V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

COMPREENDENDO AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS COM O AUXÍLIO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Airton Temistocles Gonçalves de Castro [*] & Ademilson do Nascimento Rodrigues [†]

Resumo

É inquestionável a grande aplicação das funções exponencial e logarítmica em diversas áreas do conhecimento. Os alunos são apresentados a estas funções e suas propriedades ainda no Ensino Médio, infelizmente de forma meramente mecânica.

No curso de Cálculo 1 os alunos são reapresentados a estas funções, entretanto raramente é feita a ligação entre as duas abordagens. Os alunos apreendem novas propriedades destas funções, sem vincular as antigas.

Pretendemos neste mini-curso revisar as propriedades das funções exponencial e logarítmica usando a ferramenta do Cálculo Diferencial. Mostraremos que podemos recuperar todas as propriedades partindo do conhecimento da derivada da exponencial. A idéia é mostrar aos alunos que fizeram, pelo menos, um curso de Cálculo o poder da derivada e, com um pouco de sorte, motivá-los a fazer um curso de Equações Diferenciais.

- **Palavras-chave**: função exponencial; função logarítmica; continuidade; derivação.

1 Introdução

Séculos atrás, no âmago dos estudos envolvendo exponenciais e logarítmos, objetivava-se estabelecer estruturas que transformassem produtos em somas. Algumas dessas tentativas levaram a caminhos profícuos de estudos dentro da própria Matemática e áreas afins.

Hoje em dia, no âmbito escolar, o uso de tal argumento, como justificativa para que os conceitos de funções exponenciais e logarítmicas façam parte dos conteúdos curriculares, já não tem tanta força. Devido o surgimento de outros métodos e equipamentos mais potentes, a multiplicação entre números formados por muitos algarismos já não consiste numa grande dificuldade para alunos do ensino médio.

Por outro lado, a potencialidades didáticas nas propostas de modelagem matemáticas para situações problemas reavivaram o interesse dos educadores pelas funções exponenciais e logarítmicas. São inúmeros os fenômenos, naturais ou não, que podem ser modelados conforme estas funções. Podemos citar a construção da escala de notas musicais, o cálculo do tempo de meia vida de partículas radioativas e a avaliação do crescimento de populações dentre outros.

A organização e interligação das áreas de conhecimentos sugeridas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio (PCNEM) estimula a abordagem de tais conceitos em aulas de outras disciplinas, por exemplo: Química e Física.

Todavia, espera-se uma análise mais rigorosa com relação às propriedades e seu domínio de validade, pelo menos, por parte dos futuros professores de matemática para o Ensino Médio. O propósito deste mini-curso é de trazer uma abordagem diferenciada para a apreciação das funções logarítmicas e exponenciais bem como da obtenção de suas propriedades a partir de poucos conhecimentos do cálculo diferencial e análise, permitindo assim, aos futuros professores do Ensino Médio ou até mesmo do Ensino Superior, que possam ampliar as suas próprias: percepção; interpretação e modelagem de fenômenos, bem como de seus alunos.

[*] Universidade FEderal de Pernambuco, DMAT, PE, Brasil, airton@dmat.ufpe.br
[†] Universidade FEderal de Pernambuco, DMAT, PE, Brasil, adessisso@yahoo.com.br

2 As funções exponenciais no ensino médio

Ao ingressar no Ensino Médio, o aluno já está familiarizado com o significado de uma potenciação cujo expoente é um número natural ou até mesmo racional. Além disso, já não é mais mistério a propriedade que relaciona o produto de duas potências de mesma base a outra de base ainda idêntica e cujo expoente é igual à soma dos expoentes das duas potências citadas anteriormente. Entretanto, o domínio de validade dessa propriedade não abrange algumas situações.

Definição 2.1. *Para um número real a positivo diferente de 1, define-se a função a^x, com domínio nos reais.*

Os alunos são apresentados, a seguir, às propriedades:

(a_1) $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$, para todos x_1 e x_2 números reais e $a^0 = 1$;

(a_2) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$, para todos x_1 e x_2 números reais.

(a_3) Se $a > 1$ a função é crescente; $x_1 < x_2$ implica que $a^{x_1} < a^{x_2}$; Se $0 < a < 1$ a função é decrescente; $x_1 < x_2$ implica que $a^{x_1} > a^{x_2}$

3 As funções exponenciais nos cursos de cálculo

Nos cursos de cálculos, voltamos a trabalhar com a função exponencial, só que agora utilizamos uma base específica, o estranho número e irracional ($e = 2,7182818284590452353602874713527\cdots$). Nossa função exponencial passa a ser e^x, além das propriedades já conhecidas do Ensino Médio, ganha novas propriedades:

(E_1) A função exponencial é derivável e sua derivada é ela mesma: $(e^x)' = e^x$,

(E_2) Comportamento da função exponencial no infinito: $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

4 Nova abordagem

Vamos no concentrar apenas nas propriedades (E_1) e parte de (a_1). Use uma borracha para apagar de sua memória as outras propriedades e vamos constatar que podemos recuperar todas as outras propriedades.

Suponha que exista uma função derivável $E(x)$ definida para todo número real x, $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo a seguinte equação:

$$(Eq1) \qquad \frac{d}{dx}E(x) = E'(x) = E(x), \quad E(0) = 1$$

Vamos partir desta função e resgatar as outras propriedades.

Propriedade 4.1. $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$ *para todo x real, em particular* $E(x) \neq 0$.

Prova: defina a função $f(x) = E(x) \cdot E(-x)$, calculando a derivada (regra do produto e regra da cadeia) temos:

$$f'(x) = E'(x) \cdot E(-x) + E(x) \cdot (E(-x))' = E(x) \cdot E(-x) + E(x) \cdot (-E(-x)) = 0$$

Desta forma temos que a função f tem derivada nula (Corolário 7.2 do anexo). Logo podemos concluir que a função é constante, em particular $f(x) = f(0)$, só que temos $f(x) = E(x) \cdot E(-x)$ e $f(0) = E(0) \cdot E(-0) = 1$, assim $E(x) \cdot E(-x) = 1$, provando a propriedade.

□

Propriedade 4.2. *Existem poucas funções que coincidem com sua derivada, mais precisamente, se uma função* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *coincide com sua derivada* $\phi'(x) = \phi(x)$ *então* $\phi(x) = \phi(0) \cdot E(x)$ *para todo x real. Em particular, isto mostra que só existe, no máximo, uma função satisfazendo a equação* $(Eq1)$.

Prova: Defina $g(x) = \phi(x) \cdot E(-x)$; calculando a derivada desta função (outra vez regra do produto e regra da cadeia), encontramos

$$g'(x) = \phi'(x) \cdot E(-x) + \phi(x) \cdot (E(-x))' = \phi(x) \cdot E(-x) - \phi(x) \cdot E(-x) = 0$$

$g'(x) = 0$, outra função com derivada nula, logo é uma função constante; $g(x) = g(0)$, consequentemente $\phi(x) \cdot E(-x) = \phi(0) \cdot E(0) = \phi(0)$, e usando $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$ concluímos $\phi(x) = \phi(0) \cdot E(x)$. Se além de $\phi'(x) = \phi(x)$ temos $\phi(0) = 1$, outra solução da equação $(Eq1)$ temos que $\phi(x) = \phi(0) \cdot E(x) = 1 \cdot E(x) = E(x)$, mostrando que a equação, tem no máximo, uma solução.

$\square$

Propriedade 4.3. *Transformação do soma em produto, $E(a+b) = E(a) \cdot E(b)$, para todos a e b reais, em particular $E(na) = (E(a))^n$, para todo n inteiro*

Prova: Defina $g(x) = E(a + x)$, calculando a derivada obtemos o seguinte resultado: $g'(x) = E'(x + a) = E(x + a) = g(x)$; usando a Propriedade 4.2 para nossa função $g \Rightarrow g(x) = E(a + x) = g(0) \cdot E(x) = E(a) \cdot E(x)$, fazendo $x = b$ obtemos o resultado desejado: $E(a + b) = E(a) \cdot E(b)$. A demonstração da última parte fica como exercício. Para o caso natural use indução finita e termine usando a propriedade 4.1.

$\square$

Propriedade 4.4. *A função $E(x)$ é positiva e monótona crescente.*

Prova: Sabemos que o crescimento de uma função está vinculado ao sinal da derivada primeira (veja corolário 7.2 no anexo), desta forma basta verificar que $E(x) > 0$, para concluir que ela é crescente; entra em cena outro importante teorema, o teorema do valor intermediário, que em um de seus corolários afirma que se uma função contínua (nossas funções são deriváveis, logo contínuas) está definida em um intervalo que troca de sinal (tem dois pontos com sinais diferentes) estão ela tem algum zero neste intervalo. Pela propriedade 1, sabemos que a função $E(x)$ não tem zeros, logo ela não pode trocar de sinal, como sabemos que a função é positiva num ponto $(E(0) = 1 > 0)$, concluimos que ela é sempre positiva.

$\square$

Propriedade 4.5 (Limite no infinito)**.** $\lim_{x\to+\infty} E(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to-\infty} E(x) = 0$

Prova: Defina $e = E(1)$; como $1 > 0$ e a função $E(x)$ é crescente, temos $e = E(1) > E(0) = 1$. Usando a propriedade 4.3 temos que $E(2) = E(1 + 1) = E(1) \cdot E(1) = e \cdot e = e^2$, analogamente $E(3) = E(1 + 2) = E(1) \cdot E(2) = e \cdot e^2 = e^3$, podemos usar indução finita para concluir que $e^n = E(n)$ para todo n natural, já que $e > 1$, sabemos que $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$, ou seja, dado $M \in \mathbb{R}$, existe um número natural n_0, tal que para todo $n \geq n_0$ temos $e^n > M$; em particular $e^{n_0} > M$, usando outra vez que a função é crescente temos $x \geq n_0$ implica que $E(x) \geq E(n_0) > M$, mostrando que $\lim_{x\to+\infty} E(x) = +\infty$. Para o outro limite, colocando $x = -t$ e temos $\lim_{x\to-\infty} E(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{E(x)} = 0$.

$\square$

Propriedade 4.6. *A imagem da função é os números reais positivos.*

$$\text{Imagem}E = E(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

Prova: Como a função é positiva $E(x) > 0$, temos que $E(\mathbb{R} \subset (0, +\infty)$; dado $y \in (0, +\infty)$, como $\lim_{x \to +\infty} E(x) = +\infty$. Sabemos que existe um número real x_1 tal que $E(x_1) > y$; analogamente, como $\lim_{x \to -\infty} E(x) = 0$, existe outro número real x_2 tal que $E(x_2) < y$ usando o Teorema do Valor Intermediário concluímos que existe um número real x_0 tal que $E(x_0) = y$.

$\square$

5 A função logarítmica

Observe que a nossa função $E(x)$ é uma bijeção na sua imagem $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, assim faz sentido falar de sua inversa, que denotaremos por $L : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, assim $L(E(x)) = x$ para todo x real e $E(L(y)) = y$ para todo y real positivo. Vamos agora demonstrar propriedades de L (nossa função logarítmica), observe que $L(1) = L(E(0)) = 0$ e $L(e) = L(E(1)) = 1$.

Propriedade 5.1. *Transformação do produto em soma:* $L(a \cdot b) = L(a) + L(b)$, *para* a *e* b *reais positivos, e* $L(\frac{a}{b}) = L(a) - L(b)$, *em particular* $L(a^n) = nL(a)$, *para* a *real positivo e* n *inteiro.*

Prova: Defina $A = L(a)$ e $B = L(b)$, usando a Propriedade 4.3 temos $E(A + B) = E(A) \cdot E(B) = E(L(a)) \cdot E(L(b)) = a \cdot b$. Aplicando a função L nesta identidade concluímos $L(a \cdot b) = L(E(A + B)) = A + B$, ou seja, $L(a \cdot b) = L(a) + L(b)$. Como exercício prove que $L(\frac{a}{b}) = L(a) - L(b)$. Por último, calcule $E(nA) = (E(A))^n = (E(L(a)))^n = a^n$, aplicando L obtemos: $L(a^n) = L(E(nA)) = nA = nL(a)$

$\square$

Propriedade 5.2. *A derivada da função* $L(x) : L'(x) = \frac{1}{x}$ *, para todo* x *real positivo.*

Prova Pelo Teorema da Função Implícita ($E'(x) = E(x) \neq 0$), sabemos que L tem derivada, derivando a seguinte identidade $E(L(x)) = x$, $E'(L(x)) \cdot L'(x) = 1$, como conhecemos a derivada da função $E(x)$, temos $E(L(x)) \cdot L'(x) = x \cdot L'(x) = 1$, assim concluímos que $L'(x) = \frac{1}{x}$.

$\square$

6 A função exponencial geral (a^b).

Como conseguir uma boa definição para (a^b), como a real positivo e b real? A resposta é simples para os casos b natural e inteiro.

Caso 1: n natural e a real: $a^0 = 1$; $a^1 = a$ e $a^n = a \times a \times \cdots \times a$, produto de n fatores iguais (n maior que 1).

Caso 2 n inteiro $a \neq 0$ real: só falta fazer o caso n negativo, neste caso $a^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$.

Caso 3: a real positivo e q racional: para definir de forma apropriada a^q teremos que admitir conhecido o cálculo de raiz de n-ésima de um número real positivo, isto é, dados a real positivo e n natural positivo e existe (único) b real positivo tal que $b^n = a$, neste caso dizemos que b é a raiz de ordem n (n-ésima) de a e escrevemos $\sqrt[n]{a} = b$. Assumindo isto podemos escrever $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$. Observe que existem muitos detalhes a serem provados.

Caso 4: a real positivo e b real, como definir a^b? Não é uma pergunta simples e muitas vezes passa despercebido este importante tópico, vamos usar a nossa função logarítmica (L) para resolver de forma rápida e simples este impasse.

Definição Geral: $a^b =^{\text{def}} E(b \cdot L(a))$, para a real positivo e b real.

Vamos mostrar que esta definição coincide com a definição usual para os casos 1 e 2. Vejamos o caso 1: $E(n \cdot L(a)) = E(L(a^n)) = a^n$, observe que usamos a propriedade 5.1; $E(1 \cdot L(a)) = E(L(a)) = a$ e $E(0 \cdot L(a)) = E(0) = 1 = a^0$.

O caso 2 é consequência de

$$E(-1 \cdot L(a)) = E(-L(a)) = E\left(L\left(\frac{1}{a}\right)\right) = \frac{1}{a} = a^{-1}.$$

Para o caso 3, suponha conhecido $\sqrt[m]{a} = c$, ou seja, $a = c^m$, aplicando a função L, $L(a) = L(c^m) = mL(c)$, logo $L(\sqrt[m]{a}) = L(c) = \frac{1}{m} \cdot L(a)$, assim olhando para nossa definição $E\big(\frac{n}{m} \cdot L(a)\big) = E\big(n \cdot L(\sqrt[m]{a})\big) = E\Big(L\big((\sqrt[m]{a})^n\big)\Big) = (\sqrt[m]{a})^n$.

O caso 4 pode ser visto como uma extensão dos casos anteriores, que funciona bem nos casos já conhecidos.

7 Anexos

Os teoremas aqui enunciados, já se encontram demonstrados em livros de análise real, tais como: Lima 2004 e Ávila 2006 ou 1999.

Teorema 7.1 (Teorema do Valor Intermediário (TVI))**.** *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.*

Corolário 7.1. *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f(a) \cdot f(a) < 0$, então a função tem, pelo menos, uma raiz no intervalo aberto (a, b), noutras palavras, toda vez que uma função contínua troca de sinal ela tem uma raiz.*

Teorema 7.2 (TVM)**.** *Dada uma função contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável no intervalo aberto (a, b). Então, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$. Em outras palavras, existe um ponto do intervalo (a, b) cuja reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ é paralela a reta secante definida pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.*

Corolário 7.2. *O sinal de $f'(x)$ determina o crescimento da função $f(x)$.*

i. *$f'(x) > 0$ no intervalo (a, b), implica que a função é monótona crescente.*

ii. *$f'(x) < 0$ no intervalo (a, b), implica que a função é monótona decrescente.*

iii. *$f'(x) \leq 0$ no intervalo (a, b), implica que a função é monótona não-crescente.*

iv. *$f'(x) \geq 0$ no intervalo (a, b), implica que a função é monótona não-decrescente.*

v. *$f'(x) = 0$ no intervalo (a, b), implica que a função é constante neste intervalo.*

Referências

[1] Ávila, G. S. S. - *Análise Matemática para licenciatura.*, 3ª Ed. revista e ampliada. São Paulo: Blücher, 2006.
[2] _____ - *Introdução à Análise Matemática*, 2ª edição revista. São Paulo: Blücher, 1999Revista do Professor de Matemática, Nº 5, 2º Semestre de 1984, São Paulo.
[3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica - *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*, Brasília: MEC/SEMTEC, 1999. 4v.
[4] Lima, E.L. - *Análise Real.*, 7ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.