V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

ALGUNS BELOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DISCRETA

ROGÉRIO RICARDO STEFFENON*

Neste minicurso serão apresentados e resolvidos alguns belos problemas, cuja solução utiliza argumentos elementares e relativamente simples de Matemática Discreta. Entre os tópicos abordados destacamos: Indução Matemática, Sequência de Fibonacci, Recorrência, Combinatória, Divisibilidade, Sistemas de Numeração, Princípio da Casa dos Pombos e Probabilidade. O formato deste minicurso se assemelha com aquele ministrado na III Bienal da SBM em Goiânia, no ano de 2006. Muitos dos problemas abordados surgem em Olimpíadas de Matemática e podem ser uma boa fonte para professores estimularem seus alunos a aprender Matemática. Gostaria de agradecer ao professor Eduardo Brietzke pela contribuição com problemas envolvendo identidades combinatórias.

A distribuição das aulas será a seguinte:

1ª Aula: Serão abordados problemas que envolvem a Indução Matemática e o Sistema Binário: Torres de Hanói, pesagem de moedas numa balança de dois pratos e quantidade de jogos necessários para definir um vencedor num torneio do tipo mata-mata. A partir dos problemas resolvidos, vamos deduzir que todo número natural pode ser escrito de modo único como soma de potências de 2 e também apresentar os cartões binários mágicos.

2ª Aula: Apresentaremos vários problemas cuja solução envolve o Princípio da Casa dos Pombos. Além disso, abordaremos o Paradoxo Gêmeo (problema dos aniversários) e o problema dos Dois Bodes.

3ª Aula: Abordaremos problemas que envolvem a sequência de Fibonacci e divisibilidade. Vamos provar que todo número natural pode ser escrito de modo único como soma de termos não consecutivos da sequência de Fibonacci e com isso apresentamos uma mágica com "cartões de Fibonacci".

4ª Aula: Apresentaremos os conceitos básicos de contagem, utilizando permutações (simples e circulares) e combinações (simples e completas). Algumas fórmulas interessantes de Combinatória envolvendo somas serão deduzidas nesta aula.

5ª Aula: Serão resolvidos problemas diversos envolvendo alguns tópicos das aulas anteriores.

Pré-requisito: nenhum.

*Unisinos – Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, RS, Brasil, rogerios@unisinos.br

1 Problemas

Agora daremos início ao passeio no mundo de belos problemas em Matemática Discreta. Em alguns casos necessitaremos de resultados conhecidos para a resolução das questões propostas. Para quem tiver interesse na demonstração desses, pode consultar a bibliografia indicada no final. Começamos com o algoritmo básico da divisão de números naturais e com a representação posicional dos naturais em diversos sistemas. Os dois primeiros problemas envolvem sistemas de numeração e o algoritmo da divisão será utilizado na resolução de diversos problemas.

O Algoritmo da Divisão

Se a e b são números inteiros, com $b > 0$, então existem e são únicos os inteiros q e r tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$.

Sistemas de Numeração

Seja b um número positivo com $b > 1$. Então todo inteiro positivo n pode ser escrito de modo único na forma $n = c_k b^k + c_{k-1} b^{k-1} + \cdots + c_2 b^2 + c_1 b + c_0$, onde k é um inteiro não negativo, c_j é inteiro com $0 \leq c_j \leq b - 1$ para $j = 0, 1, \ldots, k$ e $a_k \neq 0$. Em particular, temos o:

Sistema Binário

Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de potências distintas de 2.

Problema 1.

Os objetivos deste exercício são:

(i) Provar o resultado $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geq 1$.

(ii) Fazer a mágica com os Cartões Mágicos Binários.

(iii) Deduzir o seguinte resultado: Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como uma soma de diferentes potências de 2.

Um belo problema para deduzir o item (i) acima é o seguinte:

(a) Num torneio de tênis individual há 2^{n+1} participantes. Sabendo que a disputa é do tipo *mata-mata** , quantos jogos são realizados para se definir o vencedor?

*Os jogadores são divididos em grupos de 2, ao acaso, e jogadores de um mesmo grupo jogam entre si. Os perdedores são eliminados e os vencedores são divididos novamente em grupos de 2 e assim por diante até restar um jogador, que é proclamado campeão.

A seguir um problema interessante para trabalhar a representação de números naturais no sistema binário:

(b) Em um programa de televisão, um candidato deve responder 21 perguntas. A primeira pergunta vale 1 ponto, a segunda 2 pontos, a terceira 4 pontos, e assim sucessivamente, dobrando sempre. O candidato responde a todas as perguntas e ganha os pontos correspondentes às respostas que acertou, mesmo que erre algumas. Sendo assim, responda:

(b.1) Qual o número de pontos que o candidato fará se acertar todas as perguntas?

(b.2) Quantas e quais as perguntas o candidato acertou se o número de pontos obtidos for igual a 571113?

Problema 2.

Numa biblioteca há dez estantes com muitos livros em cada uma delas. Além disso, dispomos de uma balança eletrônica(como as que existem em farmácias). Resolva cada uma das situações abaixo:

(a) Sabemos que, em nove delas, cada livro pesa 1 kg e que, em uma delas, cada livro pesa 1,01 kg. Como descobrir, com uma pesagem apenas, qual a estante dos livros de 1,01 kg e, em consequência, quais são as estantes com os livros de 1kg?

(b) Em algumas estantes, cada livro pesa 1 kg e nas outras, cada livro pesa 1,01 kg, podendo inclusive haver apenas livros de um dos tipos. Como descobrir, com uma pesagem apenas, quais as estantes dos livros de 1kg?

(c) Em algumas estantes, cada livro pesa 1 kg, em outras 1,01 kg e nas restantes cada livro pesa 1,02 kg, podendo inclusive haver apenas livros de um dos tipos. Como descobrir, com uma pesagem, quais as estantes dos livros de 1kg, de 1,01 kg e de 1,02 kg?

Enunciamos agora um dos princípios mais básicos da Matemática e o teorema da fatoração única nos naturais. Esses resultados serão usados na resolução de diversos problemas.

Princípio Fundamental da Enumeração ou Princípio Multiplicativo

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x_1 maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de x_2 maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x_1 \cdot x_2$. Mais geralmente, suponha que tenhamos que tomar n decisões sucessivas $d_1, d_2, \ldots, d_n$ e se a decião d_i puder ser tomada de x_i maneiras, então o número de maneiras de tomarmos as decisões $d_1, d_2, \ldots, d_n$ é $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$.

Teorema Fundamental da Aritmética – TFA

Todo número natural $n \geq 2$ pode ser escrito de modo único na forma $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{e_t}$, onde $p_1 < p_2 < \ldots < p_t$ são números primos e os expoentes e_i são inteiros positivos.

Uma forma alternativa para o TFA:

Todo número natural $n \geq 1$ pode ser escrito de modo único na forma $n = 2^k(2m+1)$, onde k, m são inteiros não negativos.

Duas consequências importantes do TFA e do Princípio Multiplicativo:

(a) Se $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{e_t}$, então n possui $(e_1+1) \cdot (e_2+1) \cdot \ldots \cdot (e_t+1)$ divisores positivos.

(b) Um número natural n tem quantidade ímpar de divisores positivos se, e somente, se for um quadrado perfeito.

O problema a seguir trata da questão da contagem da quantidade de divisores de um número natural.

Problema 3.

Numa escola há um corredor com 2010 armários numerados de 1 a 2010 , inicialmente todos fechados. 2010 alunos numerados de 1 a 2010, passam pelo corredor. O aluno de número k reverte o estado de todos os armários cujos números são múltiplos de k. Por exemplo, o aluno de número 4 mexe nos armários de números 4, 8, 12,..., abrindo os que encontra fechados e fechando os que encontra abertos. Ao final, depois da passagem do 2010º aluno, quais armários ficarão abertos?

Um dos axiomas mais importantes na definição concisa dos naturais é o:

Princípio de Indução Matemática

Sejam n_0 um número natural e $P(n)$ uma propriedade referente ao número natural $n \geq n_0$. Suponhamos que:

(a) $P(n_0)$ é verdadeira;

(b) $P(k)$ implica $P(k+1)$ para todo número natural $k \geq n_0$.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Os problemas abaixo se referem a um jogo bastante interessante e questões envolvendo a pesagem de moedas. A indução matemática aparece de forma lúdica.

Problema 4. (As Torres de Hanói)

O jogo consiste em uma base onde estão firmadas três hastes verticais que denominamos **A**, **B** e **C** e um certo número de discos, de diâmetros diferentes, furados no centro. No começo do jogo os discos estão todos enfiados na haste **A**, em ordem decrescente de tamanho, com o disco menor acima dos demais.

O objetivo é mover todos os discos, de **A** para **C**, obedecendo às seguintes regras:

(1) Só é permitido mover um disco de cada vez.

(2) Um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor.

É fácil ver que é necessário usar a haste **B** como intermediária. O problema consiste no seguinte:

Qual o número mínimo de movimentos que precisaremos fazer para alcançar o objetivo?

Sugestão: Verifique quantos movimentos são necessários quando temos 1 disco, 2, 3, 4 discos e tente encontrar alguma regularidade. Existem vários sites que tratam do assunto.

Para jogar veja, por exemplo: http://www.prof2000.pt/users/pjca/Jogos_ficheiros/hanoi/Torre

Observação: *The Reve's Puzzle*: Uma questão interessante é considerar o mesmo problema com 4 hastes **A**, **B**, **C** e **D**. Inicialmente há n discos de diâmetros diferentes, fincados inicialmente na haste A, nas condições acima. O objetivo, seguindo as duas regras acima, é passá-las para a haste **D**. Nesse caso as hastes **B** e **C** fucionam como intermediárias. Até o momento não se conhece o número mínimo de movimentos para resolver o problema com n discos. Há uma conjectura, com cerca de 70 anos, de que o número mínimo de movimentos necessários é igual ao número de movimentos usados por um algoritmo criado por Frame e Stewart (Conjectura de Frame-Stewart).

Problema 5.

Seja $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Suponha que você possua k moedas de um real, uma das quais é falsa e pesa menos do que uma verdadeira. Você tem uma balança de dois pratos mas não tem pesos. A única forma de pesagem consiste em por algumas moedas em cada prato e verificar se a balança está equilibrada.

(a) Faça uma tabela com duas colunas. Na primeira coluna escreva valores de $k(k = 2, 3, 4, ...)$ e na segunda coloque a quantidade mínima de pesagens para descobrir a moeda falsa.

(b) O que acontece para os seguintes valores de $k : 3, 4, 9, 10, 27, 28$?

(c) Mostre, por indução em n, que se $k = 3^n$, então n pesagens são suficientes para achar a moeda adulterada.

Problema 6.

Suponha que você possua 12 moedas de um real, uma das quais é falsa e tem peso diferente de uma verdadeira(não sabemos se a falsa pesa mais ou menos que uma verdadeira). Você tem uma balança de dois pratos mas não tem pesos. A única forma de pesagem consiste em por algumas moedas em cada prato e verificar se a balança está equilibrada.

(a) Mostre que 3 pesagens são suficientes para achar a moeda adulterada.

(b) Consegues resolver o mesmo problema com 13 moedas? E com 14 moedas?

A importância de um resultado matemático pode ser medida pela simplicidade e aplicabilidade. Um dos mais belos exemplos disso é o:

Princípio das Gavetas de Dirichlet ou Princípio da Casa dos Pombos (PCP)

Se $n+1$ pombos são colocados em n casas, então pelo menos uma casa conterá dois ou mais pombos.

Agora enunciaremos diversos problemas cuja solução envolve o princípio acima. Começamos com um que aborda uma questão comum em Matemática: a existência. É muito frequente provarmos que determinado objeto matemático(número, ponto ou função) existe sem que saibamos exibi-lo concretamente. O problema a seguir retrata essa questão.

Problema 7.

Mostre que em João Pessoa há pelo menos duas pessoas com a mesma quantidade de fios de cabelo na cabeça.

Agora enunciamos três problemas bastante conhecidos e um que apareceu na OBM(Olimpíada Brasileira de Matemática) .

Problema 8. Prove que se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, então dois desses números são primos entre si.

Problema 9. Prove que se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, então um deles será múltiplo do outro.

Problema 10.

Seja $a \neq 0$ um algarismo no sistema decimal. Prove que todo número natural n tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos 0 e a.

Problema 11. (Primeira Questão da Terceira Fase da OBM de 2008)

Vamos chamar de *garboso* o número que possui um múltiplo cujas quatro primeiras casas de sua representação decimal são 2008. Por exemplo, 7 é garboso pois 200858 é múltiplo de 7 e começa com 2008. Observe que $200858 = 28694 \times 7$.

Mostre que todos os inteiros positivos são garbosos.

Um resultado que de certa forma generaliza os dois últimos problemas é o seguinte:

Problema 12.

Sejam $A = \{n \in \mathbb{N} : \text{mdc}(n, 10) = 1\}$ e $a_1 a_2 \ldots a_k$ um número com k algarismos. Agora considere o conjunto $B = \{a_1 a_2 \ldots a_k,\ a_1 a_2 \ldots a_k a_1 a_2 \ldots a_k,\ a_1 a_2 \ldots a_k a_1 a_2 \ldots a_k a_1 a_2 \ldots a_k,\ \ldots\}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $M(n)$ o conjunto dos múltiplos de n. Mostre que se $x \in A$, então $M(x) \cap B$ é infinito.

Mais três belos problemas envolvendo o PCP.

Problema 13.

De 1^o de janeiro até 31 de outubro de 2009, uma pequena livraria de João Pessoa, que abre todos os dias, vendeu no mínimo um livro por dia e um total de 463 livros. Mostre que existiu um período de dias consecutivos em que foram vendidos exatamente 144 livros.

Problema 14.

Dados CINCO números reais arbitrários, mostre que existem dois deles, digamos x e y, tais que $0 \leq \dfrac{x - y}{1 + xy} \leq 1$.

Problema 15.

Guilherme teve os olhos vendados e com uma caneta fez 50 pontos numa cartolina quadrada com lado igual a 70 cm. Mostre que existem dois pontos cuja distância é inferior a 15 cm.

Um problema interessante para testar a intuição dos alunos é o seguinte:

Problema 16. Paradoxo Gêmeo ou Problema dos Aniversários

Você está assistindo um jogo de futebol e lá pelas tantas surge a seguinte questão:

- "Qual é a probabilidade de que pelo menos dois dos 22 jogadores em campo façam aniversário no mesmo dia (dia e mês)?" (*)

* É muito provável que você nunca tenha pensado nisso durante uma partida de futebol...

Enunciamos um problema envolvendo probabilidades e que sempre gera muita discussão.

Problema 17. Problema dos Dois Bodes

Este problema é inspirado num programa de TV americano conhecido como *Let's make a deal* (Vamos fazer um negócio). Nesse show, dá-se ao concorrente finalista a chance de escolher uma entre três portas. Atrás de exatamente uma das portas, está um prêmio interessante (um carro, por exemplo); as outras duas portas ocultam prêmios de valor bem inferior (um bode atrás de cada porta, por exemplo). Pede-se ao concorrente que escolha uma porta. A esta altura, o apresentador do show, Monty Hall, que sabe o que tem atrás de cada porta, mostra ao concorrente um dos prêmios de menor valor atrás de uma das portas não escolhidas. Além disso, oferece ao concorrente a oportunidade de optar pela outra porta fechada. A questão é a seguinte: é vantajoso optar pela outra porta ou tanto faz?

Uma variação do problema anterior é o seguinte:

Problema 18. Problema dos Dois Bodes com apresentador Preguiçoso

Nesse caso quando o concorrente escolhe inicialmente a porta do carro, o apresentador mostra o bode da porta mais próxima, pois ele é preguiçoso. Como ficam as chances do concorrente?

A seguir apresentamos dois problemas cuja solução envolve uma famosa sequência.

Problema 19.

Imagine que um prédio de quatro andares deva ser pintado usando-se uma cor para cada andar. Sabendo que as cores utilizadas podem ser verde e amarelo e que andares consecutivos não poderão ser pintados de amarelo, de quantas maneiras é possível fazer a pintura deste prédio? E se o prédio tiver n andares?

Problema 20.

Uma escada tem 5 degraus. De quantas maneiras podemos chegar ao topo, subindo um ou dois degraus de cada vez? E se a escada tiver n degraus?

Consideremos a seguinte variação da sequência de Fibonacci $F_1 = 1, F_2 = 2$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$.

Problema 21. Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro

Os objetivos deste exercício são:

(i) Provar os seguintes resultados para a sequência definida acima:

$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1.$

$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$

$F_1 + F_2 + \cdots + F_{10} = 11F_7.$

(ii) Deduzir o seguinte resultado: Mostre que todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de termos não consecutivos da sequência F_n.

(iii) Fazer a mágica com os Cartões Mágicos de Fibonacci.

(iv) Fazer a mágica da soma dos 10 primeiros termos de uma sequência de FIbonacci.

Uma aplicação interessante e surpreendente da sequencia de Fibonacci aparece no problema abaixo.

Problema 22.

Um conjunto de números positivos tem a propriedade do triângulo, se tiver três elementos distintos que são os comprimentos dos lados de um triângulo. Considere os conjuntos de inteiros positivos consecutivos da forma $\{4, 5, 6, ..., n\}$, em que todos os subgrupos de dez elementos têm a propriedade de triângulo. Qual é o maior valor possível de n?

Lembre a Condição de Existência de um Triângulo: Três números reais positivos a, b, c são lados de um triângulo se, e somente se, $a < b + c, b < a + c$ e $c < a + b$.

Agora apresentaremos um problema que envolve uma sequência que não é tão famosa que a de Fibonacci, mas que conduzirá a um parente próximo do número de ouro.

Problema 23. Sequência de Padovan-Perrin e o Número de Plástico

Um carteiro entrega cartas para dezenove casas, numeradas de 1 a 19, numa certa rua de Campina Grande. Até hoje em nenhum dia ele entregou cartas para casas consecutivas, mas dadas três casas consecutivas, sempre havia carta para uma delas. De quantas maneiras diferentes isso pode ocorrer?

A sequência de Fibonacci está relacionada com o número de ouro: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1,6180339887498948...$

De modo semelhante temos a sequência de Padovan que é definida por $P_0=P_1=P_2=1$ e $P_n=P_{n-2}+P_{n-3}$,

para $n\geq 3$. A sequencia de Perrin tem a mesma relação de recorrência, mas $P_0=3, P_1=0, P_2=2$. Essas sequências estão relacionadas com o número de plástico: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{69}}{18}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{69}}{18}}=1,3247179572447460...$

É possível mostrar que a sequência P_n satisfaz a equação de recorrência $P_{n+1}=P_n+P_{n-4}$. Um fato conhecido é que o número de ouro é a solução positiva da equação polinomial $X^2-X-1=0$. Por outro lado, também é possível provar que o número de plástico é a única solução real das equações polinomiais $X^3-X-1=0$ e $X^5-X-1=0$.

Agora vamos abordar os principais conceitos envolvendo contagem em Análise Combinatória. Começamos com a seguinte questão:

Permutações simples: De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos?

Resposta: O número de permutações simples de n objetos distintos, ou seja, o número de ordens em que podemos colocar n objetos é $P_n=n!$.

Uma generalização desse resultado é o seguinte:

Permutações com repetição: O número de modos que podemos colocar em fila n objetos, onde n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a $a_2, ..., n_r$ são iguais a a_r é igual a $P(n; n_1, n_2, .., n_r)=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$.

Outra pergunta importante é:

Combinações simples: De quantos modos podemos selecionar k objetos distintos entre n objetos distintos dados?

Resposta: O número de combinações simples de n tomados k a k, ou seja, o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto de n elementos é igual a $C_n^k=\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!},\ 0\leq k\leq n$.

Observação: Seja $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ um conjunto com n elementos. É fácil ver que a cada subconjunto B de A, com k elementos, $0\leq k\leq n$, correponde um subconjunto, o complementar de B em relação a A, com $n-k$ elementos.

Portanto segue que: $\dbinom{n}{k}=\dbinom{n}{n-k}$, para todo $0\leq k\leq n$.

Mais dois resultados importante:

O número de soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m$ é dado por C_{m-1}^{r-1}.

Combinações Completas: O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m$ é dado por $CR_r^m = C_{m+r-1}^{r-1} = C_{m+r-1}^{m}$.

Definição:(*segundo dicionário Aurélio*) **Anagrama** é uma palavra ou frase formada pela transposição das letras de outra palavra ou frase.

Anagrama: do grego ana = "voltar"ou "repetir"+ graphein = "escrever".

Um exemplo conhecido é o nome da personagem Iracema, anagrama de América, no romance de José de Alencar.

Agora alguns probleminhas:

Problema 24.

Um número é dito *peroba* se possui pelo menos dois dígitos vizinhos com a mesma paridade. Quantos números *perobas* de cinco dígitos existem?

Problema 25.

No campeonato interplanetário de futebol, cada vitória vale três pontos, cada empate vale um ponto e cada derrota vale zero ponto. Um *resultado* é uma vitória, empate ou derrota. Sabe-se que o Lanoicanretni não sofreu nenhuma derrota e tem 16 pontos, mas não se sabe quantas partidas esse time jogou.

Quantas sequências ordenadas de resultados o Lanoicanretni poderia ter obtido? Representando vitória por V, empate por E e derrota por D, duas possibilidades por exemplo, são (V,E,E,V,E,V,V,E) e (E,V,V,V,V,V).

Problema 26.

Quantos são os anagramas da palavra PERIGOSA em que as quatro vogais aparecem em ordem alfabética?

(As quatro vogais não precisam ficar em posições consecutivas.)

Problema 27.

Quantos são os anagramas da palavra CARAGUATATUBA? Dessas quantas começam por vogal?

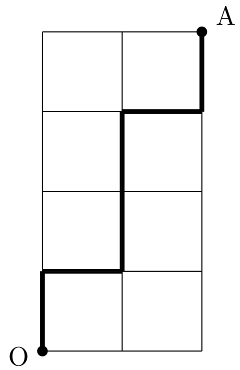
A seguir vamos mostrar que o número de combinações completas pode ser encontrado usando-se um diagrama de ruas e quadras.

Problema 28.

Para $r, m \geq 1$ fixados, considere mais uma vez a pergunta: de quantas maneiras pode-se expressar $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m$, onde os x_i são inteiros não negativos?

Por exemplo, de quantas maneiras pode-se escrever $x_1 + x_2 + x_3 = 4$? Algumas possibilidades são: 1+3+0=4, 0+1+3=4, 1+2+1=4, etc.

Já enunciamos anteriormente a resposta para esta questão, mas é possível usar um diagrama de ruas e quadras para resolver este problema. Cada maneira de escrever $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m$ pode ser visualizada como uma trajetória, cada x_i representando o número de passos para cima. Por exemplo,

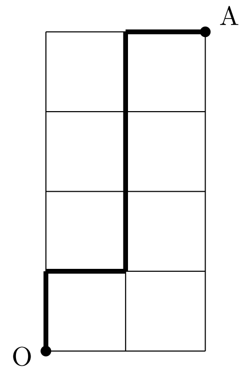


$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_3 = 1$

$1 + 2 + 1 = 4$



$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

$x_3 = 0$

$1 + 3 + 0 = 4$

(a) Conte desta maneira o número de diferentes soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, onde cada x_i é inteiro não negativo.

(b) Quantas diferentes combinações de moedas de 1, 5, 10, 25 e 50 centavos pode um cofrinho conter, sabendo que ao todo ele contém 20 moedas?

Mais alguns problemas...

Problema 29.

Esmeralda, a digitadora, tentou digitar um número de seis algarismos, mas dois algarismos não apareceram (a digitadora deve ter se esquecido ou as teclas não funcionaram). O que apareceu foi 20046.

Quantos são os números de sete algarismos que ela pode ter tentado digitar?

Problema 30.

Dizemos que uma palavra Q é *quase-anagrama* de outra palavra P quando Q pode ser obtida retirando-se uma letra de P e trocando a ordem das letras restantes, resultando em uma palavra com uma letra a menos do que P. Um quase-anagrama pode ter sentido em algum idioma ou não. Por exemplo, RARO, RACR e ARCO são quase-anagramas de CARRO. Quantos são os quase-anagramas da palavra PALAVRA que começam com A?

Problema 31.

De quantas maneiras podemos colocar, em cada espaço abaixo, um entre os algarismos 4, 5, 6, 7, 8, 9, de modo que todos os seis algarismos apareçam e formem, em cada membro, números de dois algarismos que satisfazem a dupla desigualdade?

$$\_\,\_ > \_\,\_ > \_\,\_\ .$$

Problema 32.

Cinco amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, devem formar uma fila com outras 30 pessoas.

De quantas maneiras podemos formar esta fila de modo que Arnaldo fique na frente de seus 4 amigos?

(Os amigos não precisam ficar em posições consecutivas.)

Problema 33.

A fábrica *Delícias Paraibanas* produz 8 tipos de trufas: Açaí (A), Brigadeiro (B), Caju(C), Damasco(D), Goiaba(G), Morango(M), Nozes(N) e Passas (P). Essas trufas são vendidas em caixas com 20 unidades.

(a) Sabendo que é possível encontrar caixas com um único sabor ou sortido, quantas caixas diferentes podem existir?

(b) Sabendo que em cada caixa há pelo menos uma trufa de cada tipo, quantas caixas diferentes podem existir?

(c) Sabendo que em cada caixa há pelo menos três trufas de brigadeiro, quantas caixas diferentes podem existir

(d) Sabendo que cada caixa contém no mínimo três e no máximo sete trufas de caju, quantas caixas diferentes podem existir?

Observação Nos itens (c) e (d) não é necessário que haja todos os tipos nas caixas.

Problema 34. (Oitava Questão da OBM Sênior de 1992)

Em um torneio de xadrez cada jogador disputou uma partida com cada um dos demais participantes. A cada partida, havendo o empate, cada jogador ganhou $1/2$ ponto; caso contrário, o vencedor ganhou 1 ponto e o perdedor 0 pontos. Participaram homens e mulheres e cada participante conquistou o mesmo número de pontos contra homens que contra mulheres. Mostre que o número total de participantes é um quadrado perfeito.

Agora iniciamos uma lista de problemas envolvendo somas em combinatória. Daremos soluções combinatórias e outras utilizando, por exemplo, o binômio de Newton. Começamos com um resultado clássico.

Problema 35.

O objetivo desta questão é provar de duas maneiras diferentes a identidade

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n \ .$$

(a) *Demonstração combinatória*: Considere um conjunto com n elementos. Primeiro determine a quantidade de subconjuntos desse conjunto. Depois calcule a quantidade de subconjuntos com nenhum elemento, com um elemento, com dois elementos, ..., com $n-1$ elementos, com n elementos. Compare os resultados obtidos.

(a) Aplique o Binômio de Newton para a expressão $\big(1+x\big)^n$. Faça $x=1$.

Problema 36.

O objetivo deste exercício é dar duas demonstrações diferentes para a identidade

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}.$$

(a) *Demonstração combinatória*: Considere o conjunto de todas as possíveis comissões tendo uma pessoa designada para presidente, que se pode formar a partir de um conjunto de n pessoas (uma comissão pode ter um número qualquer de pessoas, de 1 a n). Conte este conjunto de comissões de duas maneiras diferentes e compare os resultados. Um método é, depois de escolhida a comissão, escolher o presidente entre seus membros. Outro é escolher primeiro uma pessoa para ser o presidente e depois escolher o restante da comissão. Use o Problema 35.

(b) Considere o binômio de Newton $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, derive em relação a x e depois faça $x=1$.

Problema 37.

O objetivo deste exercício é dar duas demonstrações diferentes para a identidade

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

(a) *Demonstração combinatória*: Considere o conjunto de todas as possíveis comissões tendo uma pessoa designada para presidente e uma para secretário, podendo a mesma pessoa acumular os dois cargos, que se pode formar a partir de um conjunto de n pessoas (uma comissão pode ter um número qualquer de pessoas, de 1 a n). Conte este conjunto de comissões de duas maneiras diferentes e compare os resultados. Um método é, depois de escolhida a comissão, escolher o presidente e o secretário entre seus membros. Outro é escolher primeiro uma pessoa para ser o presidente, uma pessoa para secretário e depois escolher o restante da comissão. Use o Problema 35.

(b) Tome a expressão $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, derive em relação a x, depois multiplique a expressão obtida por x, derive mais uma vez em relação a x e faça $x = 1$.

A questão abaixo é consequência imediata das duas anteriores, mas pode ser provada de forma independente.

Problema 38.

O objetivo deste exercício é dar duas demonstrações diferentes para a identidade

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

(a) *Demonstração combinatória:* Considere o conjunto de todas as possíveis comissões tendo uma pessoa designada para presidente e outra para vice-presidente, que se pode formar a partir de n pessoas (portanto as comissões vão conter ao menos 2 pessoas). Conte essas comissões de 2 maneiras diferentes e compare os resultados. Um método é, depois de escolhida a comissão, escolher o presidente e o vice-presidente entre seus membros. Outro é escolher primeiro uma pessoa para ser o presidente e outra para vice-presidente e escolher depois o restante da comissão. Use o Problema 35 e a mesma ideia da questão anterior.

(b) Tome a expressão $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, derive duas vezes em relação a x e depois faça $x = 1$.

Problema 39.

Prove a identidade $\quad n\binom{2n-1}{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}^2.$

(a) *Demonstração combinatória:* Dados um conjunto de n homens e n mulheres, conte de duas maneiras diferentes todas as comissões de n pessoas com um homem escolhido para ser o presidente da comissão.

(b) *Utilizando o binômio de Newton:* Considere a igualdade $(1+x)^n(1+y)^n = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right] \cdot \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} y^j\right]$, derive em relação a x, faça $y = x$ e, finalmente, identifique o coeficiente de x^{n-1} dos dois lados da igualdade.

Problema 40.

O objetivo desta questão é provar a identidade de Lagrange

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

Basta mostrar que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n}.$$

(a) Considere o problema de formar comissões de n pessoas a partir de um grupo de n homens e n mulheres. Conte essas comissões de duas maneiras diferentes: primeiro diretamente e depois dividindo em casos, conforme o número de mulheres que a comissão contém. Comparando os resultados, obtenha nova demonstração de (3).

(b) Aplique o Binômio de Newton a ambos os lados da igualdade $\left(1+x\right)^{2n}=\left(1+x\right)^n\left(1+x\right)^n$. Comparando a expressão do coeficiente de x^n de ambos os lados, obtenha a identidade acima. Em seguida use a simetria dos números combinatórios para deduzir a identidade de Lagrange.

O problema anterior é uma consequência imediata do exercício abaixo, onde usamos a notação $|X|$ para designar a quantidade de elementos de um conjunto X.

Problema 41.

O objetivo desta questão é dar três demonstrações diferentes para o fato de que sempre que $n\geq r$ e $m\geq r$, vale a seguinte identidade (Convolução de Vandermonde), descoberta pelo matemático Alexandre-Théophile Vandermonde no século XVIII.

$$\binom{n+m}{r}=\binom{n}{0}\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}+\binom{n}{2}\binom{m}{r-2}+\cdots\cdots+\binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

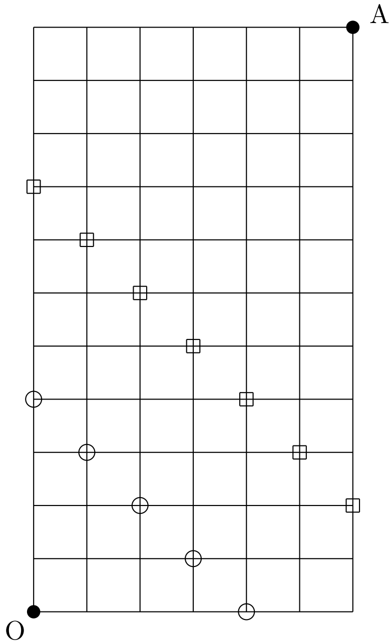
(a) *Demonstração combinatória:* Considere um grupo com n homens e m mulheres. Calcule, de duas maneiras diferentes, a quantidade de comissões de tamanho r possíveis de serem formadas.

(b) *Demonstração utilizando o Binômio de Newton:* Considere $(1+x)^{n+m}=(1+x)^n\,(1+x)^m$, expanda os três binômios e compare o coeficiente de x^r nos dois lados da igualdade.

(c) O objetivo deste item é mostrar uma maneira diferente de provar a mesma identidade acima *usando um diagrama de ruas e quadras.* Para simplificar, só se pede que você faça um caso particular.

No diagrama de quadras e ruas abaixo, considere todos os caminhos (de mínima distância) de O para A (na figura, caminhos indo sempre para cima ou para a direita) e conte-os dividindo em casos, de acordo com o ponto onde cruzam a diagonal com os pontos marcados com quadrados, correspondendo às esquinas cuja distância de O é 8 quadras. Considerando todos os casos possíveis, obtenha um caso particular da identidade da questão anterior.

(d) Novamente, dividindo todos os caminhos (de mínima distância) de O para A em casos, de acordo com o ponto em que cruzam a diagonal de pontos circulados, obtenha uma igualdade similar à obtida na parte (a).



Uma identidade bem interessante surgida numa olimpíada chinesa é a que enunciamos a seguir. Lembramos que $\lfloor x \rfloor$ denota o único inteiro k tal que $k \le x < k+1$.

Problema 42. (**Olimpíada Chinesa – 1994**)

Prove a identidade utilizando um raciocínio combinatório $\displaystyle\binom{2n+1}{n} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor}$.

A identidade a seguir é conhecida como identidade combinatória de Fermat.

Problema 43.

Forneça um argumento combinatório para estabelecer a identidade: $\displaystyle\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1}$.

Problema 44.

Forneça um argumento combinatório para estabelecer a identidade: $\displaystyle\binom{n}{i} 2^{n-i} = \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{i}, \ i \le n.$

Problema 45.

Considere o lançamento de um dado n vezes e seja S a soma dos valores obtidos nos lançamentos. Seja x_i o resultado obtido no i-ésimo lançamento. Mostre que o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S$, com $1 \le x_i \le 6$, é igual a

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{S-n}{6} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{S-6k-1}{n-1} .$$

Problema 46.

Um fazendeiro que dispõe de R$ 60.000,00 pretende gastar essa importância na compra de cavalos e bois. Sabendo que cada cavalo custa R$ 700,00 e cada boi R$ 650,00, obtenha uma equação diofantina que modele este problema.

(a) Quantas e quais são as soluções desse problema?

(b) Qual o número de bois e cavalos que ele deve comprar se quiser comprar a maior quantidade de animais?

Problema 47.

Sejam a e b inteiros positivos relativamente primos. Mostre que a equação $ax + by = c$ tem soluções inteiras não negativas para todo $c > ab - a - b$. E se $c = ab - a - b$?

Problema 48.

(a) Um dado perfeito tem as faces marcadas com 1,1,2,2,3,3. O dado vai ser lançado duas vezes. Qual a probabilidade de que a soma dos resultados seja par?

(b) E se o dado for lançado n vezes e n começar a crescer, o que acontece com esta probabilidade?

Sugestão: começar a calcular a probabilidade nos casos $n = 3, 4, 5$ e fazer uma conjectura.

Os dois problemas abaixo são de análise, mas resolvi acrescentá-los pois acho muito interessantes.

Problema 49.

Sabemos que a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Agora consideremos o conjunto $A_9 = \{n \in \mathbb{N} : n$ não possui o algarismo 9 na sua representação decimal$\}$.

Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n \in A_9} \frac{1}{n}$ converge e que $\displaystyle 8,1 \leq \sum_{n \in A_9} \frac{1}{n} \leq 81.$

Agora um problema que generaliza o anterior.

Problema 50.

Seja $A_i = \{n \in \mathbb{N} : n$ não possui o algarismo i na sua representação decimal. Mostre que:.$\}$

(a) A série $\displaystyle\sum_{n \in A_i} \frac{1}{n}$ converge.

(b) A série $\displaystyle\sum_{n \in A_i} \frac{1}{n^p}$ converge se, e somente se, $p > \log_{10} 9$.

Referências

[1] ANDREESCU, T.; FENG, Z. - *102 Combinatorial Problems*. Birkhäuser Boston, 2002.

[2] COUTINHO, S. C. - *Números Inteiros e Criptografia RSA*. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[3] GRIMALDI, R. P. - *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction*. Addison Wesley, 2004.

[4] HEFEZ, A. - *Elementos de Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[5] HOLANDA, B.; AUGUSTO, C.; BARBOSA, S.; LIMA, Y. - *Treinamento Cone Sul 2007*. Fortaleza: Realce, 2007.

[6] KOSHY, T. - *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. John Wiley & Sons, 2001.

[7] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. - *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[8] LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. - *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[9] MOREIRA, C.; MOTTA, E.; TENGAN, E.; AMÂNCIO, L.; SALDANHA, N; RODRIGUES, P. - *Olimpíadas Brasileiras de Matemática • 9ª a 16ª, Problemas e Soluções*. Rio de Janeiro: SBM/OBM, 2003.

[10] MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. - *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[11] ROSEN, K. - *Elementary Number Theory and its applications*. Addison Wesley, 2005.

[12] ROSEN, K. - *Matemática Discreta e Suas Aplicações*. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

[13] SANTOS, A. L. - *Problemas Selecionados de Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2006.

[14] SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. - *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[15] STEFFENON, R. R.; MISTURINI, R. - *Uma Grosa de Problemas de Matemática*. Goiânia: III Bienal da SBM, 2006. (http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/misturini.steffenon.pdf)