

Geometria Espacial com o GeoGebra

Lenimar Nunes de Andrade
UFPB – João Pessoa

10 de dezembro de 2014

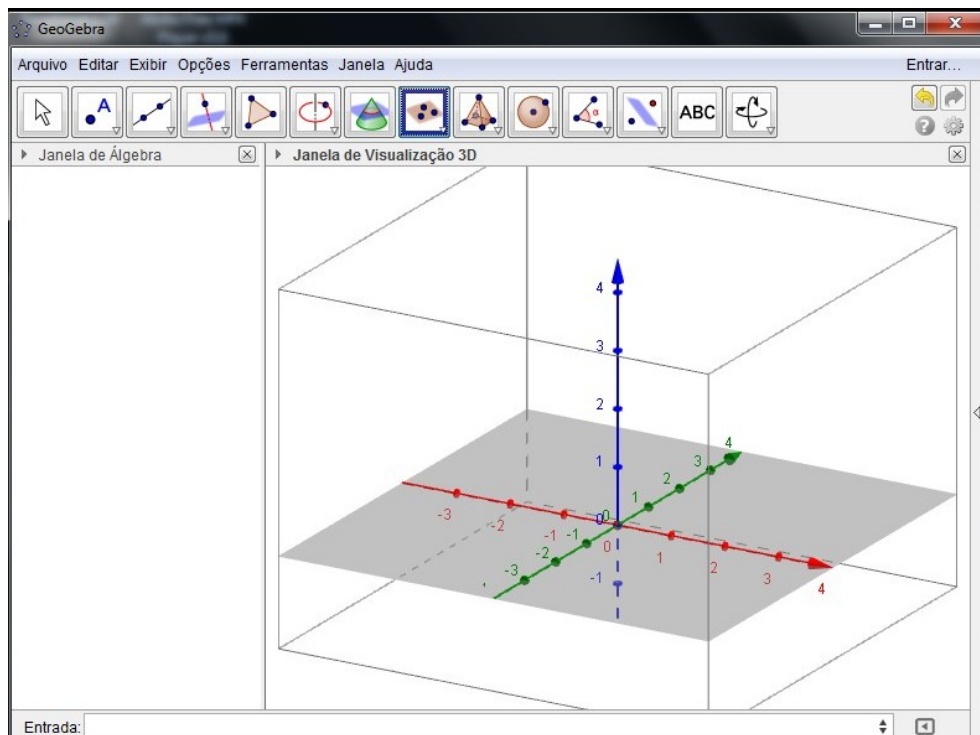
1 Introdução

O famoso programa GeoGebra, a partir de sua recente versão 5.0, pode ser usado como uma valiosa ferramenta nos estudos de Geometria Espacial. Como ele, diversos sólidos, superfícies e curvas tridimensionais podem ser construídos sem dificuldade, assim como ocorre com o cálculo de seus comprimentos, áreas, volumes e interseções.

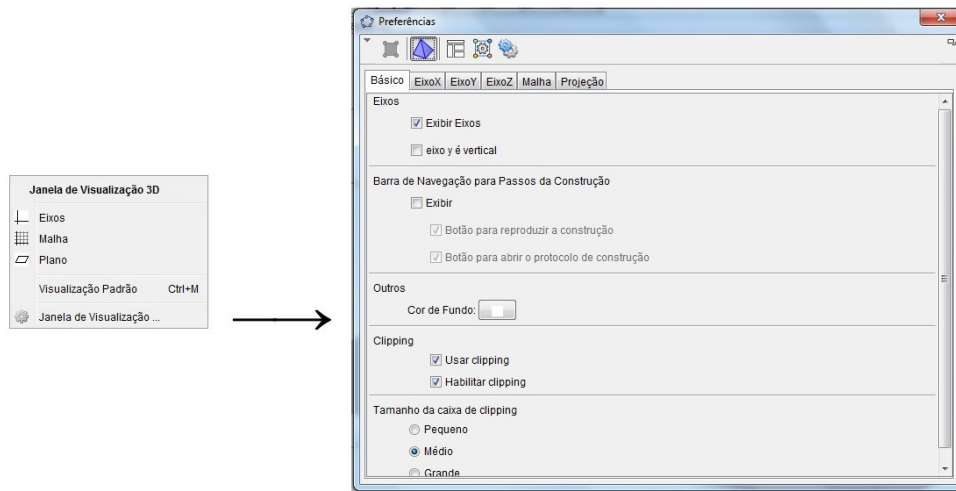
O GeoGebra está disponível gratuitamente na Internet e pode ser copiado a partir do endereço www.geogebra.org. Em razão da importância e da disponibilidade desse programa, o presente artigo fará uma breve explanação sobre os novos recursos, novos comandos e objetos tridimensionais acrescentados recentemente. Diversas atividades são propostas e que podem ser realizadas em sala de aula.

2 Visualização de Objetos Tridimensionais

No GeoGebra, há várias janelas de visualizações disponíveis. Uma delas é a “*Janela de Visualização 3D*” a qual, como o título já diz, deve ser usada para visualização de objetos tridimensionais tais como planos, pirâmides, cones, esferas etc. Essa janela pode ser mostrada tanto através da opção Exibir → Janela de Visualização 3D no menu principal do programa, que aparece na parte superior da tela, quanto pressionando-se simultaneamente as teclas **Ctrl** **Shift** **3**.

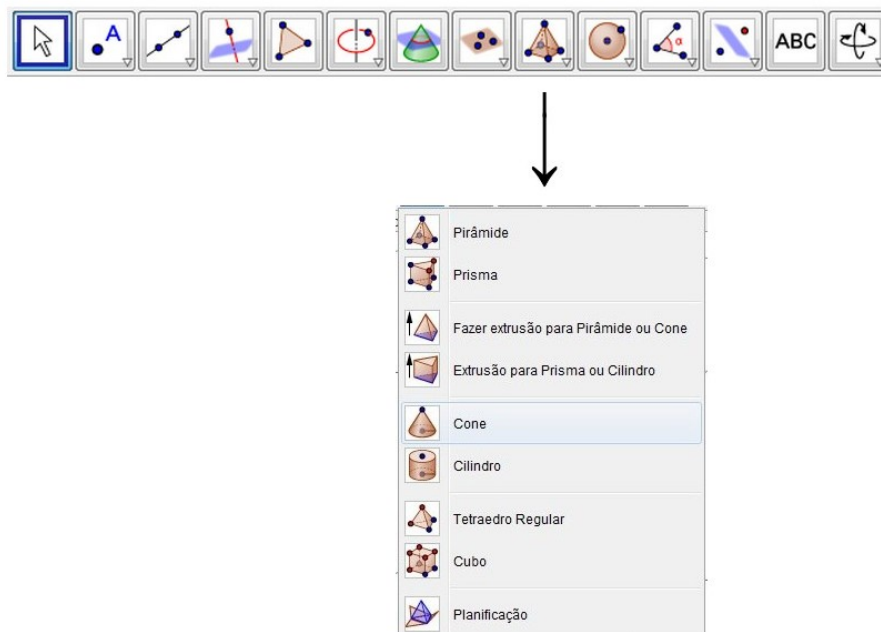


A configuração padrão da Janela de Visualização 3D inclui uma caixa, três eixos x , y e z e um plano $x0y$. Essa configuração pode ser alterada ao gosto do usuário. Se for dado um clique com o botão direito do *mouse*, aparecerá uma pequena janela intitulada “Janela de Visualização 3D” com opções de alteração. Nessa janelinha, aparece uma opção “Janela de Visualização” que leva a muitas opções de configuração da visualização.



Para eliminar a caixa da janela de visualização, deve-se desmarcar a opção “*Habilitar clipping*”. As partes dos objetos que não couberem dentro dessa caixa não são mostradas, a não ser que a opção “*Usar clipping*” seja desmarcada.

Na parte superior da tela, logo abaixo da linha do menu principal, aparece uma barra de ferramentas formada por vários ícones, cada um correspondendo a determinado tipo de ação do programa. Ao se clicar na maioria desses ícones, tem-se acesso a outras opções. Por exemplo, o nono ícone da esquerda para a direita dá acesso à seguinte lista:



3 Desenhando e movendo pontos

Ao se pressionar no segundo ícone da barra de ferramentas, intitulado “*Ponto*”, pode-se desenhar pontos na janela de visualização clicando-se com o *mouse* em cima de um plano tal como o plano $x0y$, que é mostrado como padrão. Nessa hora, o indicador do mouse assume o formato de

um “x” e, ao se clicar, é definido um ponto naquela posição. É possível também marcar um ponto em cima de uma reta ou de aresta de um polígono.

Um ponto também pode ser definido através de suas coordenadas x , y e z . Para isso, basta digitar o nome do ponto e suas coordenadas entre parênteses na janela de entrada, na parte de baixo da tela. Por exemplo, um ponto P localizado no eixo z , a uma altura de 4 unidades, pode ser definido escrevendo-se $P = (0, 0, 4)$ nessa janela.

Há dois movimentos permitidos para um ponto previamente definido: ao longo de uma reta (modo eixo z) ou ao longo de um plano (modo plano $x0y$). Deve-se dar um ou dois cliques no ponto para se definir o modo de movimento. Nessa hora, aparecem umas setas em torno do ponto,

 ou , e essas setas identificam o tipo de movimento permitido.

O último ícone da barra de ferramentas dá acesso a um menu onde são permitidas várias operações de visualização, tais como girar, mover, ampliar ou reduzir a janela de visualização 3D.

4 Novos comandos

Em geral, os diversos objetos tridimensionais podem ser definidos de duas maneiras: através dos menus da barra de ferramentas ou digitando-se comandos na janela de entrada. Esses comandos podem ser digitados em português. Os objetos recebem nomes (rótulos) quando vão sendo definidos e suas equações aparecem na Janela de Álgebra. Os nomes de objetos definidos podem ser referenciados por outros comandos definidos posteriormente.

Retas e planos

Reta[*ponto1*, *ponto2*] Reta que passa por dois pontos. Ex.: Reta[A, B]

Reta[*ponto*, *reta*] Reta paralela a outra e que passa por um ponto dado. Ex.: Reta[P, r]

Plano[*ponto1*, *ponto2*, *ponto3*] Plano que passa por três pontos. Ex.: Plano[A, B, C]

Plano[*reta1*, *reta2*] Plano que passa por duas retas. Ex.: Plano[r, s]

Plano[*polígono*] Plano que contém um polígono. Ex.: Plano[pol1]

Plano[*ponto*, *plano*] Plano que passa por um ponto e é paralelo a outro plano. Ex.: Plano[P, a]

Plano[*ponto*, *reta*] Plano que passa por um ponto e por uma reta. Ex.: Plano[Q, r]

Prismas e pirâmides

Prisma[*ponto1*, *ponto2*, ...] Prisma cujos vértices são dados, o último vértice em uma base diferente da base dos outros. Ex.: Prisma[A, B, C, D, E]

Prisma[*polígono*, *ponto*] Prisma com base definida por um polígono e um vértice da outra base. Ex.: Prisma[polig1, F]

Prisma[*polígono*, *altura*] Prisma com base e altura dadas. Ex.: Prisma[polig2, 4]

Pirâmide[*ponto1*, *ponto2*, ...] Pirâmide com vértices dados. Ex.: Pirâmide[A, B, C, D]

Pirâmide[*polígono*, *ponto*] Pirâmide com base definida por um polígono e vértice dado. Ex.: Pirâmide[pol1, V]

Pirâmide[*polígono*, *altura*] Pirâmide com base e altura dadas. Ex.: Pirâmide[pol2, 5]

Cilindros e cones

Cilindro[*curva, altura*] Cilindro com base e altura dados. Ex.: Cilindro[c, 5]

Cilindro[*ponto1, ponto2, raio*] Cilindro circular com centros das bases e raio dados. Ex.: Cilindro[c1, c2, 3]

CilindroInfinito[*reta, raio*] Cilindro circular ilimitado com eixo central e raio dados. Ex.: CilindroInfinito[r, 4]

Cone[*círculo, altura*] Cone circular com base e altura dados. Ex.: Cone[c, 5]

Cone[*ponto1, ponto2, raio*] Cone circular com base de centro no primeiro ponto, vértice no segundo ponto e raio dados. Ex.: Cone[P, Q, 3]

Cone[*ponto, reta, ângulo*] Cone circular ilimitado com centro da base, eixo central e ângulo (em radianos) entre o eixo e uma geratriz dados. Ex.: Cone[P, r, 0.3]

ConeInfinito[*ponto1, ponto2, ângulo*] Cone circular ilimitado com centro da base, eixo central e ângulo entre o eixo e uma geratriz dados. Ex.: ConeInfinito[P, Q, 0.4]

Esferas

Esfera[*ponto, raio*] Esfera com centro e raio dados. Ex.: Esfera[C, 2]

Esfera[*ponto1, ponto2*] Esfera com centro no primeiro ponto e que passa pelo segundo. Ex.: Esfera[C, P]

Sólidos de Platão

Cubo[*ponto1, ponto2*] Cubo com um aresta definida pelos pontos dados. Ex.: Cubo[A, B]

Tetraedro[*ponto1, ponto2*] Tetraedro com um aresta definida pelos pontos dados. Ex.: Tetraedro[A, B]

Ocataedro[*ponto1, ponto2*] Octaedro com um aresta definida pelos pontos dados. Ex.: Octaedro[A, B]

Dodecaedro[*ponto1, ponto2*] Dodecaedro com um aresta definida pelos pontos dados. Ex.: Dodecaedro[A, B]

Icosaedro[*ponto1, ponto2*] Icosaedro com um aresta definida pelos pontos dados. Ex.: Icosaedro[A, B]

Esses comandos dos sólidos de Platão constroem o sólido com umas das faces paralelas ao plano xOy , a não ser que seja fornecido um terceiro parâmetro que possa ser usado para se obter a direção de uma face. Ex.: Cubo[A, B, reta], Tetraedro[P, Q, plano]

Curvas e superfícies

Superfícies e curvas no espaço podem ser construídas através dos comandos “*Superfície*” e “*Curva*”, usando-se suas equações paramétricas.

Superfície[*f(u, v), g(u, v), h(u, v), u, a, b, v, c, d*] Superfície parametrizada por $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$, $a \leq u \leq b$, $c \leq v \leq d$.

Ex.: Superfície[u*cos(v), u*sen(v), v, u, -2, 2, v, 0, 6.29]

Curva[$f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, t , a , b] Curva parametrizada por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $a \leq t \leq b$. Ex.: Curva[$t \cdot \sin(3 \cdot t)$, $t \cdot \cos(3 \cdot t)$, $5 \cdot t$, t , -7 , 7]




O Gráfico de uma função de duas variáveis pode ser construído digitando-se na janela de entrada sua equação, por exemplo, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

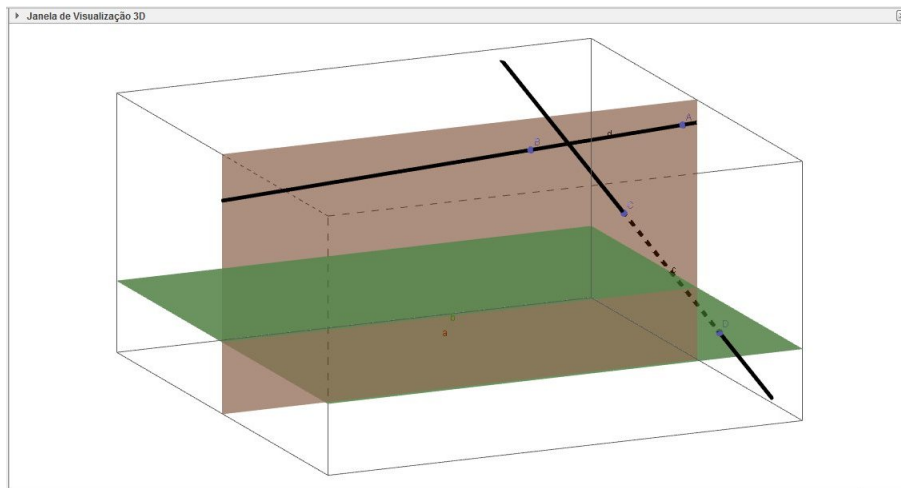
5 Sugestões de atividades

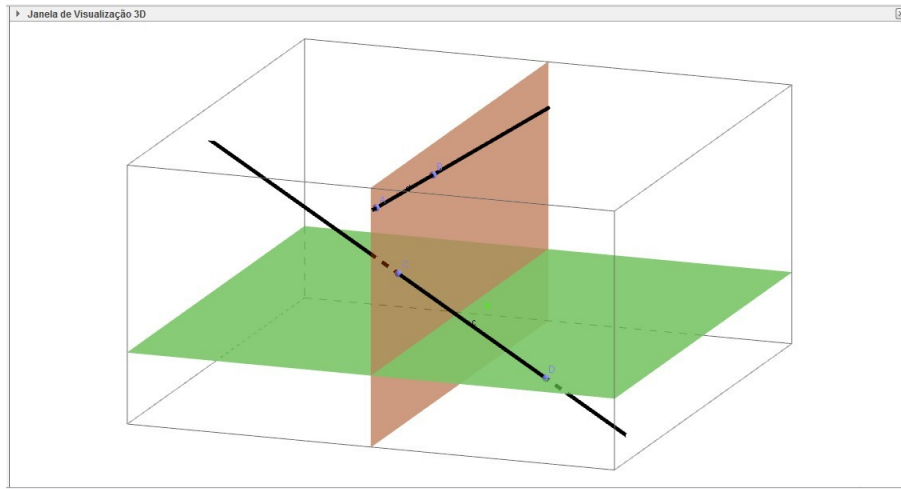
A seguir, fornecemos vários exemplos de utilização do programa que podem ser usados como atividades de exploração de diversos conceitos de Geometria Espacial.

5.1 Retas reversas

Inicialmente, exploramos o conceito de retas reversas, observando duas retas em diferentes posições. Para isso:





- Eliminamos os eixos da janela de visualização – basta pressionar com o botão direito do *mouse* na janela e dar um clique em “Eixos”.
- Construímos dois planos: um é o plano $z = 0$ (que já aparece na janela no início) e o outro é o plano $x = 0$. Para isso, basta digitar na janela de entrada suas equações.
- Selecionamos a opção  “Ponto” na barra de ferramentas e marcamos três pontos A, B, C em um plano e um ponto D no outro plano.
- Selecionamos  “Reta” na barra de ferramentas e clicamos em A e B para definir a reta AB e, depois, em C e D para definir a reta CD .
- Selecionamos a opção  “Girar Janela de Visualização 3D” na barra de ferramentas e, com o auxílio do *mouse* giramos a caixa da janela de visualização e observamos que as retas AB e CD não são paralelas, nem coincidentes e nem concorrentes. Logo, são retas reversas.

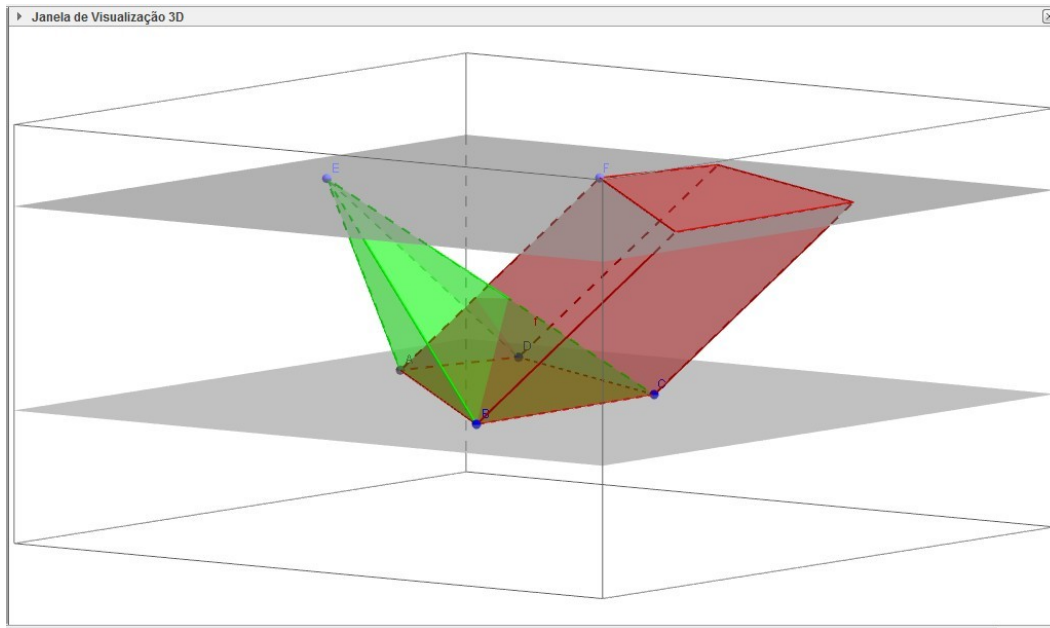




5.2 Pirâmide e prisma – alturas e volumes






Neste exemplo, construímos uma pirâmide e um prisma de mesma base e mesma altura. Observamos a relação entre seus volumes (que aparecem na Janela de Álgebra), que um é o triplo do outro. Podemos observar também que quando os vértices se deslocam mantendo-se a mesma altura de cada sólido, os volumes não variam.

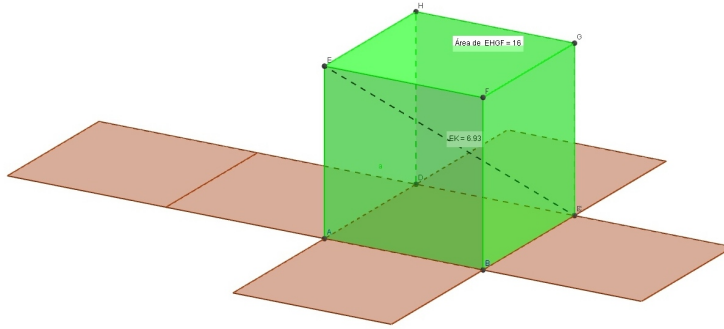
- Definimos um plano de altura 4. Para isso, basta escrever a equação $z = 4$ na janela de entrada.
- Desenhamos um polígono no plano da base ($z = 0$), por exemplo um quadrilátero $ABCD$. Para isso, basta usar a opção  “Polígono” da barra de ferramentas e marcar os pontos. Deve-se fechar o polígono clicando-se em cima do primeiro ponto marcado.
- Definimos dois pontos E e F pertencentes ao plano $z = 4$. Para isso, usamos a opção  “Ponto em objeto” da barra de ferramentas e clicamos em duas posições no plano.
- Desenhamos uma pirâmide de base $ABCD$ e vértice E . Para isso, digitamos o comando `Pirâmide[A, B, C, D, E]` na janela de entrada ou usamos a opção  “Pirâmide” da barra de ferramentas.
- Desenhamos um prisma de base $ABCD$ e um dos vértices como sendo o ponto F . Para isso, basta digitar `Prisma[A, B, C, D, F]` na janela de entrada ou usar a opção  “Prisma” da barra de ferramentas.
- Depois de construídos, podemos mover os pontos E ou F à vontade e verificar que os volumes do prisma e da pirâmide não mudam de valor pois a altura (que é a distância entre os planos e igual a 4) não varia.



5.3 Cubo – áreas, diagonais e planificação






Neste exemplo, desenhamos um cubo e exploramos alguns conceitos como volume, áreas das faces, comprimentos das arestas, comprimentos de diagonais e planificação.

- Eliminamos da janela de visualização os eixos, o plano $x0y$ e a caixa de “clipping” que são mostrados no início. Para isso, basta clicar na janela com o botão direito do *mouse* e alterar a configuração.
- Definimos dois pontos A e B . Isso pode ser feito de duas maneiras: usando a opção “Ponto” da barra de ferramentas ou digitando-se as coordenadas de cada ponto na janela de entrada: $A = (0, 0, 0)$ e $B = (4, 0, 0)$, por exemplo.
- Desenhamos um cubo de aresta AB . Para isso, podemos usar a opção  “Cubo” da barra de ferramentas e clicar nos pontos A e B ou digitar o comando `Cubo[A, B]` na janela de entrada. Podemos alterar as propriedades (cores etc.) do cubo clicando com o botão direito do *mouse*.
- Desenhamos a planificação desse cubo, ou seja, sua área total. Pode ser usado a opção  “Planificação” da barra de ferramentas ou um comando `Planificação[nome, número]` na janela de entrada, onde “nome” é o nome do cubo desenhado e “número” é um valor de 0 a 1 e que corresponde à posição do desenho do cubo planificado. Por exemplo, `Planificação[a, 0.5]` desenha a planificação “a meio caminho”, enquanto que `Planificação[a, 1]` desenha a planificação completamente no plano da base do cubo.
- Depois de definido um sólido (como o cubo), podemos calcular seu volume e todas as suas áreas e comprimentos. Para isso, podemos observar esses valores que aparecem na Janela de Álgebra ou usar as opções  “Distância, Comprimento ou Perímetro”,  “Área”,  “Volume” da barra de ferramentas, ou digitar na janela de entrada comandos como `Comprimento[arestaAB]`, `Área[faceCDHG]` ou `Volume[a]`.
- Podemos calcular o comprimento de diagonais, bastando defini-la como um segmento do sólido e calcular seu comprimento.

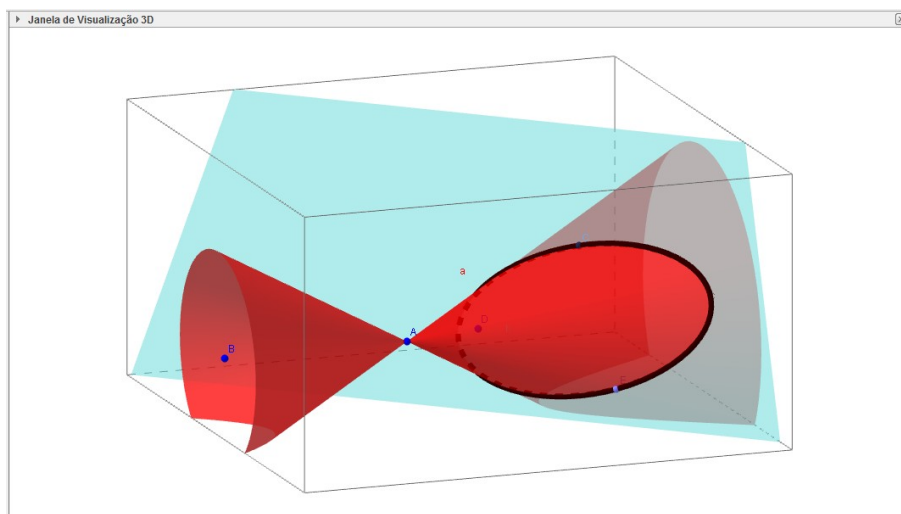


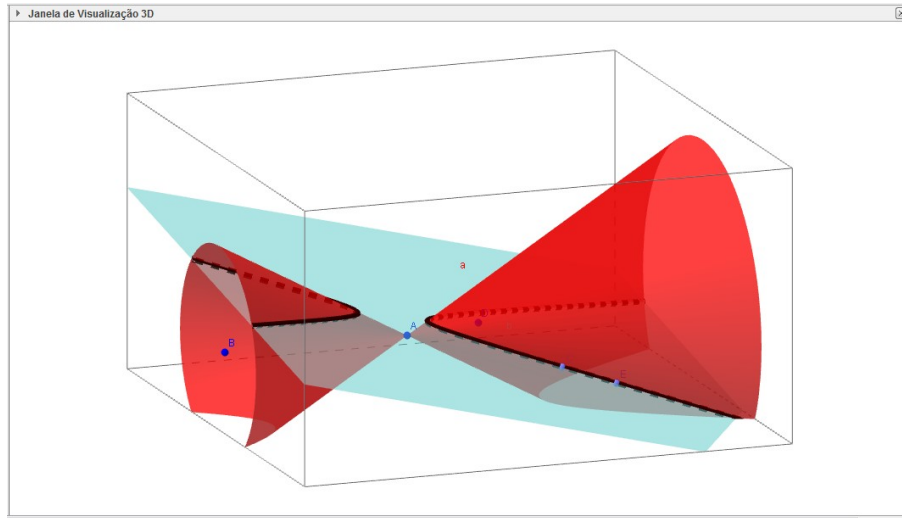
5.4 Interseções de um cone com um plano

Neste exemplo, visualizamos as interseções de um plano com um cone e podemos verificar que elas são as curvas conhecidas como “*cônicas*”.

- Seleccionamos  “*Ponto*” na barra de ferramentas e marcamos três pontos A e B .
- Na janela de entrada digitamos o comando `ConeInfinito[A, B, 0.5]` para desenhar um cone com eixo AB e ângulo entre o eixo e uma geratriz de 0.5 radianos.
- Seleccionamos  “*Ponto*” novamente e marcamos três pontos C, D, E .
- Seleccionamos  “*Plano por três pontos*” na barra de ferramentas e clicamos nos pontos C, D, E . Com isso, é desenhado o plano que passa por esses pontos.
- Seleccionamos  “*Interseção de Duas Superfícies*” e clicamos no cone e no plano. Depois, clicamos com o botão direito do mouse na interseção obtida e alteramos suas propriedades, aumentando a espessura da linha.
- Seleccionamos  “*Mover*”, clicamos em um dos pontos A, B, C e movemos o ponto selecionado ao longo da janela e observamos as modificações na interseção.

Dependendo da posição do plano com relação ao cone, podemos obter uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.



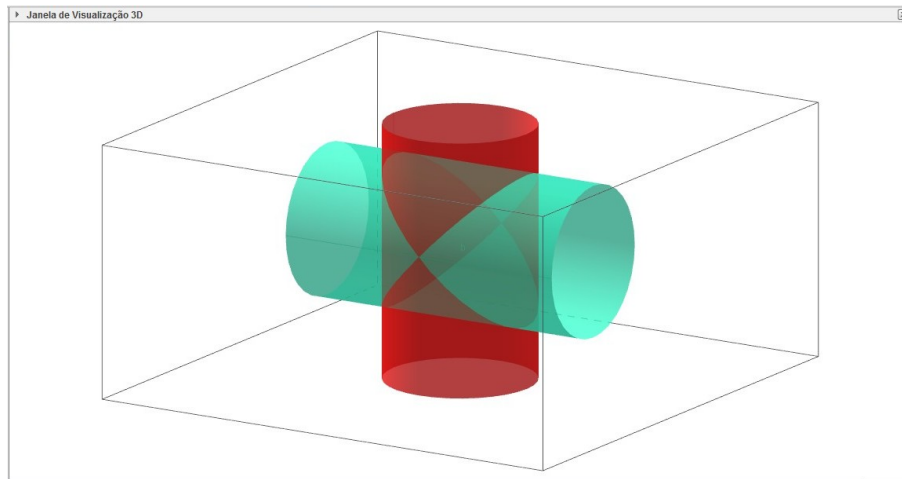


5.5 Duas superfícies

Construímos os gráficos de duas superfícies (cilindros circulares) e observamos sua interseção. Para isso, basta digitar na janela de entrada os comandos

- `Superfície[2 cos(u), 2 sen(u), v, u, 0, 6.29, v, -4, 4]`
- `Superfície[v, 2 cos(u), 2 sen(u), u, 0, 6.29, v, -4, 4]`

alterar as cores e girar à vontade.

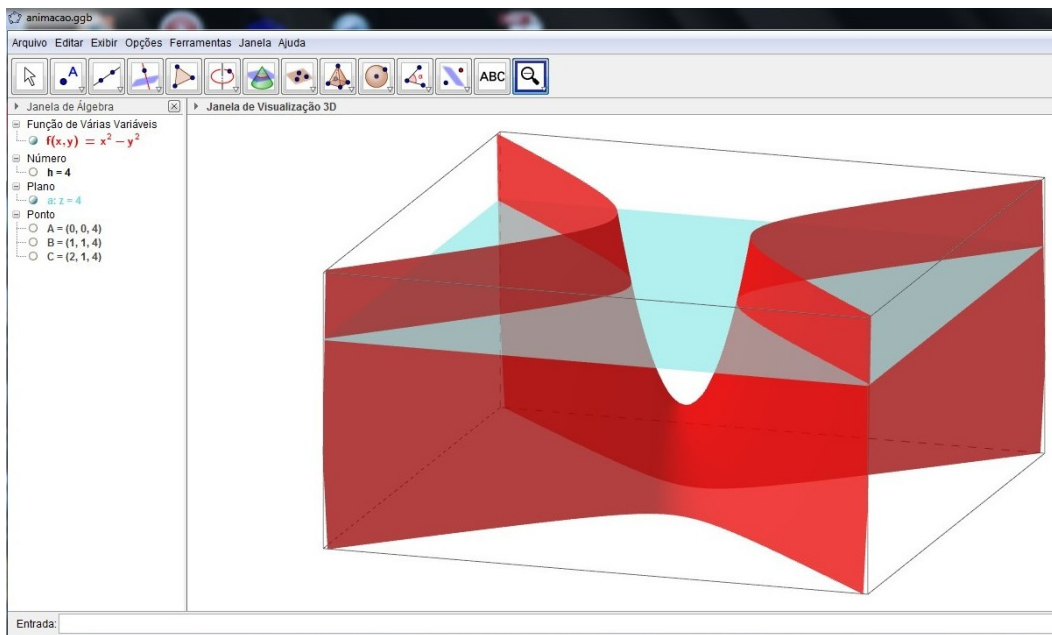


5.6 Animação envolvendo um plano e uma superfície

Neste exemplo, construímos uma animação com um plano horizontal intersectando uma superfície. No final da construção do gráfico, a animação pode ser salva em disco como um GIF animado através da opção `Arquivo` → `Exportar` do menu.

- Digitamos $f(x, y) = x^2 - y^2$ na janela de entrada.
- Atribuímos um valor para um parâmetro na janela de entrada, por exemplo, $h = 4$.
- Definimos três pontos não colineares com altura dependendo do parâmetro h , por exemplo, $A = (0, 0, h)$, $B = (1, 1, h)$, $C = (2, 1, h)$.
- Desenhamos o plano que passa pelos pontos A, B, C com um comando `Plano[A, B, C]`.

- Alteramos as propriedades desses objetos clicando com o botão direito do *mouse* neles. Podemos alterar as cores e esconder os pontos A, B, C e os eixos coordenados.
- Clicamos com o botão direito no parâmetro h e selecionamos a opção “*Animar*”. Com isso, o valor de h começa a variar automaticamente, aumentando ou diminuindo, e o plano começa a subir ou descer no gráfico.



5.7 Superfícies e curvas

Construímos os gráficos de duas superfícies (hiperbolóide de uma folha e toro) e uma curva sobre uma delas. Para isso, digitamos na janela de entrada os comandos

- Superfície[$\cos(u) - v \sin(u), \sin(u) + v \cos(u), v, u, 0, 6.29, v, -5, 5]$
- Superfície[$(4 + 2 \cos(u)) \cos(v), (4 + 2 \cos(u)) \sin(v), 2 \sin(u), u, 0, 6.29, v, 0, 6.29]$
- Curva[$(4 + 2 \cos(7 u)) \cos(u), (4 + 2 \cos(7 u)) \sin(u), 2 \sin(7 u), u, 0, 6.29]$

e, no final, alterar as propriedades de cada objeto e girar à vontade. Esse valor 6,29 utilizado é uma aproximação de 2π .

