(U) = \iint_S x dy dz = 4 \int_0^h \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy dz = \pi h, \quad \text{u v.}$$

7. Note que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(g\nabla f) &= \operatorname{div} \left(\left(g \frac{\partial f}{\partial x}\right) \mathbf{i} + \left(g \frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathbf{j} + \left(g \frac{\partial f}{\partial z}\right) \mathbf{k} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(g \frac{\partial f}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Assim, por diferenciação direta, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial x}\right) = g \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial y}\right) = g \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(g \frac{\partial f}{\partial z}\right) = g \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Portanto,

$$\operatorname{div}(g\nabla f) = g\Delta f + \nabla f \bullet \nabla g.$$

Finalmente, aplicando o Teorema de Gauss ao campo de vetor $\mathbf{F} = g\nabla f$, obtemos

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS = \iiint_U (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy dz = \iiint_U (g\Delta f + \nabla f \bullet \nabla g) dx dy dz.$$

Como

$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{n} = (g\nabla f) \bullet \mathbf{n} = g(\nabla f \bullet \mathbf{n}) = g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$$

temos que

$$\iiint_U (g\Delta f + \nabla f \bullet \nabla g) dx dy dz = \iint_S g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

8. Basta fazer $f = g$ no Exercício 7.
9. Basta fazer $g = 1$ no Exercício 7.
10. Basta permutar f e g no Exercício 7 e em seguida subtrair.
11. $\frac{16\pi}{5}$.
12. $-2\pi a^2 h^2$.
13. $\frac{1}{8}(e^2 - 5)$.

Seção 6.5

1. (a) -1 , (b) 20π , (c) -2π , (d) π , (e) 0 .
2. (a) $-\sqrt{3}\pi a^2$, (b) 0 , (c) $-\frac{9a^3}{2}$, (d) $\frac{45\pi}{4}$, (e) $-\frac{5}{6}$.
3. (a) 4π , (b) -4π , (c) $\frac{4}{3}$, (d) -2π , (e) $\frac{128}{3}$ (f) 729π , (g) 0 , (h) $-\sqrt{2\pi}$.
4. $-\pi$.
5. 4π .

Referências Bibliográficas

- [1] Ávila, G., *Cálculo*, Vol. 3, Editora LTC, 7.^a Edição, 2006.
- [2] Boulos, P. e Abud, Z., *Cálculo Diferencial e Integral*, Vol. 2, Editora Makron Books, 2000.
- [3] Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol. 3, Editora LTC, 5.^a Edição, 2002.
- [4] Munem M. A. e Foulis D. J., *Cálculo*, Vol. 2, Editora Guanabara Dois, 1983.
- [5] Spiegel, M. R., *Cálculo Avançado*. Editora MacGraw-Hill, 1976.
- [6] Swokowski, E., *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol. 2, Editora Makron Books, 2.^a Edição, 1983.
- [7] Thomas, G. B., *Cálculo*, Vol. 2, Editora Addison-Wesley, 10.^a Edição, 2003.