

		UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA			
DISCIPLINA: CÁLCULO I			PROFESSOR(A):		
ALUNO(A): <i>Gabarito</i>					
CURSO:				MAT.:	
PERÍODO: 2007.2		TURMA(S):		DATA: 03/03/2008	
2ª PROVA DE CÁLCULO I - TURNO: TARDE					

Gabarito da segunda prova de Cálculo I (Tarde) – Período 2007.2

1. (2,0) Calcule os seguintes limites

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - \sqrt{2}}{|x^2 - 2|}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 9}{x^2 + 3x - 2}$

Resolução. a) Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} |x^2 - 2| = |4 - 2| = 2 > 0$, é imediato que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - \sqrt{2}}{|x^2 - 2|} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

b) O limite apresentado tem resolução imediata, como segue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 9}{x^2 + 3x - 2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 (4 - 9/x^3)}{x^2 (1 + 3/x - 2/x^2)} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 9/x^3}{1 + 3/x - 2/x^2} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

2. (3,0) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{se } x \leq 0 \\ -x+2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Calcule os limites laterais de f em $x = 0$. f é contínua em $x = 0$? Justifique.

b) Calcule $f'_+(1)$ e $f'_-(1)$. f é derivável em $x = 1$? Por quê?

c) f é derivável em $x = 0$? Por quê?

Resolução. a) Cálculo dos limites laterais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1)^2 = 1 \end{aligned}$$

Como os limites laterais são diferentes, f não tem limite em $x = 0 \therefore$ não é contínua nesse ponto.

- b)** Esse item pede na verdade o cálculo dos limites laterais em $x = 1$, do quociente de Newton:

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{(-x + 2) - (-1 + 2)}{x - 1} \\ &= \frac{-x + 2 + 1 - 2}{x - 1} = \frac{-x + 1}{1 - x}\end{aligned}$$

Observe que essa última expressão tem sempre valor -1 para x próximo de 1 , para valores maiores ou menores que $1 \therefore f'_+(1) = f'_-(1) = -1$. Essa igualdade também permite concluir que f é derivável em $x = 1$.

- c)** Esse item é semelhante ao anterior. Temos que considerar os limites laterais em $x = 0$ da razão incremental

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(0)}{x} &= \begin{cases} \frac{(-x + 2) - f(0)}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{(x + 1)^2 - f(0)}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(-x + 2) - 1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{(x + 1)^2 - 1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{-x + 1}{x} = -1 + \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{(x + 1)^2 - 1}{x} = \frac{x^2 + 2x}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1 + \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

E obtemos os seguintes limites laterais:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-1 + \frac{1}{x}\right) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0-} (x + 2) = 2\end{aligned}$$

$\therefore f$ não é derivável em $x = 0$.

- 3.** (1,5) Considere a função $f(x) = h(x^2) + \ln[h(x)]$, onde h é derivável em $x = 1$. Sabendo-se que $h(1) = 1$, $h'(1) = 2$, calcule $f'(1)$ e encontre a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$.

Resolução. Cálculo da derivada de f :

$$f'(x) = h'(x^2) \cdot 2x + \frac{h'(x)}{h(x)}$$

$\therefore$ em $x = 1$, temos:

$$\begin{aligned} f'(1) &= h'(1^2) \cdot 2 \cdot 1 + \frac{h'(1)}{h(1)} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{2}{1} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Desse modo, a reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(1, f(1)) = (1, 1 + \ln 2)$ é dada pela equação

$$\begin{aligned} y - (1 + \ln 2) &= f'(1)(x - 1) \iff \\ y &= 6(x - 1) + 1 + \ln 2 \iff \\ y &= 6x - 5 + \ln 2 \end{aligned}$$

4. (1,5) Sabendo que a equação

$$x^y = 3 \cos y$$

define y implicitamente como função de x , calcule $\frac{dy}{dx}$.

Resolução. A expressão x^y pode ser escrita assim: $x^y = e^{\ln(x^y)} = e^{y \ln x}$ portanto sua derivada é obtida assim:

$$\begin{aligned} (x^y)' &= (e^{y \ln x})' = (x^y)(y \ln x)' \\ &= (x^y)(y' \ln x + y \ln' x) \\ &= (x^y) \left(y' \ln x + \frac{y}{x} \right) \end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned} (3 \cos y)' &= 3(\cos' y) y' \\ &= -3y' \sin y \end{aligned}$$

de modo que, por derivação implícita, temos:

$$\begin{aligned}
 (x^y) \left(y' \ln x + \frac{y}{x} \right) &= -3y' \operatorname{sen} y \iff \\
 (x^y) y' \ln x + \frac{y}{x} &= -3y' \operatorname{sen} y \iff \\
 (x^y) y' \ln x + 3y' \operatorname{sen} y &= -\frac{y}{x} \iff \\
 y' [(x^y) \ln x + 3 \operatorname{sen} y] &= -\frac{y}{x} \iff \\
 y' &= -\frac{y}{x [(x^y) \ln x + 3 \operatorname{sen} y]}
 \end{aligned}$$

5. (2,0) Obtenha as derivadas das funções

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{(e^{3x} + x)^3} \quad \text{b) } g(x) = \operatorname{tg} \left[\sqrt{x^5 - \frac{1}{x}} \right]$$

Resolução. Em ambos os itens temos aplicação direta das regras de derivação:

a) Podemos decompor f assim: $f(x) = \frac{1}{v^3}$, onde $v = u^3$, sendo $u = e^{3x} + x$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dx} &= \frac{df}{dv} \frac{dv}{du} \frac{du}{dx} \\
 &= -\frac{1}{v^2} 3u^2 (3e^{3x} + 1) \\
 &= -\frac{3(e^{3x} + x)^2 (3e^{3x} + 1)}{[(e^{3x} + x)^3]^2} \\
 &= -\frac{3(e^{3x} + x)^2 (3e^{3x} + 1)}{(e^{3x} + x)^6} \\
 &= -\frac{3(3e^{3x} + 1)}{(e^{3x} + x)^4}
 \end{aligned}$$

b) Podemos decompor g assim: $g(x) = \operatorname{tg} v$, onde $v = \sqrt{u}$, sendo $u = x^5 - \frac{1}{x}$. Portanto

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= (\operatorname{tg}' v) \frac{dv}{du} \frac{du}{dx} \\
 &= (\sec^2 v) \frac{1}{2\sqrt{u}} (u') \\
 &= \left(\sec^2 \sqrt{x^5 - \frac{1}{x}} \right) \frac{1}{2\sqrt{x^5 - \frac{1}{x}}} \left(5x^4 + \frac{1}{x^2} \right)
 \end{aligned}$$