V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Cecília de Souza Fernandez [*] & Raphael Antunes dos Santos [†]

1 Introdução

A maioria das demonstrações sobre o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA, daqui em diante) apresentadas nos cursos de bacharelado em matemática segue, muito facilmente, do Teorema de Liouville (cf. [1], [3], [6] ou [11]). Em contrapartida, para se chegar ao Teorema de Liouville, o aluno precisa ter cursado uma disciplina de análise complexa ou de funções analíticas, como queiram denominar. Um ponto que também consideramos importante ressaltar é que, embora o TFA seja assunto obrigatório no Ensino Médio, muitos professores de matemática nunca viram, em seus cursos de licenciatura, uma demonstração desse importante resultado.

O objetivo deste minicurso é apresentar uma demonstração elementar do TFA que não utiliza as técnicas usuais de análise complexa. De fato, a prova que aqui será apresentada utiliza basicamente as noções de continuidade e compacidade no plano complexo. Observamos que esta prova é conhecida (cf. [10]). Nosso trabalho é destacar essa demonstração para professores do ensino médio e alunos de licenciatura em matemática, desde que tenham sido apresentados aos conceitos e teoremas básicos de compacidade e continuidade. Para esse fim, nosso texto traz uma seção sobre os números complexos e seções sobre alguns conceitos e resultados sobre compacidade e continuidade no plano complexo.

2 Considerações históricas sobre as equações polinomiais

O que hoje sabemos sobre equações do primeiro grau (ou lineares) teve seu início, discretamente, nos papiros de Ahmes (1650 a.C.). Nele, por exemplo, encontramos o seguinte problema: "*Uma quantidade, somada a sua sétima parte dá* 24*. Qual é essa quantidade?*" Para resolver esse problema, que recaía em uma equação linear, os egípcios utilizavam um método conhecido atualmente como *regra da falsa posição*. Porém, só foi possível obter a forma geral da solução da equação linear, com os axiomas sobre igualdades, contidos nos *Elementos* de Euclides (330 a.C - 260 a.C.) .

Se por um lado a álgebra egípcia tratava exaustivamente sobre as equações lineares, de outro, os babilônios as achavam demasiado elementares para merecer muita atenção. Além disso, os egípcios demonstravam certa insegurança, como pode ser observado em seus documentos, na manipulação de equações de grau 2 com três termos, que foram tratadas de modo eficiente pelos babilônios em problemas práticos. Contudo, os babilônios não reconheciam as soluções negativas de uma equação quadrática, pois não conheciam os números negativos. Foi somente na Índia, através do matemático e astrônomo Brahmagupta (598 - 670), que foram reconhecidas as soluções negativas de uma equação de grau 2, que com base numa álgebra de sinais exibida em sua obra, desenvolveu-se as operações com quantidades negativas. Basicamente, os hindus resolviam as equações quadráticas pelo método do completamento de quadrados, deste modo unificando a resolução algébrica destas equações. Por fim, Bhāskara Acharya (1114 - 1185), em sua obra *Lilāvati*, esclarece e completa as lacunas deixadas por Brahmagupta, dando importantes contribuições nas resoluções de equações diofantinas e equações de grau 2. Assim, a fórmula resolutiva da equação do segundo grau leva o nome de *Fórmula de Bhāskara*. Devemos ressaltar que a forma geral da

[*] IUniversidade Federal Fluminense , IM, Niterói, RJ, Brasil, gancsfz@vm.uff.br
[†] Universidade Federal Fluminense, IM, Niterói, RJ, Brasil, raphaelsantos08@hotmail.com

equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, que conhecemos atualmente, se deve principalmente ao matemático françês François Viète (1540 - 1603), que introduziu o uso de letras para representar quantidades desconhecidas e sinais para representar algumas operações.

Aproximadamente cinco séculos depois da descoberta da solução da equação quadrática (séc. XI), em meio ao progresso comercial que os italianos atravessavam no século XVI, o mais importante feito matemático, sem dúvida, foi a descoberta da solução algébrica das equações de graus 3 e 4 por matemáticos que ali viviam. Tudo começou em 1494, quando Fra Luca Pacioli (1445 - 1509), na sua obra *Summa de Arithmetica*, afirmou que os matemáticos daquela época não eram capazes de resolver uma equação de grau 3 através de métodos algébricos. Para sua infelicidade, por volta de 1506, Scipione del Ferro (1465 - 1526) resolveu algebricamente a equação $x^3 + mx = n$, baseando-se provavelmente na matemática árabe e hindu. Apesar de não ter publicado sua descoberta, Scipione revelou seu segredo ao seu discípulo Antonio Maria Fior. Vinte anos após esta descoberta, Nicolo Fontana de Brescia (1499 - 1557), mais conhecido como Tartaglia, anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação de terceiro grau $x^3 + mx^2 = n$. Desconfiado, Fior o desafiou para um duelo em público, envolvendo a resolução de equações de grau 3. Restando poucos dias para o duelo, Tartaglia descobriu também o método de resolução de equações de grau 3 da forma $x^3 + mx = n$, sendo evidente sua vitória sobre Fior. Vale observar que Tartaglia desenvolveu também um método para resolver equações de grau 3 da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ fazendo a transformação $x = z - b/3a$, obtendo uma equação da forma $z^3 + pz + q = 0$ cuja solução era conhecida. Sabendo deste grande feito, o matemático e também médico Girolamo Cardano (1501 - 1576) jurou sigilo absoluto para que Tartaglia lhe revelasse este segredo (era comum entre os matemáticos desta época guardar para si as descobertas, utilizando-as em disputas públicas!). Aproveitando-se deste fato, Cardano publicou esta fórmula em sua *Ars Magna* em 1545. Apesar de mencionar que esta descoberta se devia a Tartaglia, este ficou indignado com a traição, pois reservava esta descoberta para publicar um tratado sobre equações de grau 3.

Em 1560, passados alguns anos do falecimento de Cardano, Rafael Bombelli (1526 - 1573) escreveu sua *"Álgebra"*, que só foi impresso em 1572, de notável contribuição às equações de grau 3, no âmbito das soluções. Em seu livro, Bombelli se utiliza das mesmas regras sobre números reais, para manipular as raízes de números negativos (números complexos imaginários), acabando com o desconforto que os matemáticos da época tinham ao se deparar com os números da forma $a + b\sqrt{-1}$.

Um outro matemático que contribuiu com a teoria das equações foi Albert Girard (1590 - 1633). Em sua obra *Invention Nouvelle em L'algèbre* (1629), apresentou um importante teorema que relaciona as raízes de uma equação polinomial com seus coeficientes, o que hoje apresentamos no ensino médio como as "Relações de Girard". Parece que a ele também se deve a percepção de que o grau de uma equação indica a quantidade de raízes.

Por volta de 1750, o suíço Leonhard Euler (1707 - 1783), baseado na solução dada por Tartaglia, tentou igualmente reduzir a resolução de uma equação geral de grau 5 à de uma equação de grau 4 associada. Euler falhou, assim como Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) falharia uns trinta anos mais tarde nesta busca, publicando seu trabalho *Reflexões sobre a solução de equações polinomiais*. Surgia então a seguinte pergunta: "Será que toda equação polinomial possui solução?" Mais prescisamente, dada a equação $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, onde n é um inteiro positivo e os coeficientes da equação são números reais, podemos dizer que ela tem solução? A resposta a esta pergunta foi dada pelo matemático alemão Carl F. Gauss (1777 - 1855), que aos vinte e um anos de idade apresentou o que ainda hoje é considerada a maior tese de doutorado já vista, sustentando toda a teoria das equações polinomiais, provando que "Toda equação polinomial de grau n, com coeficientes reais ou complexos, possui uma solução no *corpo dos números complexos*."

Vimos que, em 1545, em sua obra *Ars Magna*, Cardano publicou a solução das equações de terceiro e quarto graus, exibindo as correspondentes fórmulas resolutivas que se expressam através de radicais. Após a apresentação do que hoje chamamos de Teorema Fundamental da Álgebra, por Gauss em sua tese de doutorado, alguns matemáticos se empenharam em tentar descobrir se existia uma fórmula resolutiva para equações polinomiais de grau maior do que quatro, por meio de radicais. Coube ao matemático francês Évariste Galois (1811 - 1832), completando um trabalho do matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802 - 1829), demonstrar a impossibilidade dessa resolução.

Resumindo...

Equação de grau 2: Bhāskara (séc. XII)

A equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, foi resolvida por Bhāskara da seguinte forma: Dividindo a equação por $a \neq 0$, temos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

ou equivalentemente

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Feito isto, basta agora completarmos o quadrado do lado esquerdo da equação anterior. Para tal, somamos $\dfrac{b^2}{4a^2}$ em ambos os membros da equação, resultando em

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2},$$

ou seja,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Equação de grau 3: Tartaglia (séc. XVI)

Historicamente, Tartaglia resolveu primeiro equações de terceiro grau do tipo $x^3 + px + q = 0$, mais tarde desenvolvendo um método para resolver equações de terceiro grau completas. Deste modo, vamos resolver inicialmente a equação

$$x^3 + px + q = 0. \tag{2.1}$$

Tartaglia supôs que a solução procurada era da forma $x = a + b$. Deste modo, $x^3 = (a + b)^3$, o que implica que $x^3 - a^3 - b^3 - 3abx = 0$, já que $x = a + b$. Deste modo, vamos determinar a e b que satisfazem a igualdade

$$x^3 + px + q = x^3 - a^3 - b^3 - 3abx.$$

Para tal, temos que

$$-a^3 - b^3 = q \qquad \text{e} \qquad ab = -\frac{p}{3},$$

ou, equivalentemente,

$$a^3 + b^3 = -q \qquad \text{e} \qquad a^3b^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

É fácil ver que a^3 e b^3 são as raízes da equação quadrática

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Conseqüentemente, temos que

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{e} \quad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{2.2}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} x^3 + px + q &= x^3 - a^3 - b^3 - 3abx \\ &= (x - a - b)(a^2 + b^2 + x^2 - ab + ax + bx). \end{aligned}$$

Portanto a solução da equação (2.1) se reduz a solução da equação de primeiro grau $x - a - b = 0$, dada por

$$x_1 = a + b,$$

isto é,

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \tag{2.3}$$

o que era óbvio pois supomos que $x = a + b$, e a solução da equação do segundo grau

$$x^2 + (a + b)x + a^2 + b^2 - ab = 0,$$

a qual nos fornece as outras soluções

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}i, \\ x_3 &= -\frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}i, \end{aligned}$$

onde a e b são determinados por (2.2). Cabe observar que Tartaglia, por não conhecer os números complexos, só considerava a primeira solução.

Este resultado nos permite encontrar a solução da equação completa de terceiro grau

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0). \tag{2.4}$$

Com efeito, fazendo a substituição $x = y + m$, obtemos

$$a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0,$$

ou equivalentemente,

$$ay^3 + (b + 3am)y^2 + (3am^2 + 2bm + c)y + (am^3 + bm^2 + cm + d) = 0.$$

Como sabemos resolver equações de terceiro grau desprovidas do termo de 2º grau, então, fazendo $b + 3am = 0$, temos

$$m = -\frac{b}{3a}.$$

Deste modo, se fizermos a substituição $x = y - \dfrac{b}{3a}$ em (2.4), teremos

$$ay^3 + \left(3a.\frac{b^2}{9a^2} + 2b.\left(-\frac{b}{3a}\right) + c\right)y + \left(a.\left(-\frac{b^3}{27a^3}\right) + b.\frac{b^2}{9a^2} + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d\right) = 0.$$

Dividindo esta equação por $a \neq 0$, temos

$$y^3 + \left(-\frac{b}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0,$$

que é da forma

$$y^3 + py + q = 0,$$

com $p = -\dfrac{b}{3a^2} + \dfrac{c}{a}$ e $q = \dfrac{2b^3}{27a^2} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{d}{a}$, cuja solução foi vista anteriormente.

Equação de grau 4: Ferrari (séc. XVI)

A solução de equações de grau 4 foi dada por Ferrari da seguinte forma: Consideremos a equação

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (a \neq 0).$$

Fazendo a substituição $x = y + m$, temos

$$a(y+m)^4 + b(y+m)^3 + c(y+m)^2 + d(y+m) + e = 0,$$

isto é,

$$ay^4 + (4am+b)y^3 + (6am^2 + 3bm + c)y^2 + (4am^2 + 3bm^2 + 2cm + d)y + (am^4 + bm^3 + cm^2 + dm + e) = 0.$$

Assim como Tartaglia resolvia as equações de terceiro grau desprovidas do termo de 2º grau, vamos calcular m de modo que a equação acima não possua o termo de 3º grau. Para tal, devemos ter $4am + b = 0$, o que implica que

$$m = -\frac{b}{4a}.$$

Logo, a substituição $x = y - b/4a$ nos dará

$$ay^4 + \left(-\frac{3b^2}{8a} + c\right)y^2 + \left(\frac{4ab^2 + 3b^3}{16a^2} - \frac{bc}{2a} + d\right) + \left(-\frac{3b^4}{4^4a^3} + \frac{b^2c}{16a} - \frac{bd}{4a} + e\right) = 0.$$

Dividindo esta equação por $a \neq 0$, obtemos

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \tag{2.5}$$

onde $p = -\dfrac{3b}{8a^2} + \dfrac{c}{a}$, $q = \dfrac{4ab^2 + 3b^3}{16a^3} - \dfrac{bc}{2a^2} + \dfrac{d}{a}$ e $r = -\dfrac{3b^4}{4^4a^4} + \dfrac{b^2c}{16a^2} - \dfrac{bd}{4a^2} + \dfrac{e}{a}$.

De (2.5), se obtém

$$y^4 + 2py^2 + p^2 = py^2 - qy - r + p^2,$$

isto é,

$$(y^2 + p)^2 = py^2 - qy + p^2 - r,$$

e então, para um z arbitrário

$$\begin{aligned}(y^2 + p + z)^2 &= py^2 - qy + p^2 - r + 2z(y^2 + p) + z^2 \\ &= (p + 2z)y^2 - qy + (p^2 - r + 2pz + z^2). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Escolhamos agora z de modo que o 2º membro de (6) seja um quadrado perfeito. Como o 2º membro é uma equação do segundo grau em y, sabemos que isto é possível se, e somente se, $\Delta = 0$, isto é,

$$4(p + 2z)(p^2 - r + 2pz + z^2) - q^2 = 0,$$

que é uma equação do terceiro grau em z, que pode ser resolvida pelo método precedente. Encontrado o valor de z, teremos então algo do tipo

$$(y^2 + p + z)^2 = A^2, \tag{2.7}$$

onde A é o quadrado do 2º membro de (6), que depende do valor de z. Extraíndo as raízes quadradas em ambos os membros de (2.7), encontramos os valores de y e conseqüentemente os de x, pois $x = y - b/4a$.

Equações de grau $\geq$ 5

No século XVIII, Gauss apresentou o Teorema Fundamental da Álgebra, garantindo que toda equação polinomial possui uma solução em $\mathbb{C}$.

No século XIX, Abel prova que a equação completa de grau 5 não pode ser resolvida por meio de radicais. Por fim, Galois caracteriza quando uma equação de grau ≥ 5 pode ser resolvida por meio de radicais.

3 Números complexos

Relembremos que o *corpo dos números complexos* é o conjunto

$$\mathbb{C} = \{(x\,,y) : x, y \in I\!R\},$$

com as seguintes operações de *adição* e *multiplicação*: Se $z = (x, y)$ e $w = (a, b)$ pertencem a $\mathbb{C}$, então

$$z + w = (x + a, y + b) \quad \text{e} \quad zw = (xa - yb, xb + ya). \tag{3.8}$$

Os elementos de $\mathbb{C}$ são chamados de *números complexos*. Denotamos o número complexo $(0, 0)$ simplesmente por 0 e o número complexo $(1, 0)$ simplesmente por 1. Para cada $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, definimos

$$-z = (-x, -y) \quad \text{e} \quad z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right), \text{ se } z \neq 0.$$

Podemos também denotar o complexo z^{-1} por $\dfrac{1}{z}$ ou $1/z$.

Proposição 3.1. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z, w, t \in \mathbb{C}$:*
(a) Associatividade da adição: $z + (w + t) = (z + w) + t$;
(b) Comutatividade da adição: $z + w = w + z$;
(c) Elemento neutro: $0 + z = z$;
(d) Elemento oposto: $z + (-z) = 0$;
(e) Associatividade da multiplicação: $z(wt) = (zw)t$;
(f) Comutatividade da multiplicação: $zw = wz$;
(g) Elemento unidade: $1.z = z$;
(h) Elemento inverso: $z.z^{-1} = 1$;
(i) Distributividade da multiplicação em relação à adição: $z(w + t) = zw + zt$.

Demonstração. Como todas as propriedades decorrem diretamente das definições de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, provaremos apenas o item *(a)*. Com efeito, sejam $z = (x, y)$, $w = (a, b)$ e $t = (c, d)$ pertencentes a $\mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned} z + (w + t) &= (x, y) + (a + c, b + d) = (x + (a + c), y + (b + d)) \\ &\overset{(*)}{=} ((x + a) + c, (y + b) + d) = (x + a, y + b) + (c, d) \\ &= (z + w) + t, \end{aligned}$$

notando que em $(*)$ usamos a associatividade da adição em $I\!R$. ■

Com as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, vistas em (3.8), definimos as operações de *subtração* e *divisão* da maneira usual: Dados $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z - w = z + (-w) \quad e \quad \frac{z}{w} = z.w^{-1} \; se \; w \neq 0.$$

Além disso, a potenciação também é definida da maneira usual:

$$z^0 = 1, \; z^n = \underbrace{z \dots z}_{n-\text{vezes}} \quad \text{e} \quad z^{-n} = \underbrace{z^{-1} \dots z^{-1}}_{n-\text{vezes}}, \text{ se } z \neq 0 \; (n \leq 1).$$

Segue da Proposição 3.1 que diversas propriedades das operações aritméticas em $I\!R$ são válidas também em $\mathbb{C}$. Por exemplo, a soma e o produto de frações z_1/w_1 e z_2/w_2, $w_1, w_2 \neq 0$, de números complexos são dados por

$$\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 w_2 + z_2 w_1}{w_1 w_2} \quad \text{e} \quad \frac{z_1}{w_1} \cdot \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 z_2}{w_1 w_2},$$

como ocorre com os números reais.

Dizemos que $\mathbb{C}$ é um corpo, com as operações definidas em (3.8), pois satisfaz a todas as propriedades da Proposição 3.1.

Vamos agora obter uma outra representação para um complexo $z = (x, y)$. Primeiramente, consideremos o complexo $(x, 0)$, com $x \in I\!R$, simplesmente como x, de modo análogo ao que fizemos com os elementos neutro e unidade. Desta forma,

$$x = (x, 0) \text{ para todo } x \in I\!R. \tag{3.9}$$

Com isso, vemos que $I\!R \subset \mathbb{C}$, ou seja, todo número real é também um número complexo. Inicialmente esta inclusão pode gerar um certo desconforto, pois dados $x, a \in I\!R$, o que sabemos a respeito de $x + a$ e $x.a$? Estamos somando e multiplicando números reais x e a ou números complexos x e a? A resposta é tanto faz, pois os valores são os mesmos. De fato, usando a convenção (3.9) e as operações definidas em (3.8), temos

$$(x, 0) + (a, 0) = (x + a, 0) = x + a$$

e

$$(x, 0)(a, 0) = (xa - 0.0, x.0 + 0.a) = (xa, 0) = xa.$$

Notemos também que $(0, 1)^2 = (0, 1).(0, 1) = (-1, 0) = -1$, ou seja, o número -1 possui uma "raiz quadrada"em $\mathbb{C}$. Deste modo, o complexo $(0, 1)$, denotado por i, e chamado de *algarismo imaginário*, tem a propriedade

$$i^2 = -1. \tag{3.10}$$

Dado um número complexo $z = (x, y)$, temos então que

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1),$$

isto é,

$$z = x + yi. \tag{3.11}$$

Podemos observar que o par (x, y) e a expressão $x + yi$ representam o mesmo número complexo. Chamamos a expressão (3.11) de *forma algébrica* de z, onde $x, y \in I\!R$.

Esta forma de representar números complexos nos polpa de memorizar as definições de $z+w$ e zw vistas em (3.8). Para tal, basta usarmos algumas propriedades vistas na Proposição 1. Com efeito, dados os números complexos $z = x + yi$ e $w = a + bi$ temos que:

$$z + w = (x + yi) + (a + bi) = x + a + yi + bi = (x + a) + (y + b)i,$$

$$zw = (x + yi)(a + bi) = xa + xbi + yia + ybi^2 = (xa - yb) + (xb + ya)i.$$

Dado um número complexo $z = x + yi$, definimos a *parte real* e a *parte imaginária* de z por

$$\operatorname{Re} z = x \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z = y,$$

respectivamente. Dizemos que z é *imaginário puro* quando $\operatorname{Re} z = 0$.

Sabemos que um complexo $z = x + yi$ é o par ordenado (x, y), e podemos representá-lo graficamente como o ponto do plano cartesiano ou como o vetor que liga a origem a este ponto (Figura 1). Deste modo, chamamos o plano cartesiano de *plano complexo*, o eixo dos x de *eixo real* e o eixo dos y de *eixo imaginário*.

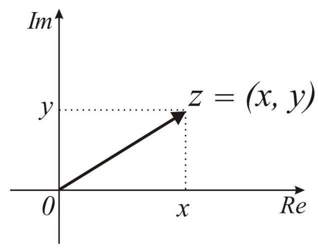


Figura 1: $z = x + yi$, onde $x, y > 0$

Definimos o *conjugado* de um número complexo $z = x + yi$ como sendo o complexo

$$\overline{z} = x - yi.$$

No plano complexo, $\overline{z}$ pode ser obtido através da reflexão de z em relação ao eixo real (Figura 2).

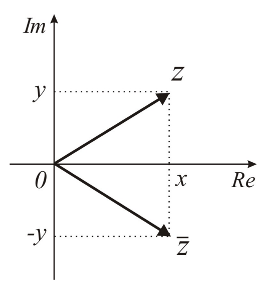


Figura 2: $z = x + yi$, onde $x, y > 0$

Proposição 3.2. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:*
(a) $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$ *e* $\overline{zw} = \overline{z}.\overline{w}$*;*
(b) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ *se* $w \neq 0$*;*
(c) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$ *e* $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$*;*
(d) $z \in \mathbb{R}$ *se, e somente se,* $\overline{z} = z$*;*
(e) z *é imaginário puro se, e somente se,* $\overline{z} = -z$*;*

Demonstração. Vamos demonstrar apenas o item *(a)*. Com efeito, sejam os complexos $z = x + yi$ e $w = a + bi$. Então:
(a) $\overline{\overline{z}} = \overline{(x - yi)} = x - (-y)i = x + yi = z$,

$\overline{z \pm w} = \overline{(x+a) \pm (y+b)i} = (x+a) \mp (y+b)i = (x-yi) \mp (a-bi) = \overline{z} \pm \overline{w}$,

$\overline{z}.\overline{w} = (x-yi)(a-bi) = xa - bxi - ayi - by = (xa-yb) - (xb+ya)i = \overline{(xa-yb)+(xb+ya)i} = \overline{(x+yi)(a+bi)} = \overline{zw}$. ■

Definimos o valor absoluto (ou módulo) de um número complexo $z = x + yi$ como sendo o número real dado por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Graficamente, $|z|$ nos dá o comprimento do vetor correspondente a z no plano complexo, conforme Figura 3. Temos

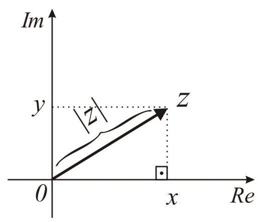


Figura 3: $z = x + yi$, onde $x, y > 0$

também que $|z - w|$ é a distância entre os pontos do plano que representam z e w.

Proposição 3.3. *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:*
(a) $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *e* $\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$;
(b) $|z|^2 = z.\overline{z}$, $|\overline{z}| = |z|$ *e* $|zw| = |z|.|w|$;
(c) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$, *se* $w \neq 0$;
(d) $|z + w| \leq |z| + |w|$;
(e) $|z + w| \geq \big||z| - |w|\big|$;

Demonstração. Provaremos apenas os itens *(b)* e *(d)*. Com efeito, sejam os complexos $z = x + yi$ e $w = a + bi$, temos:

(b) $z.\overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2 = |z|^2$, $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ e

$$\begin{aligned} |zw| &= \sqrt{(xa-yb)^2 + (xb+ya)^2} = \sqrt{x^2a^2 + y^2b^2 + x^2b^2 + y^2a^2} \\ &= \sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)} = \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2} = |z|.|w|. \end{aligned}$$

(d) Com efeito,

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

isto é, $|z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$, o que implica que $|z + w| \leq |z| + |w|$. ■

Provaremos a seguir um resultado que será utilizado na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

Proposição 3.4. *Se w e c são números complexos tais que $|w + c| < |c|$ e t é um número real tal que $0 < t < 1$, então $|tw + c| < |c|$.*

Demonstração. Com efeito, como $|w+c| < |c|$, segue que $|w+c|^2 < |c|^2$. Logo, $(w+c)(\overline{w+c}) < |c|^2$, o que implica que $|w|^2 + 2\mathrm{Re}(wc) < 0$. Como $0 < t < 1$, então $t(|w|^2 + 2\mathrm{Re}(wc)) < 0$, o que implica que $t|w|^2 + 2t\mathrm{Re}(wc) < 0$. Notemos que $t^2|w|^2 + 2t\mathrm{Re}(wc) < t|w|^2 + 2t\mathrm{Re}(wc)$, já que $t^2 < t$. Logo $t^2|w|^2 + 2t\mathrm{Re}(wc) < 0$, ou seja, $|tw+c|^2 < |c|^2$, provando a desigualdade desejada. ■

4 Noções básicas da topologia do plano complexo

Nesta seção, vamos apresentar alguns conceitos e resultados sobre a topologia do plano complexo, a fim de podermos entender a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

Para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ e cada número real $r > 0$, definimos

$$\begin{array}{rcl} \Delta(z_0\,;r) & = & \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}, \\ \overline{\Delta}(z_0\,;r) & = & \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}, \\ \Delta^*(z_0\,;r) & = & \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}, \\ C(z_0\,;r) & = & \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}. \end{array}$$

Os conjuntos $\Delta(z_0\,;r)$, $\overline{\Delta}(z_0\,;r)$ e $\Delta^*(z_0\,;r)$ são chamados, respectivamente, de *disco aberto*, *disco fechado* e *disco aberto deletado* de centro z_0 e raio r. O conjunto $C(z_0\,;r)$ é o *círculo* de centro z_0 e raio r.
Notemos que, por exemplo, se considerarmos $z = x + yi$ e $z_0 = x_0 + y_0 i$, temos que $|z - z_0| < r$ equivale a $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$, isto é, $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2$, que representa o interior de um círculo no plano complexo. Analogamente, obtemos as desigualdades respectivas dos outros conjuntos. Graficamente, temos:

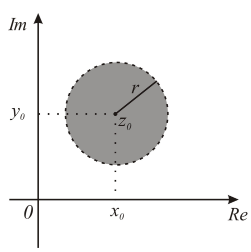


Figura 4: $\Delta(z_0\,;r)$

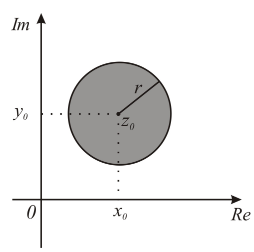


Figura 5: $\overline{\Delta}(z_0\,;r)$

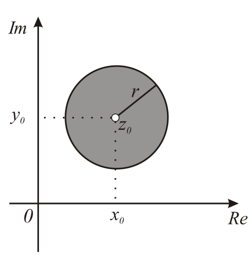


Figura 6: $\Delta^*(z_0\,;r)$

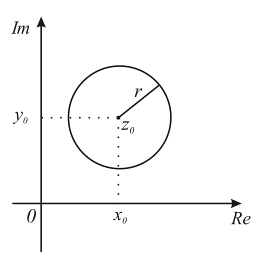


Figura 7: $C(z_0\,;r)$

Seja A um subconjunto de $\mathbb{C}$. Dizemos que um ponto $z \in A$ é um *ponto interior* de A quando existe $r > 0$ tal que $\Delta(z\,;r) \subset A$. O conjunto de todos os pontos interiores de A é chamado o *interior* de A, que denotamos por $\mathrm{int}(A)$. Uma conseqüência natural da definição é que $\mathrm{int}(A) \subset A$. O conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é dito ser um *conjunto aberto* quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $\mathrm{int}(A) = A$.

Exemplo 4.1. *O plano complexo $\mathbb{C}$ e o conjunto vazio $\varnothing$ são abertos. O disco aberto $\Delta(z_0\,;r)$ (e o disco deletado $\Delta^*(z_0\,;r)$) e o semi-plano $S=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0\}$ são subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$.*

Em relação aos discos aberto e deletado, notemos que $\Delta^*(z_0\,;r)\subset\Delta(z_0\,;r)$. Logo, se mostrarmos que dado $z\in\Delta^*(z_0\,;r)$, $z\in\operatorname{int}(\Delta^*(z_0\,;r))$, isto é, existe $s>0$ tal que $\Delta(z\,;s)\subset\Delta^*(z_0\,;r)$, teremos que $\Delta^*(z_0\,;r)$ é aberto e mais ainda, $\Delta(z\,;s)\subset\Delta^*(z_0\,;r)\subset\Delta(z_0\,;r)$, o que mostra que $\Delta(z_0\,;r)$ é aberto. Com efeito, seja $z\in\Delta^*(z_0\,;r)$. Temos que $0<|z_0-z|<r$, isto é, existe $s>0$ tal que $0<|z_0-z|+s=r$. Seja então $s=r-|z_0-z|>0$. Temos que $\Delta(z\,;s)\subset\Delta^*(z_0\,;r)$, pois se $z_1\in\Delta(z\,;s)$, então $|z-z_1|<s$. Como $0<|z_0-z_1|=|z_0-z+z-z_1|\leq|z_0-z|+|z-z_1|<|z_0-z|+s=r$, segue que $z_1\in\Delta^*(z_0\,;r)$. O que mostra que $\Delta^*(z_0\,;r)$ é aberto (Figura 8). Note que $z\in\Delta^*(z_0\,;r)\subset\Delta(z_0\,;r)$ e $\Delta(z\,;s)\subset\Delta^*(z_0\,;r)\subset\Delta(z_0\,;r)$, logo $z\in\operatorname{int}(\Delta(z_0\,;r))$, o que mostra que $\Delta(z_0\,;r)$ é aberto. Por último, para mostrarmos que o semi-plano $S=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0\}$ é aberto, seja $z_1=x_1+y_1i\in S$,

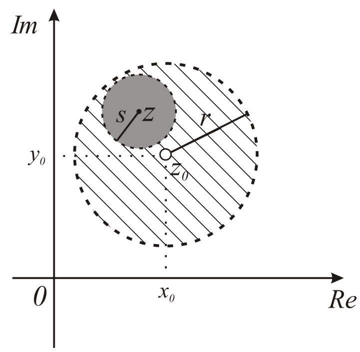


Figura 8: $\Delta^*(z_0\,;r)$

com $x_1>0$. Tomemos $s=|x_1-0|=x_1$. Daí, temos que $\Delta(z_1\,;s)\subset S$. Com efeito, seja $w=a+bi\in\Delta(z_1\,;s)$. Então $|z_1-w|<s=x_1$, e pela Proposição 3.3, temos que $\operatorname{Re}(z_1-w)\leq|z_1-w|<x_1$, isto é, $\operatorname{Re}(z_1-w)<x_1$. Logo $x_1-a<x_1$, o que implica que $-a<0$, ou seja, $a>0$. Portanto $w=a+bi\in S$ (Figura 9).

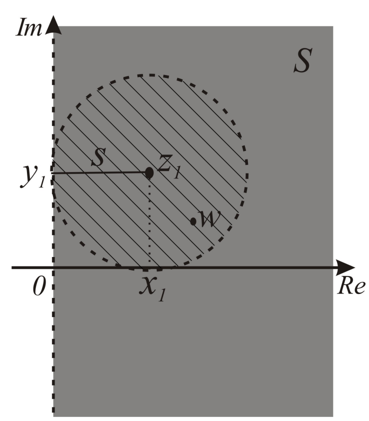


Figura 9: Semi-plano S

Proposição 4.1. *Se $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família qualquer de conjuntos abertos, a união $A=\displaystyle\bigcup_{\lambda\in L}A_\lambda$ é um conjunto aberto.*

Demonstração. Com efeito, seja $z\in A=\displaystyle\bigcup_{\lambda\in L}A_\lambda$. Daí, existe $\lambda_0\in L$ tal que $z\in A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_0} é aberto, existe $r>0$ tal que $\Delta(z\,;r)\subset A_{\lambda_0}$. Logo, $\Delta(z\,;r)\subset\displaystyle\bigcup_{\lambda\in L}A_\lambda=A$. Portanto A é aberto. ∎

Um subconjunto A de $\mathbb{C}$ é dito ser um *conjunto fechado* se o seu complementar $\mathbb{C}/A$ é um conjunto aberto.

Exemplo 4.2. *O plano complexo $\mathbb{C}$ e o conjunto vazio $\varnothing$ são fechados. O disco fechado $\overline{\Delta}(z_0\,;r)$ e o círculo $C(z_0\,;r)$ são subconjuntos fechados de $\mathbb{C}$.*

Com efeito, $\mathbb{C}$ é fechado pois o seu complementar $\mathbb{C}/\mathbb{C} = \varnothing$ é aberto e por sua vez $\varnothing$ é fechado pois $\mathbb{C}/\varnothing = \mathbb{C}$ é aberto. Em relação ao disco fechado $\overline{\Delta}(z_0\,;r)$, vamos mostrar que $\mathbb{C}/\overline{\Delta}(z_0\,;r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$ é aberto. Com efeito, seja $a \in \mathbb{C}/\overline{\Delta}(z_0\,;r)$. Tomemos $s = |a - z_0| - r > 0$. Daí, $\Delta(a\,;s) \subset \big(\mathbb{C}/\overline{\Delta}(z_0\,;r)\big)$, o que mostra que $a \in \operatorname{int}\big(\mathbb{C}/\overline{\Delta}(z_0\,;r)\big)$, conseqüentemente $\mathbb{C}/\overline{\Delta}(z_0\,;r)$ é aberto. Portanto $\overline{\Delta}(z_0\,;r)$ é fechado. (Figura 10). Para mostrarmos que o círculo $C(z_0\,;r)$ é fechado, basta observarmos que o seu complementar

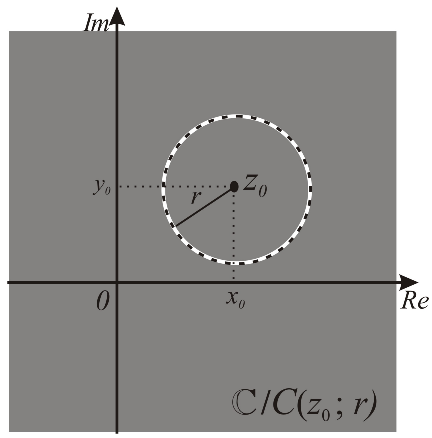


Figura 10: $\mathbb{C}/\overline{\Delta}(z_0\,;r)$

$\mathbb{C}/C(z_0\,;r) = \mathbb{C}/\overline{\Delta}(z_0\,;r) \cup \Delta(z_0\,;r)$ é reunião de conjuntos abertos e portanto aberto (Figura 11).

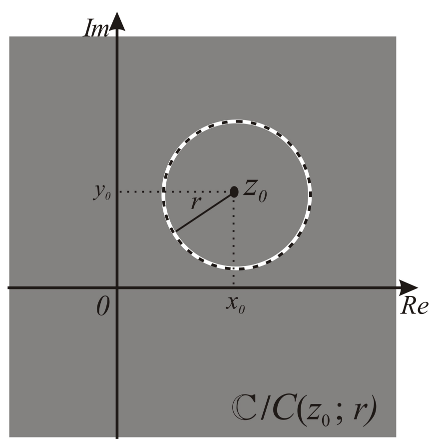


Figura 11: $\mathbb{C}/C(z_0\,;r)$

Um subconjunto A de $\mathbb{C}$ é dito ser *limitado* se existe $s > 0$ tal que $A \subset \Delta(0\,;s)$. Caso contrário, dizemos que A é *ilimitado.*

Exemplo 4.3. *Os discos $\Delta(z_0\,;r)$ e $\overline{\Delta}(z_0\,;r)$ são limitados.*

Com efeito, vamos mostrar que $\overline{\Delta}(z_0\,;r)$ é limitado. Tomemos $s > |z_0| + r$. Daí, $\overline{\Delta}(z_0\,;r) \subset \Delta(0\,;s)$. Portanto $\overline{\Delta}(z_0\,;r)$ é limitado (Figura 12). Como $\Delta(z_0\,;r) \subset \overline{\Delta}(z_0\,;r)$, segue que $\Delta(z_0\,;r)$ é limitado.

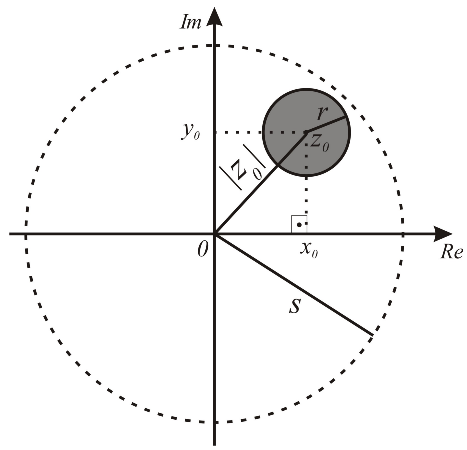


Figura 12: $\overline{\Delta}(z_0\,;r)$ é limitado

Exemplo 4.4. *A faixa $F = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\}$ é um conjunto ilimitado.*

Com efeito, suponhamos por absurdo que F seja limitado, isto é, existe $s > 0$ tal que $F \subset \Delta(0\,;s)$. Tome $z = s + yi \in \mathbb{C}$, com $y \in [1\,,2]$. Note que $z \in F$ e mais ainda, $|z - 0| = |z| = \sqrt{s^2 + y^2} > \sqrt{s^2} = s$, ou seja, $z \notin \Delta(0\,;s)$, o que é um absurdo. Portanto, F é ilimitado (Figura 13).

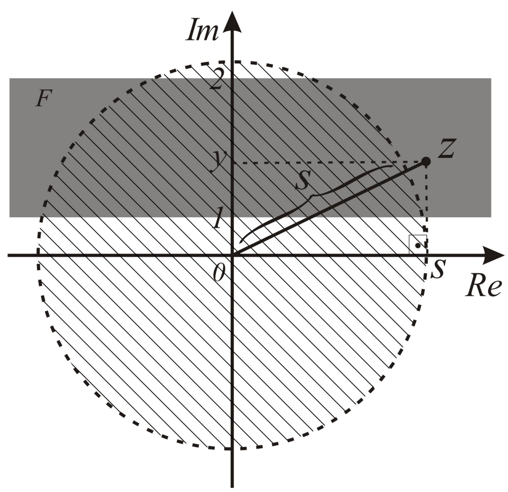


Figura 13: $F = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\}$ é ilimitado

5 As noções de continuidade e compacidade no plano complexo

Chamamos de *função complexa de uma variável complexa* a toda função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, onde o domínio A é um subconjunto de $\mathbb{C}$. Assim, a menos que se mencione o contrário, sempre que considerarmos uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ assumiremos implicitamente que $A \subset \mathbb{C}$.

Em nosso trabalho estamos interessados particularmente nas funções polinomiais complexas de uma variável complexa. Comecemos definindo função racional complexa de uma variável complexa.

Uma *função racional* complexa de uma variável complexa é uma função do tipo

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m},$$

onde os *coeficientes* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e $b_0, b_1, \ldots, b_m$ são números complexos. O domínio de f é o conjunto de todos os elementos de $\mathbb{C}$ nos quais o denominador de f não se anula.

Uma função racional da forma

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \tag{5.12}$$

é chamada uma *função polinomial*. Se $a_n \neq 0$ em (5.12), dizemos que f é uma função polinomial de *grau* n. Observamos que não é atribuído grau à função polinomial nula $f(z) = 0$.

Dado $A \subset \mathbb{C}$ e dada uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, dizemos que um número complexo $z_0 \in A$ é um *zero* de f (ou uma *raiz* de f) se $f(z_0) = 0$. Por exemplo, $i/2$ é o único zero da função $f(z) = 2z - i$.

Vejamos a seguir um resultado simples sobre funções polinomiais que nos será útil mais tarde.

Proposição 5.1. *Seja $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ uma função polinomial. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p, então $z - z_0$ é um fator de p, isto é, existe uma função polinomial g tal que $p(z) = (z - z_0)g(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Com efeito, $p(z_0) = a_n z_0^n + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0$. Logo,

$$p(z) = p(z) - p(z_0) = a_n(z^n - z_0^n) + \cdots + a_2(z^2 - z_0^2) + a_1(z - z_0). \tag{5.13}$$

É fácil verificar que

$$z^k - z_0^k = (z - z_0)\left(z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + \cdots + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1}\right),$$

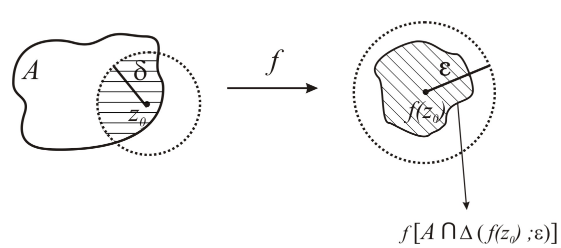
para todo inteiro $k \geq 1$. Substituindo estas igualdades em (5.13) e pondo-se $(z - z_0)$ em evidência, segue que $p(z) = (z - z_0)g(z)$, onde g é a função polinomial $g(z) = a_1 + a_2(z + z_0) + \cdots + a_n\left(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right)$. ■

Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ é *contínua* em $z_0 \in A$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad z \in A \quad \text{e} \quad |z - z_0| < \delta,$$

ou seja

$$f\left[A \cap \Delta(z_0\,;\delta)\right] \subset \Delta\left(f(z_0)\,;\varepsilon\right).$$



Escrevemos $\delta(\varepsilon, z_0)$ para enfatizar que o número δ depende, em geral, de ε e de z_0. Dizemos que f é *descontínua* em z_0 se f não é contínua em z_0. Isto significa dizer que existe algum $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$, existe $z \in A$ tal que

$$|z - z_0| < \delta \quad \text{mas} \quad |f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon.$$

Se f é contínua em todos os pontos de seu domínio A, dizemos que f é uma *função contínua*.

Exemplo 5.1. *A função constante $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = k$, com $k \in \mathbb{C}$, é contínua.*

Com efeito, fixemos $z_0 \in \mathbb{C}$. Temos que $\|f(z) - f(z_0)\| = 0 \leq \|z - z_0\|$ para quaisquer $z \in \mathbb{C}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos $\delta = \varepsilon$, vemos que f é contínua em z_0. Como z_0 foi tomado de modo arbitrário, segue que f é contínua em $\mathbb{C}$.

Exemplo 5.2. *A função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z$ é contínua.*

Com efeito, fixemos $z_0 \in \mathbb{C}$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \varepsilon > 0$. Daí, $|z - z_0| < \delta$ implica que $|f(z) - f(z_0)| < \delta = \varepsilon$. Portanto f é contínua em z_0. Como z_0 foi tomado de modo arbitrário, segue que f é contínua em $\mathbb{C}$.

Proposição 5.2. *Se $f, g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ são funções contínuas, então $f + g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ e $f.g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ são funções contínuas.*

Demonstração. Provaremos somente que $f + g$ é contínua. Com efeito, tomemos $z_0 \in \mathbb{C}$. Dado $\varepsilon > 0$, como f e g são contínuas em A, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que se $|z - z_0| < \delta_1$, então $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon/2$ e se $|z - z_0| < \delta_2$, então $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon/2$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z) + g(z) - (f(z_0) + g(z_0))| \leq |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Portanto, $f + g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínua em z_0. Como $z_0 \in A$ foi tomado de modo arbitrário, segue que $f + g$ é contínua. ■

Exemplo 5.3. *A função polinomial $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ é contínua.*

Com efeito, basta combinarmos os Exemplos 5.1 e 5.2 e a Proposição 5.2.

Um subconjunto A de $\mathbb{C}$ é dito ser um *conjunto compacto* quando A é fechado e limitado.

Exemplo 5.4. *O disco fechado $\overline{\Delta}(z_0\,;r)$ e o círculo $C(z_0\,;r)$ são conjuntos compactos.*

Enunciaremos a seguir uma versão complexa do Teorema de Weierstrass, que será utilizada para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema 5.1. ***(Teorema de Weierstrass)*** *Se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto então toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em K, ou seja, existem $\alpha, \beta \in K$ tais que $f(\alpha) \leq f(z) \leq f(\beta)$ para todo $z \in K$.*

Exemplo 5.5. *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. Temos que f é contínua em $\mathbb{R}$ e $0 < f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f(0) = 1$, vemos que f assume seu valor máximo em $0 \in \mathbb{R}$. Porém f não atinge seu valor mínimo em algum $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, suponhamos por absurdo que f atinja seu valor mínimo no ponto x_1 de seu domínio. Se $x_1 > 0$, tomemos $x' > x_1$. Daí, temos que $f(x') < f(x_1)$. Por outro lado, se $x_1 < 0$, tomemos $x'' < x_1$ e daí $f(x'') < f(x)$, nos dois casos teremos um absurdo, já que f atinge seu valor mínimo em x_1. Isto se dá pelo fato de $\mathbb{R}$ ser um conjunto ilimitado, consequentemente não é compacto. Portanto o Teorema de Weierstrass não se aplica a este exemplo (Figura 14).*

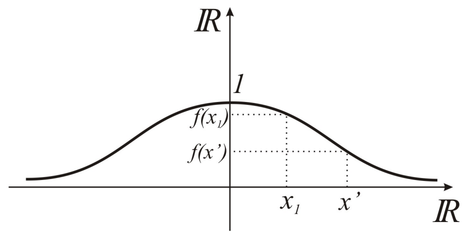


Figura 14: Exemplo 5.5

Exemplo 5.6. *Sejam $B = \Delta^*(0\,;1) \subset \mathbb{C}$ e a função contínua $f : B \longrightarrow I\!R$ dada por $f(z) = 1/|z|$. Temos que $z \in \Delta^*(0\,;1)$ implica que $0 \leq |z| \leq 1$, que por sua vez implica que $f(z) = 1/|z| \geq 1$, para todo $z \in \Delta^*(0\,;1)$. Observemos que $z = \pm i$ ou $z = \pm 1$ são tais que $f(z) = 1$. Logo, f assume seu valor mínimo em um destes complexos. Porém, f não assume seu valor máximo em B. Com efeito, suponhamos por absurdo que f atinja seu valor máximo em $z_0 \in B$. Daí, $f(z) \leq f(z_0)$, para todo $z \in B$, o que é um absurdo pois $f(B)$ é um conjunto ilimitado superiormente. Neste caso, o Teorema de Weierstrass não se aplica, pois B não é fechado e conseqüentemente não é compacto (Figura 15).*

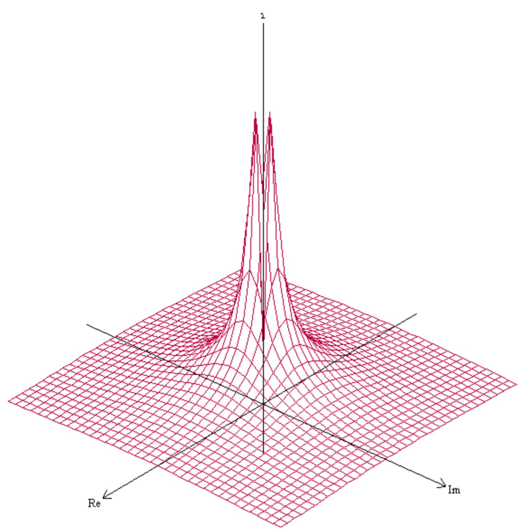


Figura 15: $f(z) = 1/|z|$

Terminamos esta seção com o seguinte resultado sobre funções polinomiais:

Proposição 5.3. *Se $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ é uma função polinomial em $\mathbb{C}$ de grau $n \geq 1$, então $\displaystyle\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$.*

Demonstração. Com efeito, pela Proposição 3.3 (itens *(d)* e *(e)*) temos que

$$
\begin{aligned}
|p(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\
&\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\
&\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1}| - \cdots - |a_1 z| - |a_0| \\
&= |a_n||z^n| - |a_{n-1}||z^{n-1}| - \cdots - |a_1||z| - |a_0| \\
&= |z^n| \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right).
\end{aligned}
$$

Como $|z| \in I\!R$ e $|p(z)| \in I\!R$, temos que

$$\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| \geq \lim_{|z| \to +\infty} \left[|z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) \right].$$

Sabendo que $\displaystyle\lim_{|z| \to +\infty} \frac{1}{|z|^k} = 0$, para todo $k \in I\!N^*$, então $\displaystyle\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$. ■

6 O teorema fundamental da álgebra

No ensino médio somos todos levados a estudar os números complexos. Isto se deve ao fato de podermos compreender o chamado Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.), que também é visto no ensino médio. O Teorema Fundamental da Álgebra garante que toda equação polinomial não constante com coeficientes reais (ou complexos) possui pelo menos uma solução em $\mathbb{C}$.

De fato as equações polinomiais são bastante naturais para nós já que, desde o ensino fundamental, elas aparecem modelando problemas simples. Por exemplo no 2º ano do ensino fundamental é comum o seguinte tipo de problema:

Problema 1. João tinha duas figurinhas. Ganhou de seu pai mais figurinhas, ficando com sete figurinhas no total. Quantas figurinhas João recebeu de seu pai? Chamando de x o número de figurinhas que João recebeu de seu pai, a equação polinomial de grau 1

$$x + 2 = 7$$

modela o problema proposto.

Já no 9º ano do ensino fundamental é comum o seguinte tipo de problema:

Problema 2. Tente adivinhar o que vou perguntar... Você é capaz de encontrar dois números cuja soma é 6 *e o produto é* 8*?* Chamando de x e y os dois números que devemos encontrar, temos que as equações

$$\begin{cases} x + y &= 6 \\ x.y &= 8 \end{cases}$$

modelam o problema proposto. Substituindo na 2ª equação, $y = 6 - x$, obtemos a seguinte equação polinomial de grau 2: $x^2 - 6x + 8 = 0$. As soluções dessa equação, se existirem, darão os números procurados.

Dessa forma é muito natural para um aluno do ensino médio se perguntar sobre a existência de soluções para uma equação polinomial, com coeficientes reais, não constante de grau n.

O Teorema Fundamental da Álgebra é apresentado no Ensino Médio, mas são muitos os professores de Matemática que, na verdade, nunca viram uma demonstração deste importante teorema. Nesta seção vamos apresentar uma demonstração deste resultado que não usa as técnicas usuais de Análise Complexa. Vamos apresentar aqui uma demonstração mais elementar, que usa as noções de continuidade e compacidade no plano complexo. Antes, contudo, vamos apresentar o seguinte resultado sobre funções polinomiais:

Proposição 6.1. *Seja $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ a função polinomial $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Se $q(z) = p(z + z_0)$, $z \in \mathbb{C}$, então existe $1 \leq k \leq n$ tal que $q(z) = p(z_0) + z^k[a + r(z)]$, onde $a \neq 0$ e $r(z)$ é uma função polinomial com $r(0) = 0$.*

Demonstração. Com efeito, temos que

$$p(z + z_0) \;=\; a_0 + a_1(z + z_0) + a_2(z + z_0)^2 + a_3(z + z_0)^3 + \cdots + a_n(z + z_0)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= a_0 + a_1 z + a_1 z_0 + a_2 z^2 + 2a_2 z z_0 + a_2 z_0^2 + a_3 z^3 + 3a_3 z^2 z_0 + \\
&\quad + 3a_3 z z_0^2 + a_3 z_0^3 + \cdots + a_n z^n + \binom{n}{1} a_n z^{n-1} z_0 + \cdots + \\
&\quad + \binom{n}{n-1} a_n z . z_0^{n-1} + a_n z_0^n = \\
&= (a_0 + a_1 z_0 + \cdots + a_n z_0^n) + (a_1 + 2a_2 z_0 + \cdots + n a_n z_0^{n-1}) z + \\
&\quad + \left(a_2 + 3a_3 z_0 + \cdots + \binom{n}{n-2} a_n z_0^{n-2} \right) z^2 + \cdots + a_n z^n.
\end{aligned}
$$

Logo, $q(z) = p(z_0) + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_n z^n$, onde, para cada $1 \leq j \leq n$, $A_j = \displaystyle\sum_{p=j}^{n} \binom{p}{p-j} a_p . z_0^{p-j}$.

Lembre que $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}\cdot$ Se $A_1 \neq 0$, então $q(z) = p(z+z_0) = p(z_0) + z[A_1 + A_2 z + A_3 z^2 + \cdots + A_n z^{n-1}]$, e assim $q(z) = p(z_0) + z[a + r(z)]$ onde $a = A_1 \neq 0$ e $r(0) = 0$. Se $A_1 = 0$, tome $1 \leq k \leq n$ de modo que A_k seja o primeiro coeficiente não nulo após A_1. Daí,

$$
\begin{aligned}
q(z) &= p(z+z_0) = p(z_0) + A_k z^k + \cdots + A_n z^n \\
&= p(z_0) + z^k [A_k + A_{k+1} z + \cdots + A_n z^{n-k}].
\end{aligned}
$$

Tomando $a = A_k \neq 0$ e $r(z) = A_{k+1} z + \cdots + A_n z^{n-k}$, temos que $q(z) = p(z_0) + z^k [a + r(z)]$. Note que $r(0) = 0$. ∎

Vejamos agora o resultado central de nosso trabalho.

Teorema 6.1. ***(Teorema Fundamental da Álgebra)*** *Toda função polinomial $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$, possui uma raiz no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.*

Demonstração. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ uma função polinomial em $\mathbb{C}$ de grau $n \geq 1$. Se $a_0 = 0$, $p(0) = 0$. Suponhamos então $a_0 = p(0) \neq 0$. Pela Proposição 5.3, temos que $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$, isto é, para todo $k > 0$, existe $r > 0$ tal que $|z| > r$ implica que $|p(z)| > k$. Assim, existe $r > 0$ tal que $|z| > r$ implica que $|p(z)| > |a_0| = |p(0)|$. Vimos anteriormente que o disco fechado $\overline{\Delta}(0\,; r)$ é um conjunto compacto. Assim, pelo Teorema 5.1, a função contínua $z \in \overline{\Delta}(0\,; r) \mapsto |p(z)| \in \mathbb{R}$ assume seu valor mínimo em algum ponto z_0 de $\overline{\Delta}(0\,; r)$. Assim, $|z| \leq r$ implica que $|p(z)| \geq |p(z_0)|$. Como $0 \in \overline{\Delta}(0\,; r)$, então $|p(0)| \geq |p(z_0)|$. Portanto $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, isto é, $|p| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ assume seu valor mínimo no ponto z_0.

Vamos mostrar que $p(z_0) = 0$. Por absurdo, suponhamos que $p(z_0) = c \neq 0$. Escrevamos $q(z) = p(z + z_0)$. Pela Proposição 6.1, temos que existe $1 \leq k \leq n$ tal que

$$
q(z) = c + z^k [a + r(z)], \text{ onde } a \neq 0 \text{ e } r(0) = 0. \tag{6.14}
$$

Vamos mostrar que existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $|q(z_1)| < |c|$, o que nos dará um absurdo. Para isto, consideremos $B = \{w \in \mathbb{C} : |w + c| < |c|\}$ o disco aberto de centro $-c$ e raio $|c|$.

Tomemos agora $w \in \mathbb{C}$ tal que $aw^k = -c$, onde k e a são dados em (6.14). Ou seja, w é uma raiz k-ésima do complexo $-c/a$. Note que $aw^k \in B$, pois $|aw^k + c| = |-c + c| = 0 < |c|$, já que $c \neq 0$. Consideremos a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$
f(z) = zw^k.
$$

Note que f é contínua. Em particular, f é contínua em a. Assim, para $\varepsilon = |c| > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$
f\left(\Delta(a\,; \delta)\right) \subset \Delta(f(a)\,; \varepsilon).
$$

Note que $\Delta(f(a)\,;\varepsilon) = B$, bastando observar que $f(a) = aw^k = -c$ e $\Delta\,(-c\,;|c|) = \{w \in \mathbb{C} : |w - (-c)| < |c|\}$. Por continuidade de f, vemos que se $u \in \Delta(a\,;\delta)$, então $f(u) = uw^k \in B$. Tomemos agora a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto r_1(z) = a + r(z) \end{aligned}$$

com a e $r(z)$ dados em (6.14). Temos que r_1 é um polinômio e portanto uma função contínua. Em particular, r_1 é contínua em 0 e $r_1(0) = a$. Daí, existe $\mu > 0$ tal que $|z - 0| = |z| < \mu$ implica que $r_1(z) \in \Delta(a\,;\delta)$. Com isso, $f\,(r_1(z)) = w^k[a + r(z)] \in B$. Seja $0 < t < 1$ tal que $|tw| < \mu$. Daí, como $r_1(tw) \in \Delta(a\,;\delta)$, então $f\,(r_1(tw)) = w^k[a + r(tw)] \in B$. Agora, se $0 < s < 1$ e $z \in B$, então, pela Proposição 3.4, $sz \in B$. Portanto, $t^k w^k[a + r(tw)] \in B$, pois $0 < t^k < 1$. Logo, pondo $z_1 = tw$, temos que

$$z_1^k[a + r(z_1)] \in B.$$

Como $q(z_1) = c + z_1^k[a + r(z_1)]$, então $q(z_1) - c = z_1^k[a + r(z_1)] \in B$, o que implica que $|q(z_1) - c + c| < |c|$, ou seja, $|q(z_1)| < |c|$. Daí, $|p(z_1 + z_0)| < |p(z_0)|$, o que é um absurdo já que $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Portanto, $p(z_0) = 0$. ■

A seguir apresentamos algumas conseqüências do Teorema Fundamental da Álgebra vistas no ensino médio.

Corolário 6.1. *Toda função polinomial $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de grau n, dada por $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, pode ser fatorada como produto de exatamente n fatores, a saber: $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$, onde $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ são as raízes de p.*

Demonstração. Vamos demonstrar este corolário por indução sobre o grau n da função polinomial p. Quando $n = 1$, temos $p(z) = a_1 z + a_0$, onde $a_1 \neq 0$, de maneira que p possui a raiz $z_1 = -a_0/a_1$ e pode ser escrito como $p(z) = a_1(z - z_1)$. Suponhamos que toda função polinomial $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_{n-1} z^{n-1}$ de grau $n - 1$ pode ser fatorada como $g(z) = b_{n-1}(z - z_1)(z - z_2). \ldots .(z - z_{n-1})$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existe $z_n \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_n) = 0$. Daí, pela Proposição **??**, segue que existe uma função polinomial $g(z)$ de grau $n - 1$, onde $p(z) = (z - z_n)g(z)$. Observe que

$$\begin{aligned} a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 &= (z - z_n)\left(b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0\right) \\ &= b_{n-1} z^n + (b_{n-2} - z_n b_{n-1}) z^{n-1} + \cdots . \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de z^n, temos que $b_{n-1} = a_n \neq 0$. Como g tem grau $n - 1$, segue que $p(z) = (z - z_n).b_{n-1}.(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_{n-1})$, ou seja, $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$. ■

Vejamos que as raízes complexas não reais de um polinômio com coeficientes reais ocorrem aos pares.

Corolário 6.2. *Se um número complexo $z = a + bi$, não real, for raiz de um polinômio $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ com coeficientes reais, então o conjugado $\overline{z} = a - bi$ também será raiz desse polinômio.*

Demonstração. Com efeito, $p(z) = 0$ implica que $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$. Logo, $\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0} = \overline{0}$. Pela propriedade do conjugado, temos $\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_0} = \overline{0}$. Como os coeficientes são reais, logo seus conjugados serão eles mesmos. Daí, temos que $a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$, ou seja, $p(\overline{z}) = 0$. Portanto $\overline{z}$ é raiz de p. ■

Corolário 6.3. *Todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais tem uma raiz real.*

Demonstração. Seja p um polinômio de grau ímpar com coeficientes reais. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$. Se $z_0 \in I\!R$, o resultado está provado. Se z_0 for um complexo não real, pelo Corolário 6.2, $\overline{z_0}$ também é uma raiz de p. Como o polinômio tem grau ímpar, tem de existir, pelo menos, um raiz real. ∎

7 Um pouco sobre Gauss

O primeiro matemático a demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra foi Carl F. Gauss, um gigante na Matemática. A seguir contaremos um pouco da vida e dos grandes feitos deste excepcional matemático.

Em 1777 nasceu em Brunswick, Alemanha, um menino que ainda pequeno mostrou ter um talento raro para a Matemática. Este menino chamava-se Carl Friedrich Gauss. Seu pai era um artesão local que tinha opinião pouco favorável aos estudos. Já sua mãe, sempre o incentivou, mantendo grande orgulho pelas realizações do filho.

Carl quando criança costumava se divertir com cálculos matemáticos. Há uma história segundo a qual, quando Carl tinha apenas 10 anos de idade, seu professor propôs que a turma calculasse a soma dos naturais de 1 até 100. Como era uma conta demorada, o professor esperava que esta tarefa durasse ao menos uma hora, mas em alguns minutos, para a surpresa do professor, o menino Gauss mostrou-lhe o resultado desta soma, que era 5050. O professor, curioso, lhe perguntou como havia conseguido fazer este cálculo tão rapidamente. E assim, Carl lhe explicou que somara primeiramente $1 + 100$, depois $2 + 99$, $3 + 98$, etc, e obtivera 50 somas iguais a 101 e a resposta era $50 \times 101 = 5050$. Mais tarde, quando adulto, Gauss costumava dizer que tinha aprendido a contar antes mesmo de aprender a falar!

O talento precoce de Gauss chamou, não só a atenção de seus mestres, como a do Duque de Brunswick, que acompanhou sua entrada no Colégio de Brunswick com 15 anos e depois na Universidade em Göttingen com 18 anos de idade. Embora já tivesse descoberto, independentemente, o método dos Mínimos Quadrados, Gauss estava indeciso em tornar-se um filólogo ou um matemático. Com sorte (da Matemática), tendo apenas 19 anos, Gauss descobriu que um polígono regular de 17 lados é construtível nos moldes da Teoria das Construções Euclidianas, o que fez com que trilhasse seu caminho em Matemática. Desde então, Gauss passou a registrar, de modo criptográfico, suas descobertas num diário. Alguns resultados que ali estavam já eram suficientes para trazer-lhe fama, mas Gauss nunca os publicou, pois achava que não estavam completamente acabados!

Em sua tese de doutorado, na Universidade de Helmstädt, escrita quando tinha 21 anos de idade, Gauss deu a primeira demonstração plenamente satisfatória do "Teorema Fundamental da Álgebra". Quase vinte anos depois, em 1816, Gauss publicou duas novas demonstrações, e mais tarde ainda, em 1850, uma quarta demonstração no intuito de encontrar uma prova inteiramente algébrica.

A publicação mais importante de Gauss é, sem dúvida, sua *Disquisitiones Arithmeticae*, um trabalho de fundamental importância para a moderna Teoria dos Números. Gauss deu contribuições notáveis à Astronomia e à Física. Em 1801 ele calculou, com pouquíssimos dados, a órbita de alguns planetóides. Em 1807 ele se tornou professor de Matemática e diretor do observatório de Göttingen. Gauss acreditava que a Matemática, por inspiração, deveria atingir o mundo real. É famosa a frase de Gauss em que *"A Matemática é a rainha das Ciências, e a Teoria dos Números é a rainha da Matemática"*.

Gauss morreu em sua casa, no observatório de Göttingen, em 23 de fevereiro de 1855, e logo após, o rei de Hannover ordenou que se preparasse uma medalha comemorativa em homenagem ao *"Príncipe da Matemática"*.

Referências

[1] AHLFORS, L.V. *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.* 3 ed. New York: McGraw-Hill, 1979. (International Series in Pure and Applied Mathematics).

[2] BOYER, Carl B., *História da Matemática.* 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2003.

[3] CONWAY, J.B. *Functions of one complex variable, I.* 2 ed. New York: Springer, 1978. (Graduate Texts in Mathematics, 11).

[4] COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é Matemática?.* Trad. Alberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000. 621 p. Tradução de: What is Mathematics? .

[5] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. 3 ed. São Paulo: UNICAMP, 2002. 844p.

[6] FERNANDEZ, Cecília de Souza; BERNARDES Jr., Nilson da Costa. *Introdução às Funções de uma Variável Complexa.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. 225p (Coleção Textos Universitários).

[7] GARDING, Lars. Encontro com a Matemática. Editora Universidade de Brasília UnB 2a. Edição 1997. 333p.

[8] LANG, Serge. *Undergraduate Analysis.* Second Edition. Ed. Springer - Verlag, 1997.

[9] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise.* 7 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1992. 344 p, Vol. 1. (Projeto Euclides).

[10] SEELEY, Robert T. *Cálculo de uma Variável.* Trad. João Bosco Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A., 1976. 131p.

[11] SOARES, M.G. *Cálculo em uma variável complexa.* Rio de Janeiro: IMPA, 1999.(Coleção Matemática Universitária).