

# CONSTRUÇÕES MATEMÁTICAS DA MÚSICA

TARCISIO ROCHA DOS SANTOS\* & GÉSSYKA DAMARIS SILVA DE SOUSA†

## Resumo

O mini curso *Construções Matemáticas da Música* destina-se a professores de matemática do Ensino Fundamental, Médio ou Superior, alunos do curso de licenciatura em matemática e até aos alunos do Ensino Médio que por ventura já conheceram o logaritmo. Iniciaremos com uma parte musical, esclarecendo alguns conceitos que serão abordados no decorrer do mini curso. Serão utilizados instrumentos musicais (ex.: violão e flauta) durante a apresentação para auxiliar a compreensão desses conceitos. Terminando essa parte musical, começa-se a divisão pitagórica da música - construção matemática em que só se usa frações. Por fim, vem a construção do Temperamento igual (escala musical que utilizamos hoje), a qual só foi possível após a criação do logaritmo. O mini curso visa explorar a curiosidade matemática e mostrar que há uma interdisciplinaridade entre matemática e música, tornando possível o aprendizado de assuntos bastante problemáticos para os alunos de matemática dos Ensinos Médio e Fundamental como frações e logaritmos, de uma forma curiosa e divertida, usando um tema que atualmente já é considerado como a arte mais popular do planeta, a música.

- **Palavras chaves:** matemática; música; frações; logaritmo.

## 1 Breves conceitos musicais

Antes de realizarmos as construções matemáticas propriamente ditas, precisamos abordar um pouco de conteúdo musical, evitando qualquer possível confusão no decorrer deste mini-curso.

- **Som:** Som é a sensação produzida no ouvido pelas vibrações de corpos elásticos. Uma vibração põe em movimento o ar na forma de ondas sonoras que se propagam em todas as direções simultaneamente. O som é representado por uma senóide, possuindo uma velocidade de oscilação ou frequência que é medida em uma unidade chamada Hertz (oscilações por segundo). As principais características do som são:

Altura (determinada pela frequência das vibrações); Duração (determinada pelo tempo de emissão do som); Intensidade (grau do volume sonoro) e Timbre (considerado a "cor" do som de cada instrumento ou voz, é derivado da intensidade dos sons harmônicos que acompanham os sons principais).

(MED, 1996, p. 12)

- **Notas musicais:** Nas nossas músicas, são usados sons regulares denominados notas, havendo uma manutenção de determinados intervalos entre essas notas. As notas são obtidas com o auxílio de instrumentos musicais. Elas são divididas em 12, onde 7 são ditas naturais: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si; e 5 são chamados acidentes: Dó#, Ré#, Fá#, Sol#, Lá#. O símbolo " #" que acompanha todos os acidentes se lê sustenido.

---

\*Universidade Federal de Pernambuco, DMAT, PE, Brasil, [tarcisio.rsantos@ufpe.br](mailto:tarcisio.rsantos@ufpe.br)

†Universidade Federal de Pernambuco, DMAT, PE, Brasil, [gessyka\\_bjs@hotmail.com](mailto:gessyka_bjs@hotmail.com)

- **Escala musical:** É uma seqüência ordenada das notas com relação à freqüência da vibração desses sons (geralmente ordenada das notas de menor freqüência (graves) às de maior freqüência (agudas)). Os acidentes são sons que se forem classificados quanto à altura, ficam entre algumas notas naturais, obtendo assim um intervalo único entre todos os sons. Se ordenarmos todas as notas quanto à altura (grave - agudo), teríamos: Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá# e Si. Dá-se o nome de Escala Cromática a essa escala formada pelas sete notas naturais mais os cinco acidentes.
- **Tom e semitom:** Tom e semitom são intervalos correspondentes à diferença entre sons da escala. Teremos um semitom entre dois sons consecutivos da escala (quanto à altura), sendo um tom composto por dois semitons. O termo TOM também pode se referir à nota em relação à qual se constrói uma escala qualquer, onde essa nota se torna o centro tonal no qual esse sistema se baseia. Neste último sentido, o tom pode também ser chamado de Tonalidade.

**Atividade 01:** Chama-se de Escala Diatônica à escala musical composta pelas notas naturais da seguinte forma: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó, onde a última nota da escala se repete à primeira. Os intervalos entre quaisquer duas notas da Escala Diatônica são iguais? Por quê?

## 2 Frações pitagóricas e os sons

### 2.1 O monocórdio

Segundo a lenda, ao passar por uma oficina, Pitágoras ouviu o som de cinco martelos batendo em uma bigorna. Interessado pelos belos sons produzidos por essas pancadas, inicialmente pensando que a qualidade do som era proveniente da força das mãos, ele trocou os martelos, mas cada martelo conservava o som que lhe era próprio. Após tirar um martelo que não estava soando muito bem, Pitágoras pesou os outros quatro martelos, tendo como resultado doze, nove, oito e seis unidades de peso. Essas razões matemáticas dariam início à construção do primeiro experimento científico da história, o monocórdio. (ver figura 2.1)



Figura 1: Monocórdio

Esse experimento foi realizado por Pitágoras, que observou que uma corda ao vibrar em uma determinada tensão produzia som, e que se variasse o comprimento da parte ativa da corda em relação a sua extremidade por meio de um cavalete móvel, obtinham-se diferentes sons. Pitágoras percebeu que ao dividir essa corda ao meio e ao vibrá-la, o som produzido por essa metade da corda era o mesmo som da corda anterior, só que mais agudo (musicalmente chamamos essa nota de oitava, que é formado por um intervalo de 12 semitons). A partir de outras tentativas, Pitágoras percebeu que as frações  $2/3$  e  $3/4$  da corda também soavam bem. Esses sons são respectivamente o que hoje chamamos de intervalo de quinta (sete semitons) e intervalo de quarta (cinco semitons). Esses três novos sons descoberto por Pitágoras a partir de frações da corda foram posteriormente denominados de consonantes pitagóricas. Os números utilizados nessas frações, que são 1, 2, 3 e 4, possuem uma soma 10, que para os pitagóricos era considerado um número mágico.

Os pitagóricos observaram que notas diferenciadas de uma oitava apresentavam certa semelhança, podendo ser definida como uma classe de equivalência, onde duas notas tornam-se equivalentes se o intervalo existente entre elas for um número inteiro de oitavas, podendo reduzir diferentes oitavas a apenas uma, possuindo assim notas equivalentes em todas as outras oitavas e na oitava origem.

(Abdounur, 2003, p.09).

Sempre teremos, portanto, sons diferentes (não equivalentes) e agradáveis se usarmos intervalos de quarta ( $3/4$  da corda) ou de quinta ( $2/3$  da corda).

## 2.2 Divisão pitagórica da música

Usando como ilustração teclas de um piano (ver figura 2.2), onde as teclas pretas simbolizam os acidentes e as teclas brancas as notas padrão, e sabendo que a ordem dessas notas segundo a altura é Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá# e Si, teremos:



Reparemos que temos 12 notas em uma oitava e que há uma equivalência entre a 1ª e a 13ª nota, entre a 2ª e a 14ª, e assim por diante, pois estão divididas por uma oitava.

**Atividade 02:** Lembrando que o intervalo de quinta contém 8 notas (7 semitons), mostre que é possível encontrar todas as notas do alfabeto musical, mesmo que em oitavas diferentes, usando apenas sucessivos intervalos de quinta. [Por questão de estética, tome como a primeira nota um Fá]

**Atividade 03:** Seria possível encontrar todas as notas usando apenas intervalos de quarta (5 semitons)? Matematicamente falando, quais seriam os intervalos (em relação à quantidade de semitons) onde isso não seria possível?

**Atividade 04:** Como continuação da atividade 02, calcule a fração que representa o comprimento da corda das sete primeiras notas encontradas anteriormente (que estão em várias oitavas).

Já temos, portanto, as frações que representam as notas musicais que formam a escala diatônica, mas estão em oitavas diferentes. Para termos a escala diatônica propriamente dita, precisamos transpor todas essas notas para uma única oitava!

**Atividade 05:** Começando pela nota Dó, e atribuindo a ela o comprimento 1, encontre todas as frações que representam cada nota da escala diatônica em apenas uma oitava, preenchendo, por fim, a tabela que segue. [Use a

| Notas                              | Dó  | Ré  | Mi      | Fá  | Sol | Lá  | Si      | Dó1 |
|------------------------------------|-----|-----|---------|-----|-----|-----|---------|-----|
| <i>Razão a partir de Dó</i>        |     |     |         |     |     |     |         |     |
| <i>Razão Intervalar Resultante</i> | 8/9 | 8/9 | 243/256 | 8/9 | 8/9 | 8/9 | 243/256 |     |

idéia de que além do intervalo de quinta, possuímos o de quarta e o de oitava, o que nos vai tornar possível sempre "voltar" a oitava original quando necessário]

Calculando o intervalo entre estas notas, encontraremos apenas dois valores: 8/9, que é o tom diatônico pitagórico e 243/256, que é o semitom diatônico pitagórico.

**Atividade 06:** Como continuação da atividade 02, calcule o comprimento relativo ao Fá# na oitava inicial. Em seguida, calcule o intervalo entre o Sol na oitava inicial (2/3) e o Fá# que acabamos de descobrir.

**Atividade 07:** Calcule agora o intervalo entre o Fá e o Fá# da oitava inicial que temos.

Algo deu errado! Temos duas distintas razões para o semitom. A esse novo valor do semitom entre o Fá e o Fá# dá-se o nome de semitom cromático pitagórico.

Em outras palavras, qualquer que seja o número de sucessivas quintas, o som resultante nunca poderá ser obtido por sucessivas oitavas ou sucessivas quartas aplicadas a este som inicial. Matematicamente falando:  $(3/4)^p \neq (2/3)^q \neq (1/2)^r$  para todo  $p, q, r$  pertencentes ao Conjunto dos Números Naturais.

"A aritmética baseada em ciclos de intervalos de quintas da escala pitagórica leva portanto à existência de semitons de tamanhos diferentes e de notas que não são equivalentes" (IAZZETTA, p.1). Poderíamos imaginar esse erro como sendo uma pequena "sobra" de frequência em uma determinada nota da escala se comparada às outras notas.

"Além do desajuste entre quintas e oitavas, outro inconveniente da teoria pitagórica foi à impossibilidade de alterar a tonalidade de uma música, visto que se utilizava apenas intervalos naturais, o que nunca trazia uma simetria entre as escalas." (SIMONATO, p. 3-4).

### 3 Temperamento igual e os logaritmos

Com o passar do tempo, surgiram muitas outras maneiras de se dividir os sons. Entretanto, a principal dificuldade era a de conseguir encontrar uma razão intervalar constante entre todas as notas da escala. Essa razão, de fato, foi encontrada e é dessa maneira que é dividida a música que conhecemos hoje. Essa "divisão igual" das notas (Temperamento Igual) só foi possível após a invenção do logaritmo. Veja como:

Para termos uma razão intervalar  $r$  constante entre todas as 13 notas da oitava (12 semitons constantes), e sabendo que a razão entre uma nota e sua respectiva oitava é 1/2, precisaríamos que  $r$  fosse um número tal que quando multiplicado doze vezes seguidas, partisse do número 1 ao número 2 (ou no número 1/2, dependendo da referência).

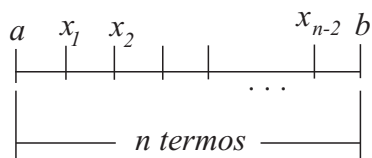
O logaritmo surgiu como ferramenta que facilita bastante alguns cálculos, reduzindo os problemas de seqüências geométricas em problemas de seqüências aritméticas, visto que ele transforma uma multiplicação em uma soma e

uma divisão numa subtração:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b) \qquad : \log(a/b) = \log(a) - \log(b)$$

No nosso problema, devemos intercalar geometricamente 12 razões  $r$  entre 1 e 2.

**Observação:** Podemos intercalar facilmente  $n$  números entre dois números  $a$  e  $b$  de forma aritmética da seguinte forma:



A razão  $p$  da sequência será:  $p = (b - a)/n$   $x_1 = a + p$  ;  $x_2 = x_1 + p$ ; ... ;  $b = x_{n-2} + p$  .

Ao somar o primeiro termo à razão, obtém o segundo, este segundo mais a razão, o terceiro, e assim sucessivamente até obtermos o  $n$ -ésimo termo.

**Atividade 08:** Vimos que o logaritmo transforma problemas geométricos em problemas aritméticos. Usando o que você conhece de logaritmos, tente encontrar a razão  $r$  que procurávamos de forma que nosso problema seja equivalente ao problema aritmético feito acima.

**Atividade 09:** Começando pelo Dó e tomando seu comprimento de corda sendo 1, mostre o valor que representa o comprimento de corda de cada uma das 12 notas, indo do Dó mais agudo para a mais grave.

## 4 Anexos

Foi a partir das sílabas iniciais dos versos da primeira estrofe do hino litúrgico em honra de São João Baptista que se formaram os nomes das notas musicais. Veja:

### Hino a São João Batista

Utqueant laxis  
Resonare fibris  
Mira gestorum  
Famuli tuorum  
Solve polluti  
Labi reatum  
Sancte Ioannes

### **Tradução:**

”Para que nós, teus servos, possamos elogiar claramente o milagre e a força dos teus atos, absolve nossos lábios impuros, São João”

O ut foi depois substituído por dó. O si é constituído pelas letras iniciais latinas de Sancte Johanes (São João: o j lia-se como i).

## Referências

- [1] ABDOURNUR, O. J. - *Matemática e Musica: o pensamento analógico na construção de significados.*, São Paulo: Escrituras, 1995.
- [2] MED, B. - *Teoria da Música*, Brasília: Musimed, 1996.
- [3] SIMONATO, A. - *A Relação Matemática e Música*, Artigo, disponível em: <[http://www.fafibe.br/revistaonline/arquivos/056-adriano-relacao\\_matematica\\_musica.pdf](http://www.fafibe.br/revistaonline/arquivos/056-adriano-relacao_matematica_musica.pdf)> Acessado em: 29 out. 2009.
- [4] IAZZETTA, F. - *Tutoriais de Áudio e Acústica.*, Disponível em: <<http://www.eca.usp.br/prof/iazzetta/tutor/acustica/escalas/pitagorica.html>> Acessado em: 9 fev. 2010