V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

Folheações de grau um no plano projetivo e matrizes de traço nulo

Flaviano Bahia * & Vivana Ferrer †

1 Resumo

O estudo de folheações holomorfas tem tido um enorme avanço nos últimos tempos. Trabalhos de J.P. Jouanolou, D. Cerveau, A. Lins-Neto, J.V. Pereira, F. Cukierman, O. Calvo-Andrade, X. Gómez-Mont e outros focam o interesse em aspectos globais, estudando questões como a (não-)existência de soluções algébricas, descrição das componentes dos espaços de folheações de codimensão ≥ 1, etc.

Nosso ponto de vista segue o da geometria enumerativa clássica, onde são consideradas perguntas tais como: *Quantas curvas passam por uma quantidade apropriada de pontos em posição geral? Achar o grau do espaço de curvas planas tendo uma singularidade de odem dado, etc.* Em este trabalho consideramos perguntas similares para espaços de folheações .

Vamos nos centrar no caso de folheações (=campos vetoriais) de grau um no plano projetivo complexo. O espaço de campos vetoriais de grau um no plano projetivo forma um espaço projetivo de dimensão 7, $\mathbb{P}^7$. As singularidades de um campo vetorial são os pontos onde o campo se anula, i.e., nas singularidades não temos uma direção determinada. Existem vários tipos de singularidades, que definiremos no trabalho.

Queremos estudar que tipos de singularidades podem aparecer em uma folheação de grau um (campo vetorial de grau um), e os subespaços de $\mathbb{P}^7$ de campos vetoriais que apresentam alguma singularidade de cada um desses tipos. Fixado um tipo de singularidade, vamos descrever as folheações que apresentam esse tipo de singularidade assim como um espaço de parâmetros para campos apresentando tal tipo de singularidades, e calcular codimensão e grau deste espaço em $\mathbb{P}^7$.

O grau do espaço $M \subset \mathbb{P}^7$ de campos vetoriais com singularidade de tipo dado tem a seguinte interpretação geométrica: é o número de campos vetoriais $\mathcal{X}$ apresentando uma singularidade do tipo prefixado e que são tangentes a um número adequado ($=\mathrm{cod}M$) de retas com um ponto marcado, i.e., o campo $\mathcal{X}(p)$ é paralelo a ℓ, para um número adequado de pares (ponto, reta) no conjunto $\{(p,\ell) \mid p \in \ell\}$.

O caso de campos vetoriais de grau um, se simplifica usando a correspondência existente (provada por Jouanoulou [5]) entre campos de grau um e matrizes 3×3 de trazo nulo. Mostraremos como é obtida esta correspondência e faremos um dicionário entre folheações de grau um e matrizes. Em particular, mostraremos os tipos de singularidades que correspondem com as possíveis formas de Jordan para matrizes.

Explorando esta correspondência, obteremos o grau dos espaços de campos vetoriais com singularidade de tipo prefixado, olhando para eles como espaços de matrizes com determinada forma de Jordan. O grau dos estratos determinados por forma de Jordan são conhecidos, mas nos casos mais simples mostraremos com é obtido esse grau.

Esperamos que este trabalho seja uma útil (e pela vez compreensível) introdução a problemas enumerativos, assim como ao estudo da geometria dos espaços de folheações.

No trabalho daremos todas as definições necessárias, num nível adequado para um aluno de final de graduação.

Serão necessarios conhecimentos básicos de álgebra linear, polinômios em várias variáveis, campos de vetores e 1-formas diferenciais.

*UFSJ, MG, Brasil, bahia_flaviano@yahoo.com.br
†IMPA, RJ, Brasil, vivisferrer@gmail.com

Referências para o estudo de folheações são as notas de Gómez-Mont e Ortíz Bobadilla [4] ou o livro de Lins-Neto e Scardua [6]. Para o estudo de folheações (de grau quaisquer) desde o ponto de vista enumerativo, ver a tese [2].

A seguir detalhamos o conteúdo de cada seção .

A primeira seção é uma introdução, onde pretendemos tratar algun exemplos de geometría enumerativa clássica, espaços de parâmetros para curvas planas etc,.

Na Seção 2 começaremos definindo o plano projetivo $\mathbb{P}^2$, o qual será o ambiente onde trabalharemos. Definiremos também campo de vetores em $\mathbb{P}^2$, discutiremos suas expressões globais e locais e como obter uma expressão a partir da outra. Isto motivará a definição de folheação holomorfa de dimensão um. Calcularemos a dimensão do espaço de campos de vetores de grau d em $\mathbb{P}^2$. Ainda no capítulo 2 serão estudados 1-formas diferenciáveis e como uma 1-forma pode estar relacionada com um campo de vetores. Assim definiremos também uma folheação holomorfa de dimensão um em $\mathbb{P}^2$ através de uma 1-forma. Dada uma folheação definida por um campo de vetores, mostraremos como encontrar a expressão de uma 1-forma que define a mesma folheação e também mostraremos o caminho inverso.

Na Seção 3 definiremos singularidade de um campo de vetores e de uma 1-forma, e mostraremos que um campo de vetores de grau 1 em $\mathbb{P}^2$ genérico tem 3 singularidades. A partir daí classificaremos estas singularidades e apresentaremos exemplos de campos de vetores que apresentam cada um dos tipos de singularidades.

Na Seção 4 mostraremos o isomorfismo existente entre campos de vetores de grau 1 em $\mathbb{P}^2$ e matrizes 3×3 de traço nulo. Exploraremos este isomorfismo para dar uma relação com a classificação de singularidades feitas no capítulo 3 com as possíveis formas de Jordan de uma matriz 3×3 de traço nulo.

Por fim, na Seção 5 calcularemos a dimensão e o grau de cada subvariedade do espaço das folheações que apresenta cada um dos tipos de singularidades.