V Bienal da SBM
Sociedade Brasileira de Matemática
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
18 a 22 de outubro de 2010

A construção, por Euclides, do pentágono regular

João Bosco Pitombeira de Carvalho *

1 Os polígonos regulares

As figuras e configurações que apresentam regularidades sempre despertaram interesse. As rosáceas, as frisas e os ladrilhamentos do plano têm sido amplamente explorados, ao longo dos séculos e em inúmeras cuturas, por artistas e decoradores, e estudados matematicamente, constituindo um belo exemplo da teoria dos grupos aplicada à geometria.

Entre as figuras importantes que apresentam regularidades destacam-se os *polígonos regulares*, centrais em geometria. A primeira proposição dos *Elementos* de Euclides mostra como construir um triângulo equilátero. O quadrado desempenha também um papel importante na Matemática grega, na qual um problema importante é o de "quadrar" uma figura, ou seja, construir um quadrado com área igual à da figura.

O pentágono regular era importante para os Pitagóricos, já no século VI a.E.C., visto ter sido o *pentagrama* regular, (o polígono regular estrelado de cinco lados) o símbolo da confraria pitagórica.

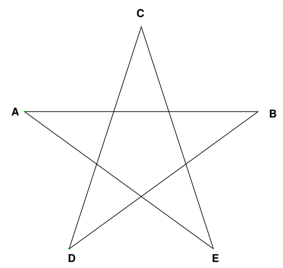

Figura 1: O pentagrama

Os pitagóricos conheciam também o fato de que a diagonal e o lado do pentágono são incomensuráveis. Isso pode ser visto levando em conta que as intersecções das diagonais do pentágono $ABCDE$ definem um novo pentágono, $EFGHK$, e assim sucessivamente. Se a diagonal e o lado de $ABCDE$ forem comensuráveis, o mesmo acontecerá com os lados e as diagonais de todos os pentágonos obtidos, e chega-se a uma contradição (Figura 2). Esse fato, juntamente com a familiaridade dos pitagóricos com o pentágono, levou von Fritz (1945) a propor que a existência de grandezas incomensuráveis foi descoberta utilizando o pentágono e sua diagonais, e não o quadrado e sua diagonal. No entanto, essa sua opinião não é a prevalescente entre os historiadores da Matemática.

Um dos pontos altos dos *Elementos* de Euclides é a construção, no Livro IV, do pentágono regular. Euclides precisa desse polígono no livro XIII, em que constrói os cinco poliedros regulares, para a construção do dodecaedro regular, cujos lados são pentágonos. Euclides utiliza somente a régua não graduada e o compasso, como aliás acontece em todas as construções efetuadas nos *Elementos*.

A procura de construções para os polígonos regulares foi um dos temas recorrentes entre os matemáticos. Quando não conseguiam fazer construções que obedecessem aos cânones euclidianos, conseguiam, pelo menos, construções aproximadas, ou usavam outros recursos além da régua e do compasso, haja vista a construção para o heptágono regular dada por Arquimedes e, bem mais tarde, entre outros, por Gauss.

*Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, jbpfcarvalho@gmail.com

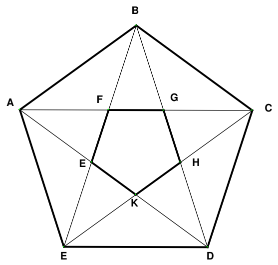

Figura 2: O pentágono e suas diagonais

O pentágono regular foi estudado não só por Euclides, mas ao longo dos séculos. Um pouco depois dele, Ptolomeu, no *Almagesto*, apresentou uma construção para esse polígono.

A resposta definitiva sobre quais polígonos regulares podem ser construídos com régua e compasso foi dada somente no século XIX, por Gauss e Wantzel. O primeiro demonstrou, em 1796, que é possível construir com régua e compasso o polígono regular de 17 lados. Um pouco mais trade, em seu *Disquisitiones arithmeticae* [4] de (1801), provou que uma condição suficiente para que o polígono regular de n lados seja construtível com régua e compasso é que n seja da forma

$$n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_s,$$

em que todos os p_i são primos de Fermat, ou seja, primos da forma

$$p_i = 2^{2^{n_i}} + 1.$$

Como os primos de Fermat conhecidos aualmente são 3, 5, 17, 257 e 65537, é possível, em princípio, construir polígonos regulares com números de lados iguais a estes primos ou a produtos dos mesmos. O polígonos regulares com menos de 300 lados que podem ser construídos com régua e compasso são, portanto, os que têm

$$3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32,$$

$$34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128,$$

$$136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272$$

lados.

Gauss afirmou que sua condição era também necessária, mas isso só foi provado por Pierre Wantzel, matemático francês, em 1836 ([12]), em um trabalho em que demonstrou a impossibilidade de resolver os problemas da trissecção do ânngulo e da duplicação do cubo.

O critério de Gauss não nos dá um método para a construção de um polígono regular. O matemático alemão Johannes Erchinger forneceu uma construção explícita com régua e compasso para o polígono de 17 lados, em 1825 e Friedrich Julius Richelot propôs, em 1832, um método para construir o polígono de 257 lados, mas há dúvidas sobre sua validade (Veja Reich [9]).

2 Uma construção moderna do pentágono regular

São conhecidas várias construções para o pentágono regular, algumas das quais utilizam somente os instrumentos euclidianos. Em uma delas, muito conhecida, procede-se como a seguir para construir o pentágono regular inscrito no círculo de centro O e raio OB (Figura 3).

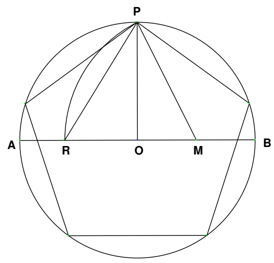

Figura 3: Uma construção do pentágono regular inscrito em um círculo

Seja OP perpendicular ao diâmetro AB. Marque o ponto médio, M, de OB. Com centro em M e raio MP trace o arco de circunferência que corta AB em R. Então, RO será o lado do decágono regular inscrito no círculo de raio OB. Uma vez conhecido o lado do decágono regular, é imediato construir o pentágono, unindo os vértices do decágono dois a dois.[1]

Observe que todas as etapas desta construção podem ser efetuadas com régua e compasso.

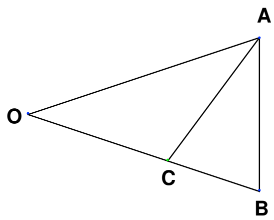

Figura 4: Observação crucial para a construção do pentágono regular inscrito em um círculo

Justificaremos inicialmente esta construção, seguindo o tratamento de Aaboe ([1], pp. 54-56. Veja também Aaboe [2]).

Seja, na Figura 4, o triângulo OAB, em que $AB = x$ é o lado do *decágono* regular inscrito no círculo de raio $OB = r$. Assim, o ângulo AOB mede 36º. Como o triângulo AOB é isósceles, os ângulos da base, ABO e OBA são iguais, e portanto medem 72º cada um. Com centro em A e raio $AB = x$, trace uma circunferência, que corta OB no ponto C. Então, o triângulo ACB é isósceles, e portanto o ângulo ACB mede, também, 72º. Assim, o ângulo CAB mede 36º, e portanto OAC é igual a 36º e o triângulo ACO é isósceles.

Decorre disso que $OC = AC = AB = x$. Segue-se então que os triângulos OAB e ABC são semelhantes, e temos que

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{r-x} \Longrightarrow x^2 + rx - r^2 = 0.$$

A única raiz positiva desta equação é

$$x = \frac{1}{2} r(\sqrt{5} - 1).$$

Voltemos à Figura 3. O triângulo POM é retângulo, e portanto

$$PM^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Longrightarrow PM = \frac{r}{2}\sqrt{5}.$$

Então,

[1]Euclides demonstra, na proposição XIII.10 dos *Elementos*, que os lados do decágono, pentágono e hexágono regulares inscritos no círculo de raio r formam um triângulo retângulo. Decorre disso que PR será o lado do pentágono regular.

$$RO = RM - OM = PM - OM = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1).$$

Assim, o segmento OR é o lado x do decágono regular. É então fácil construir o pentágono regular: é suficiente unir os vértices do decágono dois a dois.

Podemos fazer alguns comentários sobre o tratamento apresentado por Aaboe, o qual é matematicamente correto, mas que dá origem a várias observações, didáticas e, mais importantes, historiográficas.

Em primeiro lugar, no que diz respeito à metodologia de sua apresentação, Aaboe afirma simplesmente que é "mais conveniente" achar o lado do decágono regular, sem explicar o porquê disso. Mostraremos a seguir porque isso de fato "é mais conveniente". E deixa o leitor descobrir isso, da mesma maneira que muitos livros de Matemática irritam seus leitores com afirmações do tipo "é fácil ver que...".

Tentaremos mostrar a seguir porque é realmente mais conveniente partir do decágono regular.

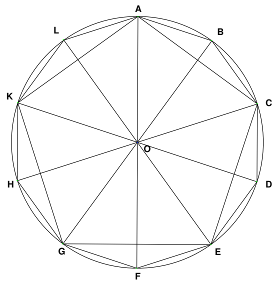

Figura 5: Uma construção do pentágono regular inscrito em um círculo

A Figura 5 mostra um pentágono e um decágono regulares inscritos em um círculo. É trivial verificar que se soubeermos construir o decágono podemos construir o pentágono, unindo os vértices do decágono dois a dois. É também verdade que a partir do pentágono podemos construir o decágono. Aliás, se for possível construir com régua e compasso o polígono regular de n lados, é possível, imediatamente, construir o polígono regular de $2n$ lados, e reciprocamente, a construção deste último permite construir aquele.[2]

Por que construir o decágono regular e não, diretamente, o pentágono regular?

Na Figura 5, os ângulos DOE, EOF, FOG, $\ldots$, COD são iguais, pois são os ângulos centrais do decágono regular $ABCDEFGHKL$.

Por outro lado, o ângulo ODE é igual ao ângulo KDE, e assim é igual a metade do arco $KHGFE$. Como este arco é igual a quatro vezes o arco DE, vemos que o ângulo ODE é igual a duas vezes o arco DE, ou seja,

$$\widehat{ODE} = 2 \times \widehat{DOE}.$$

Assim, no triângulo isósceles ODE, cada ângulo da base é igual ao dobro do ângulo do vértice. Portanto, para construir o decágono regular inscrito no círculo de raio R, é suficiente construir um triângulo isósceles ABC em que os ângulos da base são, ambos, iguais a duas vezes o ângulo do vértice e, em seguida, inscrever no círculo um triângulo DEF com ângulos iguais aos do triângulo ABC (Veja a Figura 6).

O ponto crucial usado por Euclides é que (Veja a Figura 5) no triângulo isósceles OAB o ângulo do vértice é igual à metade dos ângulos da base. Toda a construção apresentada por Euclides tem por objetivo construir um triângulo com esta propriedade.

Como mostra Aaboe, o fato de os triângulos OAB e ACB serem semelhantes (Figura 4) acarreta facilmente que o raio do círculo, OB, está dividido por C em meia e extrema razão. Como Euclides não usa semelhança,

[2]De maneira mais geral, como já conhecido por Euclides, se r e s forem numeros naturais relativamente primos e soubermos construir, respectivamente, os polígonos com r e s lados, é então possível construir o polígono com rs lados.

pois sua construção do pentágono regular é feita no Livro IV dos *Elementos*, antes do estudo das proporções e da semelhança (respectivamente Livros V e VI dos *Elementos*, ele usa a Proposição II.11, que lhe permite evitar a Proposição VI.11, a qual mostra como dividir um segmento em meia e extrema razão. Lembre-se de que Aaboe chega à mesma conclusão usando semelhança de triâgulos. Várias propriedades interessantes deste triângulo podem ser vistas em Reisz, [9].

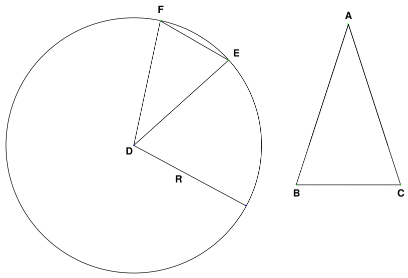

Figura 6: Uma construção do pentágono regular inscrito em um círculo

Em segundo lugar, temos problemas de historiografia. Aaboe salienta, desnecessariamente, que estamos lidando com ângulos de 72º e de 36º. Ora, medir ângulos dessa maneira é inteiramente evitado nos *Elementos*. Em verdade, isso era desconhecido na Matemática clássica grega. A única coisa necessária, e que explicamos acima, é a relação entre os ângulos ODE e DOE, obtida a partir dos resultados dos *Elementos* sobre ângulos inscritos em uma circunferência.

A apresentação de Aaboe é matemáticamente correta. O errado é tentar vesti-la de uma roupagem grega, dando ao leitor a impressão de que os gregos, em particular Euclides, pensavam da maneira mostrada por Aaboe.

Mais sério ainda na exposição de Aaboe, é seu uso da "álgebra geométrica" grega, que caiu em descrédito recentemente, por representar uma visão anacrônica da matemática dos gregos à luz dos desenvolvimentos modernos da Matemática, ou seja, sua aritmetização e algebrização crescentes. Esse anacronismo do texto de Aaboe reside em sua interpretação de *Elementos* II.6 como sendo uma maneira de resolver equações do segundo grau, esquecendo sua importância geométrica no contexto dos *Elementos*. Certamente *Elementos* II.5 e II.6 podem ser interpretadas dessa maneira, com um olhar "algebrizante" totalmente fora do contexto em que trabalhavam os matemáticos gregos, mas não se pode então afirmar que se está reproduzindo o que euclides fez nos *Elementos*.

Vemos, assim, que a correção matemática de um texto não é suficiente para que ele possa ser aceito sem restrições. Todo texto matemático tem um *subtexto* e um *contexto*, essenciais para nos ajudar a compreende-lo plenamente. Uma discussão ampla e profunda sobre essa interpretação errônea da Matemática grega encontra-se em Fried and Unguru, 2000. [3]

Antes de prosseguir para mostrar como Euclides constrói o pentágono regular, repitamos, resumidamente, a argumentação de Aaboe, para podermos contrastá-la com o procedimento de Euclides.

Aaboe chama o lado do decágono de x e de r o raio do círculo no qual desejamos inscrever o pentagono (Veja a Figura 4). Então, usando semelhança de triângulos e propriedades de seus ângulos, conclui que

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{r-x} \Longrightarrow x^2 + rx - r^2 = 0,$$

e assim

$$x = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1).$$

[3] A "álgebra geométrica" foi criada por Paul Tannery e Zeuthen (1886), no fim do século XIX. Difundiu-se muito devido à adesão de Heath, em sua influente e muito difundida tradução de Heiberg.

Em seguida, Aaboe mostra que a construção proposta para o lado do pentágono (em verdade do decágono) na Figura 3 prova que o segmento OR mede exatamente $x = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1)$. Assim, ele **é** o lado do decágono.

3 A construção do pentágono por Euclides

A construção do pentágono regular inscrito em um círculo é o ponto alto do Livro IV dos *Elementos* de Euclides. Convém salientar, mais uma vez, que esta construção não usa semelhança, se baseia inteiramente em equivalência de áreas. Uma vez descoberta, ela pode ser feita facilmente. As explicações que demos anteriormente sobre a razão de trabalharmos com o decágono regular constituem o fio de ariadne que nos permite seguir os passos de Euclides. Devemos frisar, além disso, que essa construção no Livro IV mostra bem a força do método de equivalência de áreas, usado amplamente por Euclides, até o Livro V, exclusive.

O pentágono regular (e o pentagrama regular) está intimamente associado com a divisão de um segmento em meia e extrema razão (*razão áurea*), e parece ter sido estudado desde o tempo dos pitagóricos. Em verdade, von Fritz, em 1945 ([11]) sugere que os pitagóricos descobriram a existência de grandezas incomensuráveis comparando a diagonal e o lado do pentágono regular, mas essa opinião tem poucos seguidores. Ele assinala que o pentagrama era o símbolo sagrado dos pitagóricos, e que portanto eles deveriam estar muito bem familiarizados com o pentágono.

Como Euclides, no Livro XIII dos *Elementos* constrói, com régua e compasso, os cinco poliedros regulares, ele não poderia deixar de construir anteriormente, com régua e compasso, o pentágono regular, visto que as faces do dodecaedro são pentágonos regulares.

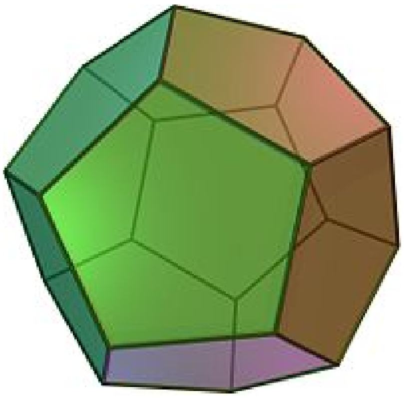

Figura 7: O dodecaedro regular

Euclides, como os matemáticos gregos em geral, não apresenta a motivação de seus resultados, e limita-se a apresentá-los encadeados logicamente. Assim, damos inicialmente um roteiro geral para a construção de Euclides, a fim de tornar a argumentação mais clara. Recomendamos, ao longo da leitura do texto, voltar a esse roteiro.

A construção propriamente dita é feita nas proposições 10 e 11 do Livro IV.

Euclides parte do fato facilmente percebido que em um decágono regular o triângulo isósceles com vértice no centro do círculo e cuja base é um dos lados do decágono tem o ângulo do vértice igual à metade de cada ângulo da base. Assim, para construir o lado do decágono regular Euclides constroi, usando IV.10, um triângulo isósceles com essa propriedade (Figura 8).

Para isso, Euclides necessita de duas linhas de argumentação. A primeira usando II.6 e sua consequência II.11, mostra como dividir um segmento AB por um ponto C tal que o retângulo formado por AB e CB é igual ao quadrado sobre AC (Mais tarde, em VI.11, essa proposição é reformulada como dividir um segmento em meia e extrema razão). Isso é feito e então, unindo os pontos D e C, obtemos dois triângulos: ABD e CBD (Figura 9).

Então, Euclides traça um círculo auxiliar, o qual passa pelos pontos A,C e D (Figura 10) e usando resultados

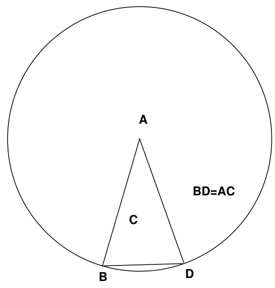

Figura 8: O ângulo $\hat{A}$ é metade do ângulo $\hat{B}$

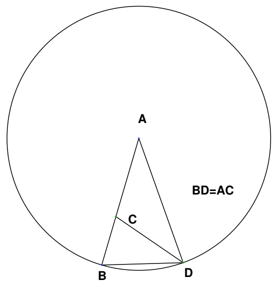

Figura 9: Os triângulos ABD e CBD

sobre secantes e cordas traçadas em um círculo, contidos em II.36 e III.37, mostra, enfim, que o triângulo ABD goza da propriedade procurada, ou seja, o ângulo do vértice é igual à metade de cada ângulo da base.

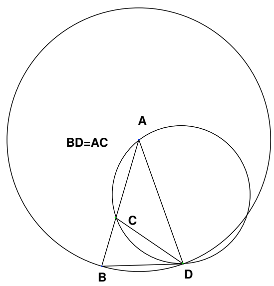

Figura 10: O círculo auxiliar que passa por A, C e D

Principiamos com a Proposição II.6, muito importante no conjunto dos *Elementos*, a qual usaremos livremente.

Proposição II.6: *Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais e for prolongada, o retângulo compreendido pela reta*[4] *toda e mais a adjunta, e pela mesma adjunta, juntamente com o quadrado sobre a metade da primeira reta, é igual ao quadrado sobre a reta formada por metade da reta mais a adjunta.*

Demonstração: Sejam C o ponto médio de AB e D, sobre o prolongamento de AB (Figura 11).

Desejamos mostrar que o retângulo de lados AD e DB, juntamente com o quadrado sobre CB é igual ao quadrado sobre CD.

Com lado CD construa o quadrado $CEFD$. Una D a E. Por B trace GHB paralela a CE ou a DF. Pelo ponto H, trace KLM paralela a AD ou a EF e por A trace AK paralela a CL ou a DM.

Então, como AC é igual a CB, o retângulo $AKLC$ é igual ao retângulo $CLHB$. Mas $CLHB$ é igual a $HGFM$,

[4]Lembramos que, para Euclides, *reta* significava *segmento de reta*.

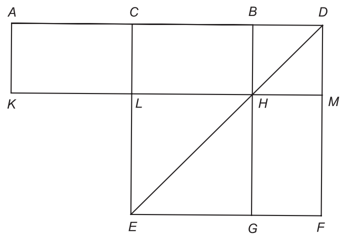

Figura 11: *Elementos* II.6

e portanto também $AKLC$ é igual a $HGFM$. A cada um desses retângulos adicione $CLMD$. Assim, $AKMD$ será igual a $CLHGFD$. Mas $AKMD$ é o retângulo formado por AD e DB, pois DM é igual a DB.

Então o retângulo de lados AD e DB é igual a $CLHGFD$. A cada um, adicione $LEGH$, que é igual ao quadrado sobre CB. Portanto o retângulo de lados AD e DB, juntamente com o quadrado sobre CB é igual a $CLHGFD$ e a $LEGH$.

Mas $CLHGFD$ juntamente com $LEGH$ formam $CEFD$, que é o quadrado sobre CD.

Portanto, o retângulo de lados AD e DB, juntamente com o quadrado sobre CB é igual ao quadrado sobre CD.

□

Em seguida, necessitamos do seguinte resultado

Proposição II.11: *Dividir uma reta dada de maneira que o retângulo formado pelo todo e por uma das partes seja igual ao quadrado sobre a outra parte.*

Ou seja, queremos determinar um ponto H sobre AB tal que o retângulo de lados AB e HB seja igual ao quadrado sobre AH (Figura 12). Mais tarde, nos *Elementos*, após expor a teoria das proporções de Eudoxo aplicada à Geometria, Euclides mostra que isso é dividir um segmento em meia e extrema razão.

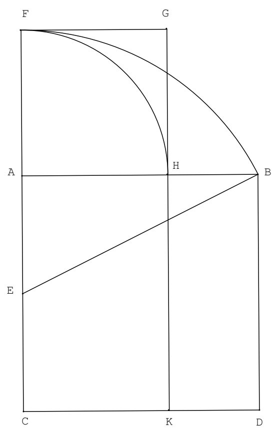

Figura 12: Euclides II.11

Construa o quadrado $ABDC$ e seja E o ponto médio de AC. Com centro em E e raio EB, descreva o arco de círculo que corta o prolongamento de CA em F. Com centro em A e raio AF, descreva o arco de circunferência que corta AB em H. Afirmamos que o ponto H é a solução do problema, ou seja, que o retângulo de lados AB e HB é igual ao quadrado sobre AH.

Queremos determinar um ponto H sobre AB tal que o retângulo de lados AB e HB seja igual ao quadrado sobre AH.

Apliquemos II.6 à reta AC, dividida ao meio por E, e prolongada com AF. Podemos então escrever que o retângulo de lados FC e FG juntamente com o quadrado sobre AE é igual ao quadrado sobre EF.

Mas, como $EF = EB$, temos que o retângulo de lados FC e FG, juntamente com o quadrado sobre AE, é igual ao quadrado sobre EB.

Pelo teorema de Pitágoras (I.47), o quadrado sobre EB é igual ao quadrado sobre AE juntamente com o quadrado sobre AB. Retirando o quadrado sobre AE do quadrado sobre EB, e do quadrado sobre AE juntamente com o quadrado sobre AB, temos que o retângulo de lados FC e FG é igual ao quadrado sobre AB.

Retirando do retângulo de lados FC e FG e do quadrado sobre AB o retângulo de lados AC e AH, o quadrado de lado AH e o retângulo de lados HB e BD serão iguais.

Então, o quadrado de lado AH é igual ao retângulo de lados HB e BD.

Como $BD = AB$, temos que o quadrado de lado AH é igual ao retângulo de lados HB e AB, e mostramos o que desejávamos.

□

Precisamos agora de alguns resultados sobre círculos, suas secantes e suas cordas, assunto tratado no Livro III dos *Elementos*.

Proposição III.36: *Se, de um ponto P no exterior de um círculo, traçarmos uma reta tangente ao círculo no ponto T e uma reta arbitrária que corta o círculo em R e S, então o retângulo de lados PR e PS é igual ao quadrado de lado PT.*

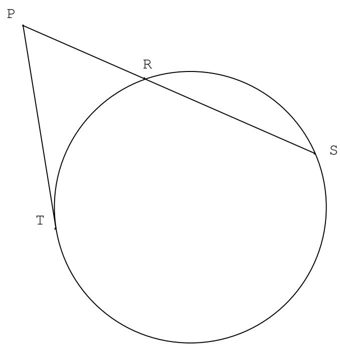

Figura 13: *Elementos* III.36

Há dois casos a considerar

1. A reta que passa por P passa pelo centro do círculo.

2. A reta que passa por P não passa pelo centro do círculo.

Demonstração do primeiro caso (Figura 14):

Apliquemos a proposição II.6 à reta RS, dividida ao meio por C e prolongada com PR. Temos então que o retângulo de lados PR e PS juntamente com o quadrado sobre RC é igual ao quadrado sobre PC.

Como RC e TC são raios do mesmo círculo, retirando do retângulo de lados PR e PS juntamente com o quadrado sobre RC e do quadrado sobre PC o quadrado sobre RC e sobre TC, temos que o quadrado sobre RC é igual ao quadrado sobre TC.

Segue-se então que o retângulo de lados PR e PS é igual ao quadrado sobre PC menos o quadrado sobre TC.

O teorema de Pitágoras (I.47) mostra que o quadrado sobre PC menos o quadrado sobre TC é igual ao quadrado sobre PT. Assim, o retângulo de lados PR e PS é igual ao quadrado sobre PT.

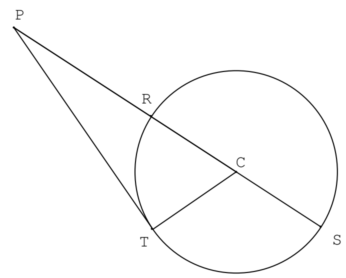

Figura 14: *Elementos* III.36, primeiro caso

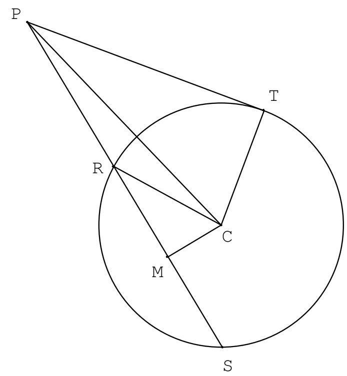

Figura 15: *Elementos* III.36, segundo caso

Demonstração do segundo caso (Figura 15):

Seja M o pé da perpendicular baixada de C sobre PS. Aplicando mais uma vez II.6 a RS prolongada por PR, temos que o retângulo de lados PR e PS juntamente com o quadrado sobre RM é igual ao quadrado sobre PM.

Adicionando o quadrado sobre CM ao retângulo de lados PR e PS juntamente com o quadrado sobre RM e ao quadrado sobre PM, temos que o retângulo de lados PR e PS juntamente com os quadrados sobre RM e CM é igual aos quadrados sobre PM e CM.

Mas, pelo teorema de Pitágoras, o quadrado sobre RM juntamente com o quadrado sobre CM é igual ao quadrado sobre RC e o quadrado sobre PM juntamente com o quadrado sobre CM é igual ao quadrado sobre PC.

Assim, o retângulo de lados PR e PS juntamente com o quadrado sobre RC é igual ao quadrado sobre PC.

Mas então estamos na situação do primeiro caso. Como o quadrado sobre RC é igual ao quadrado sobre TC, temos que o retângulo de lados PR e PS é igual ao quadrado de lado PC menos o quadrado de lado TC, ou seja, o quadrado de lado PT, o que queríamos provar.

□

Em seguida, demonstraremos que

Proposição III.37: *Se, de um ponto A fora de um círculo, forem traçadas duas retas, uma delas interceptando o círculo em B e F, e a outra interceptando o círculo em D, e se o retângulo de lados AB e AF for igual ao quadrado sobre AD, então AD é tangente ao círculo no ponto D.*

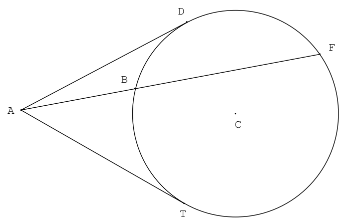

Figura 16: *Elementos* III.37

Demonstração:

Por A (Figura 16) traçamos AT, tangente ao círculo no ponto T. Então, pelo teorema precedente, sabemos que o retângulo de lados AB e AF é igual ao quadrado sobre AT. Então, o retângulo de lados AB e AF é igual ao quadrado sobre AD. Se os dois quadrados são iguais, seus lados serão iguais, ou seja, $AT = AD$. Mas como T e D são simétricos em relação à reta que passa por A e T, D será ponto de tangência, ou seja, AD é tangente ao círculo.

□

Para demonstrar o último passo antes de chegar à construção do decágono regular, usaremos dois resultados, sem prová-los:

Proposição III.22: *Os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito em um círculo são iguais, conjuntamente, a dois ângulos retos.*

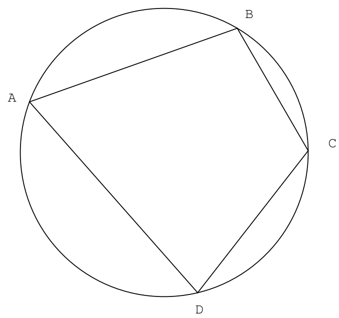

Figura 17: *Elementos* III.22

No quadrilátero $ABCD$ da figura 17, inscrito em um círculo, os ângulos $\widehat{BAD}$ e $\widehat{BCD}$ são iguais, conjuntamente, a dois ângulos retos. O mesmo se pode dizer dos ângulos $\widehat{ADC}$ e $\widehat{ABC}$.

Proposição III.31: *Em um círculo, o ângulo subtendido por um diâmetro é reto; o contido em um segmento de círculo menor do que um semi-círculo será maior do que um reto; e o contido em um segmento de círculo maior do que um semi-círculo será menor do que um reto.*

Na figura 18, o ângulo $\widehat{BAC}$, subtendido em uma semi-circunferência é reto, o ângulo $\widehat{ABC}$, contido no segmento de círculo ABC será menor do que um reto, e o ângulo $\widehat{ADC}$, subtendido no segmento de círculo ADC será maior do que um reto.

Necessitamos também do seguinte resultado

Proposição III.32: *o ângulo entre uma tangente e uma corda de um círculo é igual ao ângulo subtendido pela corda, do lado oposto à tangente.*

Com efeito, sejam EF a reta tangente e BD a corda. Trace o diâmetro AB do círculo, por B (Figura 19).

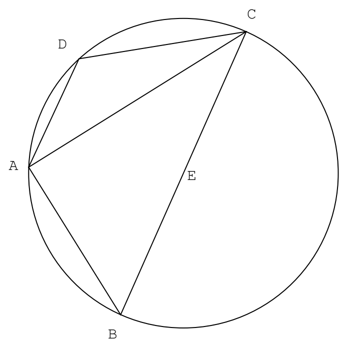

Figura 18: *Elementos* III.31

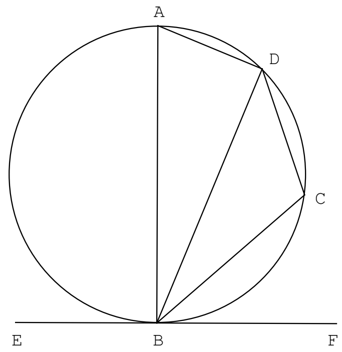

Figura 19: *Elementos* III.37

Escolha C arbitrário sobre o círculo. Trace AD, DC e BC.

O ângulo $\widehat{ADB}$, que subtende um semi-círculo é reto. Disso decorre que os ângulos BAD e ABD, juntos, são iguais a um reto, pois são ângulos internos no triângulo BAD.

Como ABF é um ângulo reto, ele será igual a BAD e ABD, juntos.

Subtraia de ambos o ângulo comum ABD; segue-se que o ângulo DBF é igual ao ângulo BAD.

□

Agora falta pouco para construirmos o decágono regular. O passo essencial é

Proposição IV.10: *Construir um triângulo isósceles em que cada ângulo da base é o dobro do ângulo no vértice.*

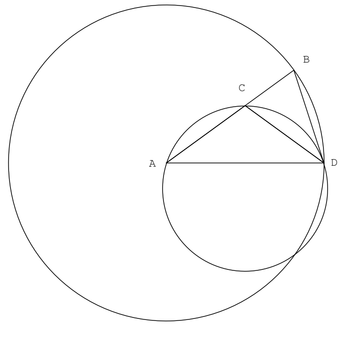

Figura 20: *Elementos* IV.10

Seja dado um segmento de reta AB (Figura 20). Determine o ponto C tal que o retângulo de lados AB, AC seja igual ao quadrado sobre CA. (Ou seja, usamos II.11.)

Trace o círculo de centro em A e raio AB. A partir de B, trace BD igual a AC.

Trace AD e DC e construa o círculo ACD circunscrito ao triângulo ACD.

Como o retângulo de lados AB e BC é igual ao quadrado sobre AC e AC é igual a BD, o retângulo de lados AB e BC é igual ao quadrado sobre BD

Como o ponto B é exterior ao círculo ACD, BA corta o círculo em C e A, e o retângulo de lados AB, BC é igual ao quadrado sobre BD, temos, pela proposição III.37, que BD é tangente ao círculo ACD no ponto D.

Então, por III.32, o ângulo BDC é igual ao ângulo DAC. Adicionemos o ângulo CDA a ambos. Segue-se que o ângulo BDA é igual aos ângulos CDA, DAC, juntos.

Mas no triângulo ACD o ângulo externo BCD é igual aos ângulos CDA, DAC, juntos; portanto o ângulo BDA é também igual ao ângulo BCD.

Portanto os três ângulos BDA, DBA, BCD são iguais entre si.

E como o ângulo DBC é igual ao ângulo BCD, o lado DB é também igual ao lado DC.

Mas BD por hipótese é igual a CA; então CA é também igual a CD, de maneira que o ângulo CDA é também igual ao ângulo DAC; e portanto os ângulos CDA, DAC são, juntos, o dobro do ângulo DAC.

Mas o ângulo BCD é igual aos ângulos CDA, DAC, juntos; portanto o ângulo BCD é também o dobro do ângulo CAD.

Mas o ângulo BCD é igual a cada um dos ângulos BDA, DBA; portanto cada um dos ângulos BDA, DBA é também o dobro do ângulo DAB.

Assim, o triângulo isósceles foi construído, com cada um dos ângulos da base BD igual ao dobro do terceiro.

$\square$

Resumimos a seguir, de maneira mais simbólica e compacta, o raciocínio de Euclides. No que segue, $\text{ret}(AB, BC)$ designa o retângulo de lados AB e BC e $\text{quad}(AC)$ representa o quadrado construído sobre o segmento AC.

O ponto C é tal que

$$\text{ret}(AB, BC) = \text{quad}(AC).$$

Como $AC = BD$, por construção, temos que

$$\text{ret}(AB, BC) = \text{quad}(BD).$$

Mas então, por III.37, BD é tangente ao círculo ACD.

Por III.32, temos que

$$\widehat{BDC} = \widehat{DAC} \Longrightarrow \widehat{BDC} + \widehat{CDA} = \widehat{DAC} + \widehat{CDA}.$$

Assim,

$$\widehat{BDA} = \widehat{DAC} + \widehat{CDA}.$$

Considere, no triângulo ACD o ângulo externo $\widehat{BCD}$. Então

$$\widehat{BCD} = \widehat{DAC} + \widehat{CDA} \Longrightarrow \widehat{BCD} = \widehat{BDA}. \tag{3.1}$$

Ora, como $\widehat{BDA} = \widehat{DBA}$, temos que

$$\widehat{BCD} = \widehat{BDA} = \widehat{DBA} \Longrightarrow \widehat{BCD} = \widehat{DBC} \Longrightarrow DB = DC.$$

Como $DB = CA$, segue-se que $CA = CD$, e portanto $\widehat{CAD} = \widehat{CDA}$.

Assim, usando (3.1

$$\widehat{CAD} + \widehat{CDA} = 2 \times \widehat{CAD} \Longrightarrow \widehat{BCD} = 2 \times \widehat{CAD},$$

e portanto

$$\widehat{BCD} = \widehat{BDA} = \widehat{DBA} = 2 \times \widehat{CAD}.$$

Então, no triângulo ABC cada ângulo da base é igual a duas vezes o ângulo do vértice.

□

Antes de fazermos a construção final, é necessário demonstrar

Proposição IV.2: *Inscrever em um círculo um triângulo com ângulos iguais, respectivamente, aos ângulos de um triângulo dado.*

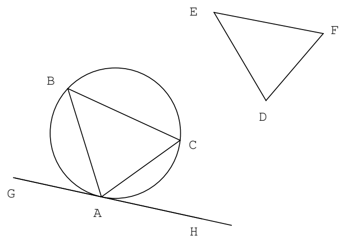

Figura 21: *Elementos* IV.2

Sejam dados o círculo e o triângulo DEF. Seja GH a tangente ao círculo, passando pelo ponto A. Construa o ângulo HAC igual ao ângulo DEF e o o ângulo GAB igual ao ângulo DFE.[5]

Trace BC. Então, por III.32, o ângulo HAC é igual ao ângulo ABC, portanto o ângulo ABC é igual ao ângulo DEF.

□

Analogamente, mostra-se que o ângulo ACB é igual ao ângulo DFE. Portanto, o ângulo BAC será igual ao ângulo EDF. Assim, foi inscrito um triângulo no círculo, com ângulos respectivamente iguais aos ângulos de um triângulo dado.

Podemos, enfim, demonstrar o resultado principal desta seção

Proposição IV.11: *Inscrever em um círculo um pentágono regular.*

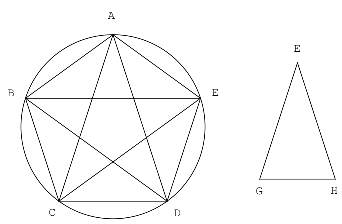

Figura 22: *Elementos* IV.2

[5]É possível fazer isso, como mostrado em I.23, que omitiremos, para não alongarmos nossa exposição.

Construa o triângulo EGH no qual cada ângulo da base é o dobro do ângulo do vértice. Inscreva, no círculo, o triângulo ACD, com o ângulo CAD igual ao ângulo em E, e os ângulos em G e H iguais, respectivamente, aos ângulos ACD e CDA. Assim, cada um dos ângulos ACD e CDA é o dobro do ângulo CAD.

Trace as bissetrizes dos ângulos ACD e CDA, respectivamente por CE, DB. Trace as retas AB, BC, DE, EA.

Então, como cada um dos ângulos ACD, CDA é o dobro do ângulo CAD, e foram divididos ao meio pelas retas CE e DB, os cinco ângulos DAC, ACE, ECD, CDB, BDA são iguais entre si.

Mas ângulos iguais subtendem arcos iguais, assim os arcos AB, BC, CD, DE, EA são iguais entre si.

Como esses arcos são iguais, as retas AB, BC, CD, DE, EA são iguais entre si.

Assim, o pentágono $ABCDE$ é equilátero.

Além disso, ele tem seus ângulos internos iguais entre si.

Com efeito, como o arco AB é igual ao arco DE, adicione o arco BCD a cada um deles; portanto, o arco $ABCD$ é igual ao arco $EDCB$.

Assim, o ângulo BAE é igual ao ângulo AED.

Pela mesma razão, cada um dos ângulos ABC, BCD, CDE é também igual a cada um dos ângulos BAE, AED. Assim, o pentágono $ABCDE$ tem todos seus ângulos internos iguais entre si.

Como já mostramos que ele tem seus lados iguais entre si, foi demonstrado que ele é regular. Assim, inscrevemos um pentágono regular no círculo dado.

$\square$

Obviamente, como assinalado por Hartshorne ([5], pp. 45-51) a construção de Euclides pode ser modificada, tornando-a mais eficiente e rápida. E suficiente aplicar IV.10 diretamente ao raio do círculo no qual desejamos inscrever o pentágono regular.

Referências

[1] AABOE, Asger. *Episodes from the early history of mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1964.

[2] AABOE, A. *Episódios da história antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.

[3] FRIED, Michael N. and UNGURU, Sabetai. *Apollonius of Perga's Conica*: *text, context, subtext. Mnemosyne. Supplementum*. 222. Leiden: Brill. xii, 499 p. 2001.

[4] GAUSS, Carl Friedrich. *Disquisitiones arithmeticae* (1801) *Werke*, vol 1, König Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1870. English translation by Arthur A Clarke, S.J. New Haven, Connecticut: Yale University Press, 1966.

[5] HARTSHORNE,Robin. *Geometry*: *Euclid and beyond*. New York: Springer, 2000.

[6] HEATH, T. L. *The thirteen books of the Elements of Euclid*, vol. 1 (Books I-II). New York: Dover, 1956.

[7] HEATH, T. L. *The thirteen books of the Elements of Euclid*, vol. 2 (Books III-IX). New York: Dover, 1956.

[8] HEATH, T. L. *The thirteen books of the Elements of Euclid*, vol. 3 (Books X-XIII). New York: Dover, 1956.

[9] REICH, Karin. "Die Entdeckung und frühe Rezeption der Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks und dessen geometrische Konstruktion durch Johannes Erchinger (1825)". In: *Mathesis*, *Festschrift zum siebzigsten Geburtstag von Matthias Schramm*. Hrsg. von Rüdiger Thiele, Berlin: Diepholz 2000, S. 101-118.

[10] REISZ, Daniel. "Un triangle bien intéressant". *Bulletin de l'APMEP*, 431, novembre-décembre 2000, pp. 543-649.

[11] von FRITZ, Kurt. "The discovery of incommensurability by Hipparcus of Metapontum". *Annals of mathematics*, second series, vol 46, n. 2 (April 1945), pp. 242-264.

[12] WANTZEL, Pierre Laurent. "Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas". *Journal de mathématiques pures et appliquées*. 1, 366-372, 1836.

[13] ZEUTHEN, H. G.. *Die Lehre der Kegelschnitte im Altertum*. Kopenhagen: Host, 1886.