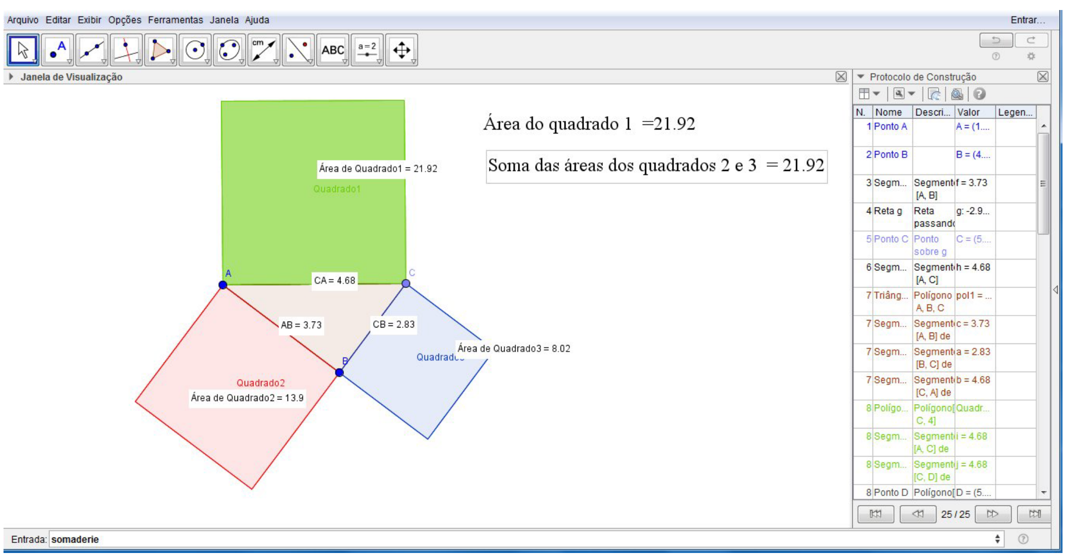
Atividades com o GeoGebra na disciplina Recursos Computacionais no Ensino de Matemática

Lenimar N. Andrade

18 de dezembro de 2017

1 Atividade 1

Dados três pontos A, B e C, vértices de um triângulo retângulo, construir três quadrados tais que cada um dos lados do trângulo coincida com um dos lados deles. Mostrar a medida da área do quadrado maior e a soma das medidas dos quadrados menores.



a) Mover os pontos A, B, C e observar as áreas dos quadrados;

b) Verificar o protocolo de construção;

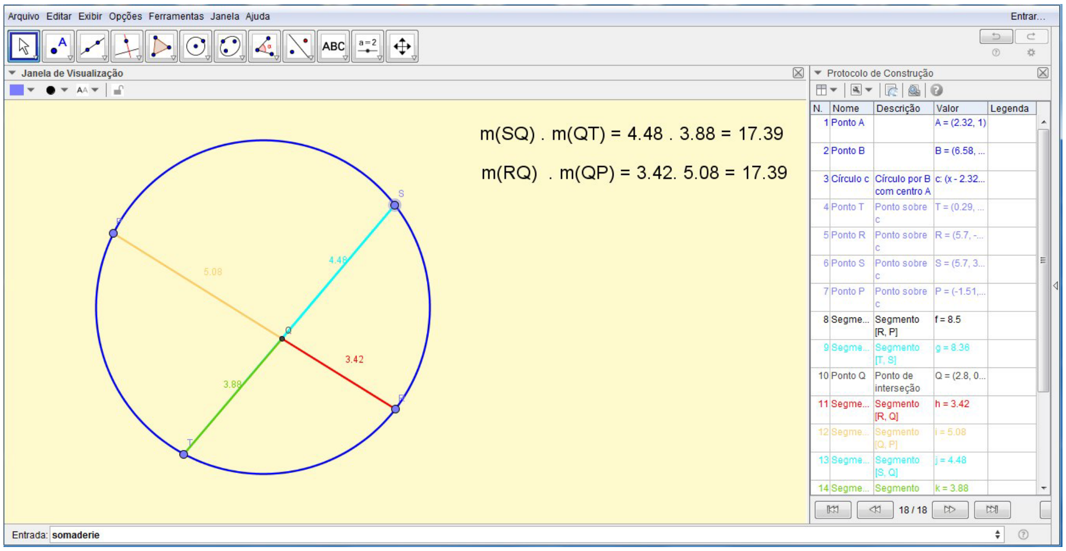
c) Alterar estilos dos quadrados (cores, transparências, largura dos traços);

d) Apagar eixos e a janela de álgebra;

e) Colocar nome e salvar como ATIVIDADE01.GGB.

2 Atividade 2

Dada uma circunferência (fixada), escolher quatro pontos P, S, R, T nela, calcular a interseção $Q = \overline{PR} \cap \overline{ST}$, desenhar os segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{TQ}$, $\overline{QS}$ e observar a relação entre os produtos de suas medidas $m(\overline{PQ}) \cdot m(\overline{QR})$ e $m(\overline{TQ}) \cdot m(\overline{QS})$.



a) Mover os pontos que estão na circunferência e observar os produtos das medidas dos segmentos;

b) Verificar o protocolo de construção;

c) Alterar estilos da circunferência e dos segmentos (cores, largura dos traços);

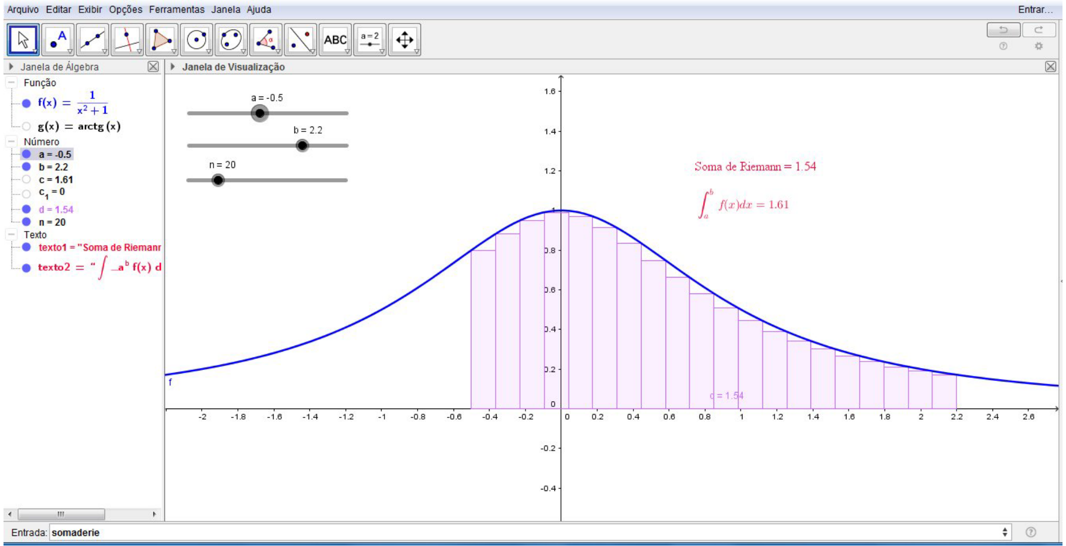
d) Apagar eixos e a janela de álgebra; alterar a cor de fundo da janela de visualização;

e) Colocar nome e salvar como ATIVIDADE02.GGB.

3 Atividade 3

Dados uma função $f(x)$, um intervalo $[a, b]$ e um valor de n inteiro ($1 \leq n \leq 100$), calcular e mostrar na tela os valores de $\int_a^b f(x)dx$ e a soma de Riemann inferior de f em $[a, b]$ com n subdivisões desse intervalo.

Comandos utilizados: `Integral[f, x]`,
`SomaDeRiemannInferior[f, a, b, n]`



a) Testar as funções $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $f(x) = \frac{x^3-5x}{10}$;

b) Verificar o protocolo de construção;

c) Alterar estilo do gráfico da função (cor, largura do traço);

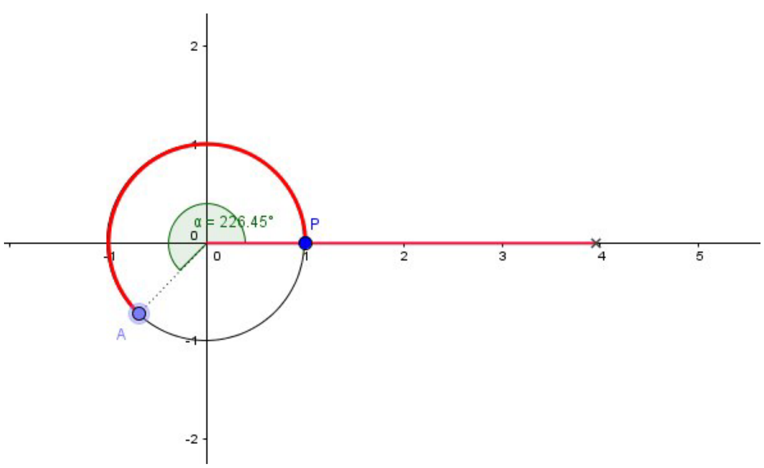
d) Os valores de a, b e n podem ser definidos por controles deslizantes; alterar esses valores e comparar os valores da integral e da soma de Riemann;

e) Animar o n;

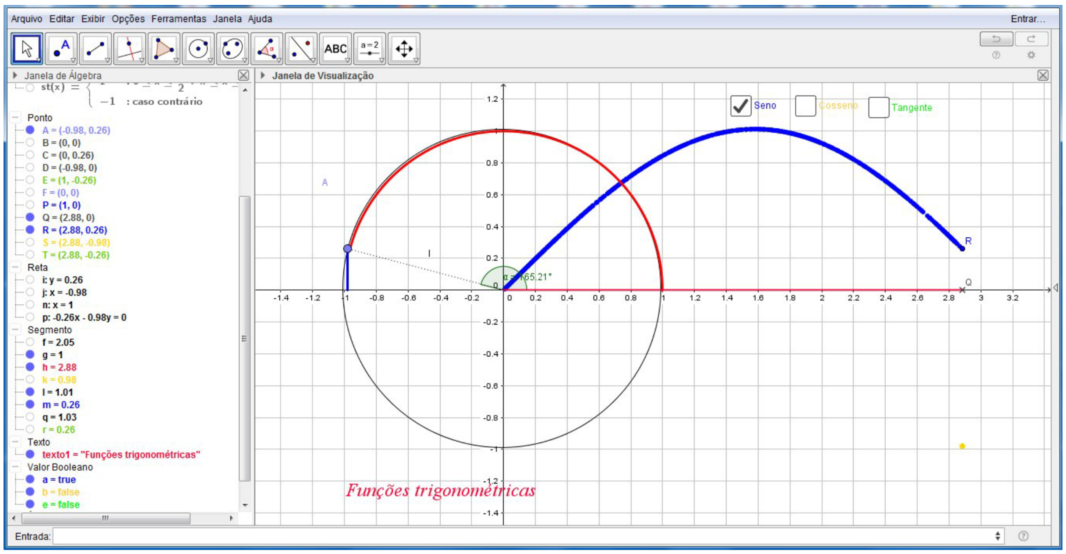
f) Colocar nome e salvar como ATIVIDADE03.GGB.

4 Atividade 4

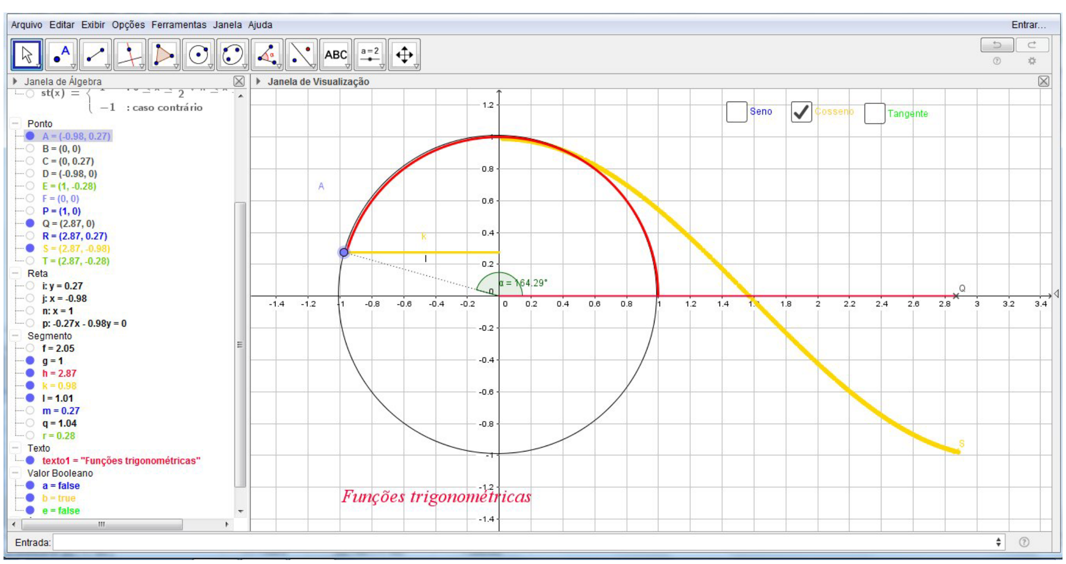
a) Construir uma circunferência $x^2 + y^2 = 1$ (fixa), escolher nela um ponto A, marcar os pontos $O = (0,0)$ e $P = (1,0)$, destacar o ângulo $\widehat{AOP}$ e o arco AP. Destacar o segmento $\overline{OQ}$ no eixo dos x com a mesma cor e mesma medida do arco AP.

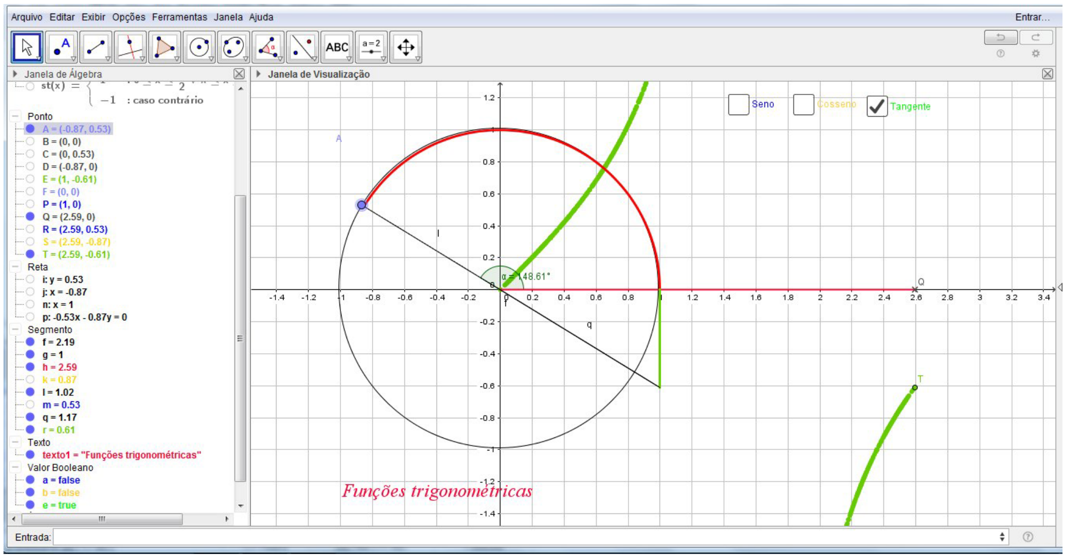


b) Determinar a interseção D da reta vertical $x = x(A)$ com o eixo dos x, destacar o segmento $\overline{AD}$ (cor azul) e marcar o ponto $R = (x(Q), y(A))$. Mostrar o RASTRO do ponto R e uma MALHA de pontos como imagem de fundo. Acrescentar uma "Caixa para Exibir/Esconder objetos" e associá-la ao ponto R e ao segmento $\overline{AD}$ e denominá-la *"Seno"*. Animar o ponto A.



c) Fazer algo parecido para outras funções trigonométricas como o *"Cosseno"* (amarelo) e a *"Tangente"* (verde).





d) Colocar um título *"Funções trigonométricas"*, adicionar nome e salvar como ATIVIDADE04.GGB.

5 Atividade 5

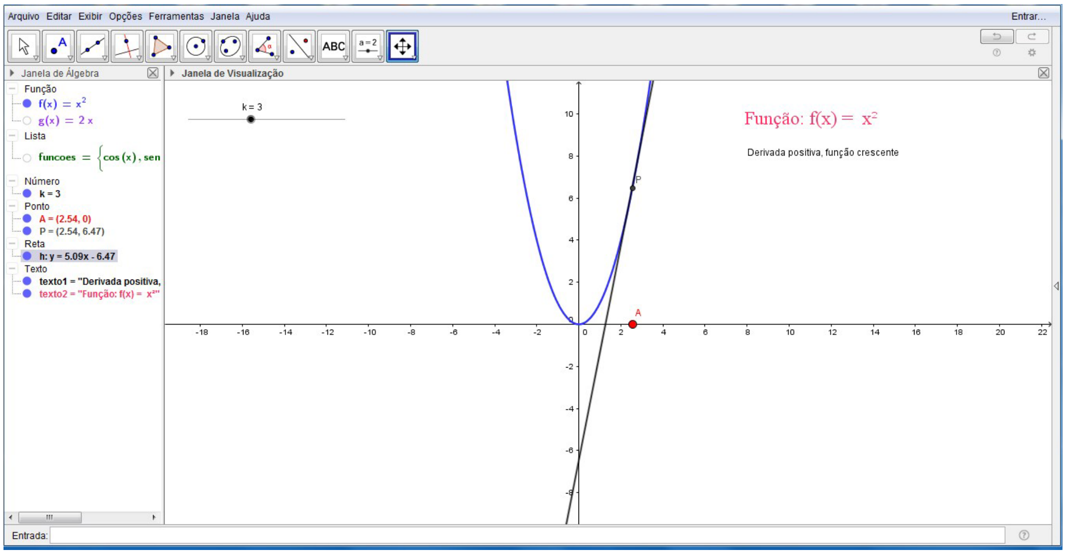
a) Dada uma lista de funções

$$\text{Funcoes} \;=\; \{\, \cos(x),\, \text{sen}(x),\, x^2,\, x^3,\, \exp(x),\, \tfrac{x^3-9x+2}{5} \,\},$$

cujos elementos podem ser acessados com um controle deslizante k, $1 \leq k \leq 6$, contruir o gráfico de $f(x) = k$-ésimo elemento dessa lista.

b) Dado um ponto A no eixo dos x, destacar o ponto $P = (x(A), f(x(A))$ no gráfico da função e desenhar a reta tangente ao gráfico nesse ponto.

c) Mostrar mensagem com a função escolhida. Mostrar outra mensagem que varie de acordo com a posição do ponto P no gráfico: *"derivada negativa, função decrescente"*, *"derivada positiva, função crescente"* e *"derivada nula, ponto crítico"*.



Comandos utilizados:

```
Funcoes = { F(x), G(x), H(x), ...  }
f(x) = Elemento[Funcoes, k]
Derivada[f, x]
Se[condição, expressão1, expressão2]
Texto1 = Se[condição, ‘‘texto 1’’]
```

a) Mudar a posição do ponto A;

b) Verificar o protocolo de construção;

c) Alterar estilo do gráfico da função (cor, largura do traço) e do texto;

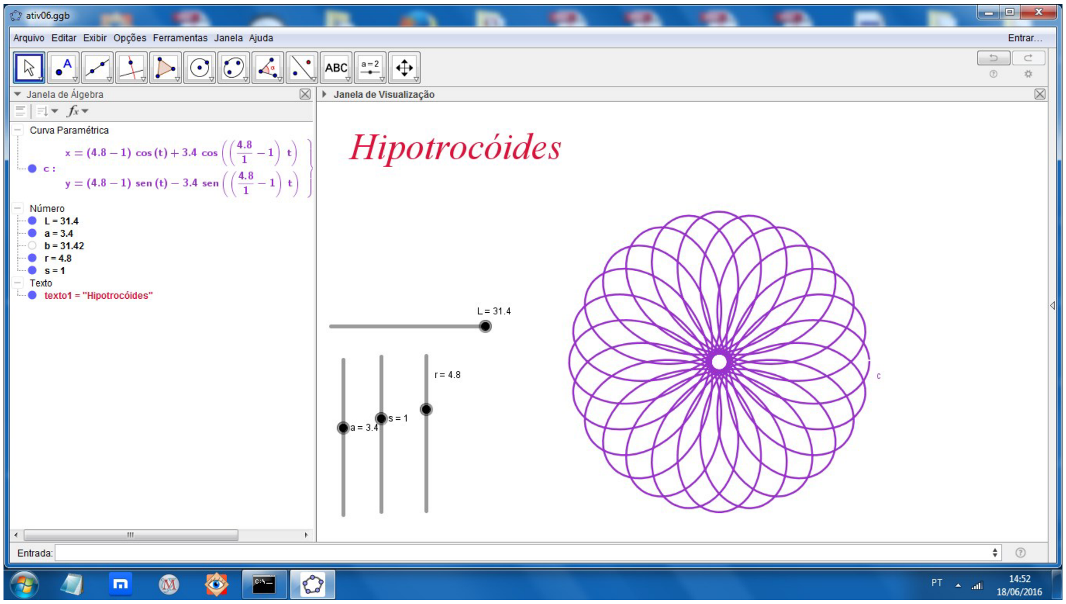
d) Animar o ponto A;

e) Colocar nome e salvar como ATIVIDADE05.GGB.

6 Atividade 6

a) Dados a, r, s e L (controles deslizantes) com $0 \leq L \leq b = 2\pi \cdot$denominador$[r/s]$, construir o gráfico da hipotrocóide definida pelas seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = f(t) = (r-s)\cos t + a\cos\left(\left(\frac{r}{s}-1\right)t\right), \\ y = g(t) = (r-s)\,\mathrm{sen}\, t - a\,\mathrm{sen}\left(\left(\frac{r}{s}-1\right)t\right), \; 0 \leq t \leq L. \end{cases}$$



b) Coloque um título *"Hipotrocóides"* e através da aba "Avançado" das propriedades do gráfico, use cores dinâmicas: vermelho = a, verde = $a+r$, azul = $a+r+s$, transparência = 0.

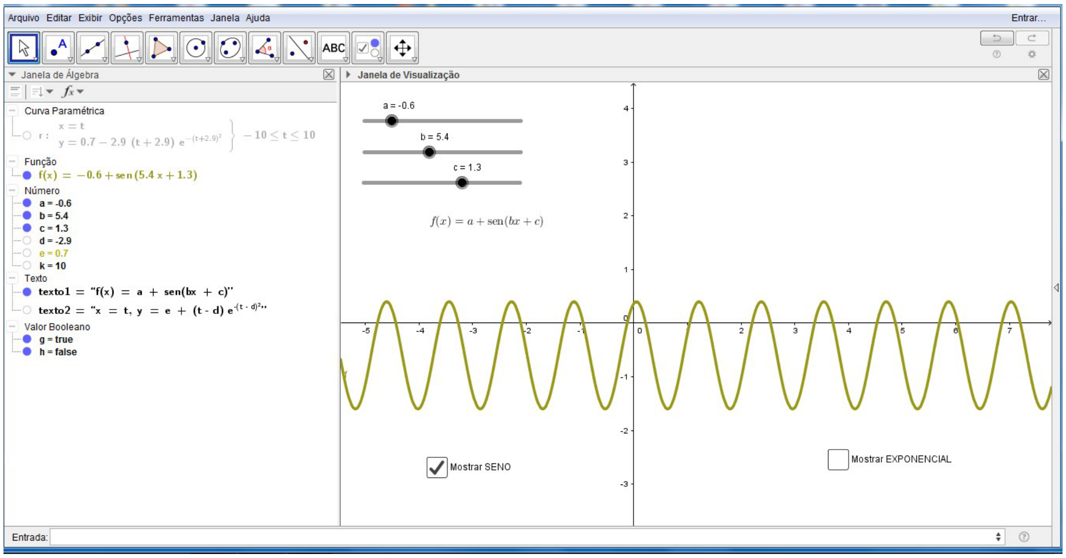
c) Modifique os valores de a, r e s. Anime o L.

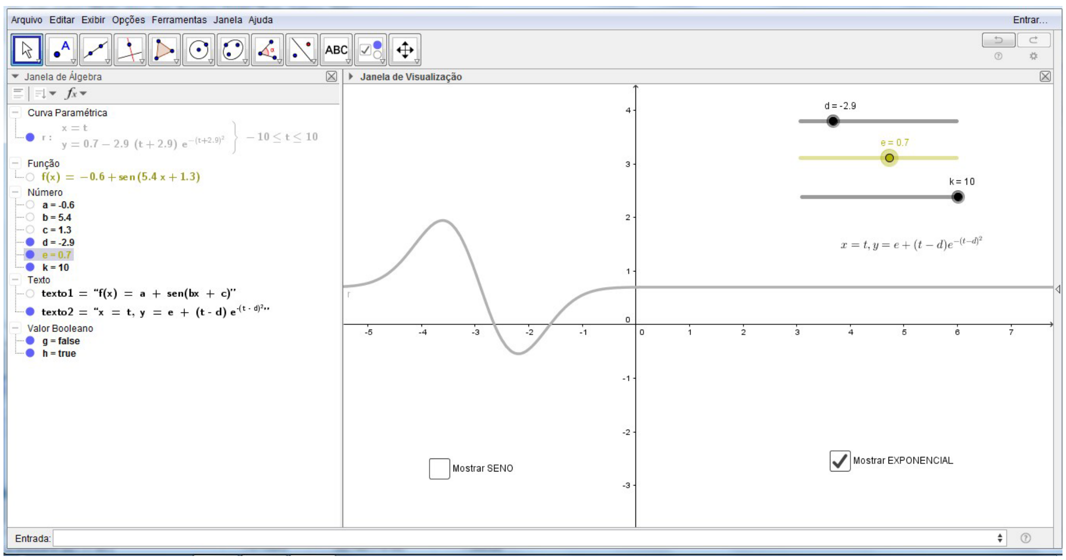
Comando utilizado: `Curva[f(t), g(t), t, 0, L ]`

7 Atividade 7

a) Dados a, b, c (controles deslizantes), construir o gráfico da função $f(x) = a + \text{sen}(bx + c)$, com $1 \leq b \leq 10$. Usar cores dinâmicas no gráfico: vermelho = a, verde = b, azul = $a + b + c$ e associar o gráfico e os controles deslizantes a uma caixa para exibir/esconder objetos intitulada *"Mostrar SENO"*. Modificar os valores de a, b, c observando o que acontece com o gráfico.

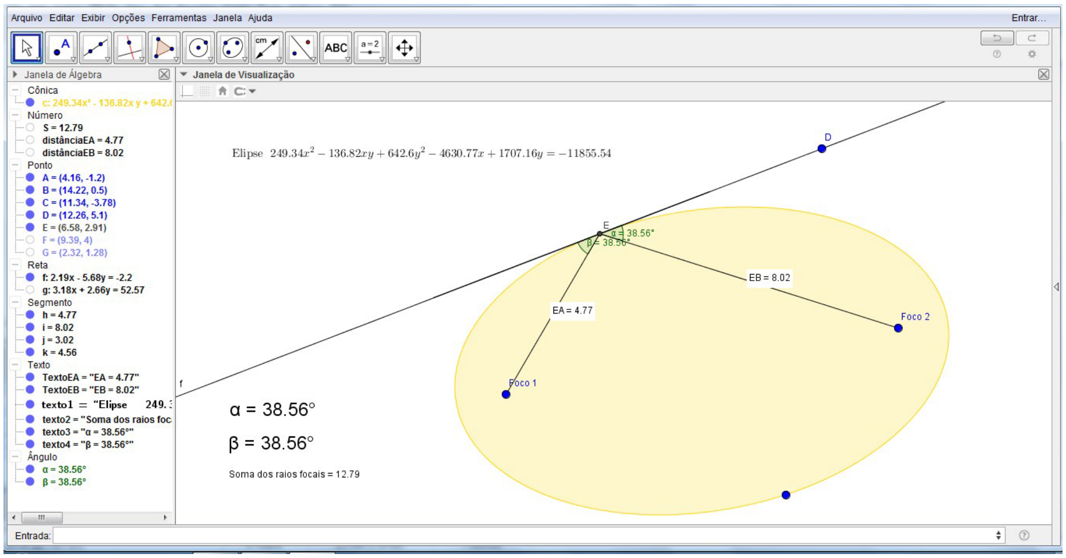
b) Dado k tal que $-10 \leq k \leq 10$, dados d, e, construir o gráfico de $x = t$, $y = e + (t-d)e^{-(t-d)^2}$, com $-10 \leq t \leq k$. Usar cores dinâmicas: vermelho = $e+k$, verde = e, azul = e e associe o gráfico e os controles deslizantes a uma caixa para exibir/mostrar objetos intitulada *"Mostrar EXPONENCIAL"*. Animar k e d.





8 Atividade 8

Dados três pontos A, B e C, construir a elipse que passa por C e tem como focos A e B. Dado um ponto D fora da elipse, construir a reta tangente à elipse que passa por ele. Sendo E o ponto de tangência, verifique que a reta tangente forma ângulos com os raios focais $\overline{AE}$ e $\overline{BE}$ com as mesmas medidas. Verifique também que a soma dos comprimentos desses raios focais é constante. Mostre a equação da elipse, as medidas dos ângulos e o valor da soma dos comprimentos. Mover o ponto D em torno da elipse.



9 Atividade 9

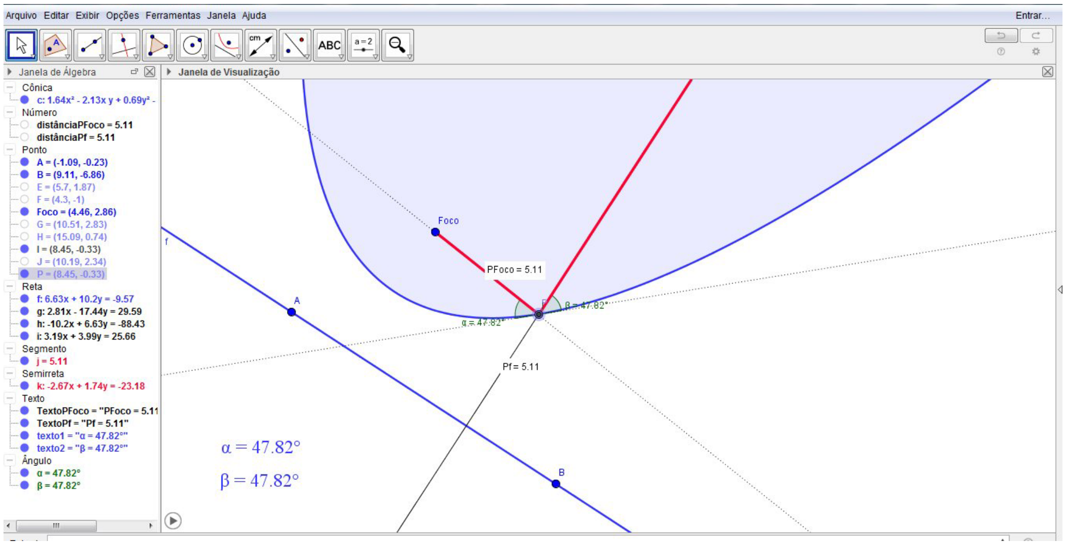
a) Dada uma reta AB e um ponto fora dela, construir uma parábola que tenha essa reta como diretriz e o ponto como foco.

b) Sendo P um ponto sobre a parábola, verifique que a distância de P ao foco é igual à distância de P à diretriz. Mover o ponto P e verificar que essa igualdade se mantém.

c) Construa a reta tangente à parábola em P, a reta perpendicular à diretriz que passa por P e o ângulo α entre essas retas.

d) Modifique as cores da parábola e da reta diretriz. Modifique a transparência da parábola. Modifique a cor e estilo do segmento de reta do foco ao ponto P e da semirreta perpendicular à diretriz e que inicia em P.

e) Determine o ângulo β entre a reta tangente e e a reta que passa por P e pelo foco. Verifique que os ângulos α e β têm a mesma medida.



f) Mova o ponto P e verifique que essa igualdade dos ângulos se mantém. Essa propriedade é conhecida como sendo a *propriedade ótica da parábola* e tem muitas aplicações práticas. Animar o ponto P.

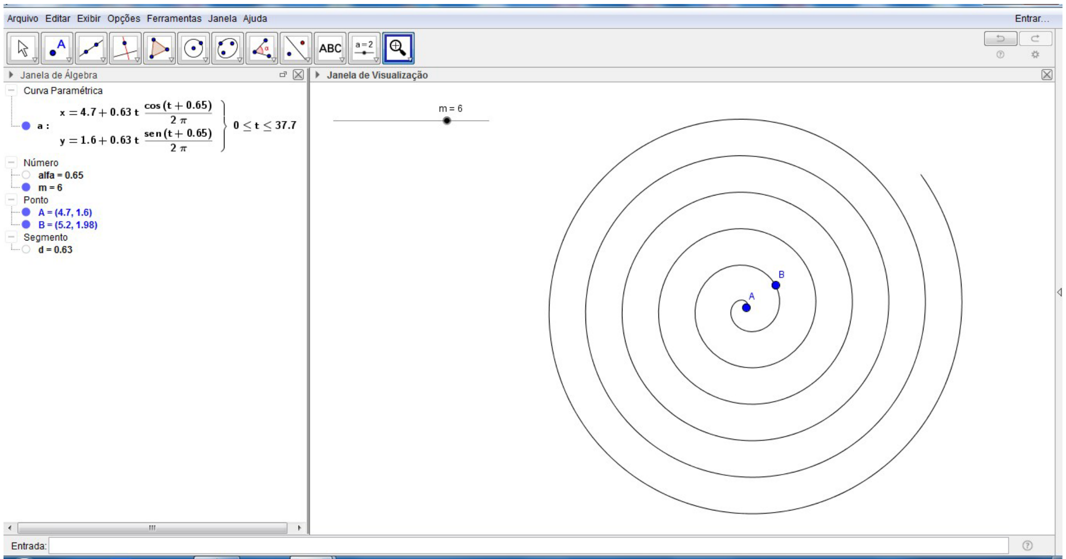
g) Colocar nome e salvar como ATIVIDADE09.GGB.

10 Atividade 10

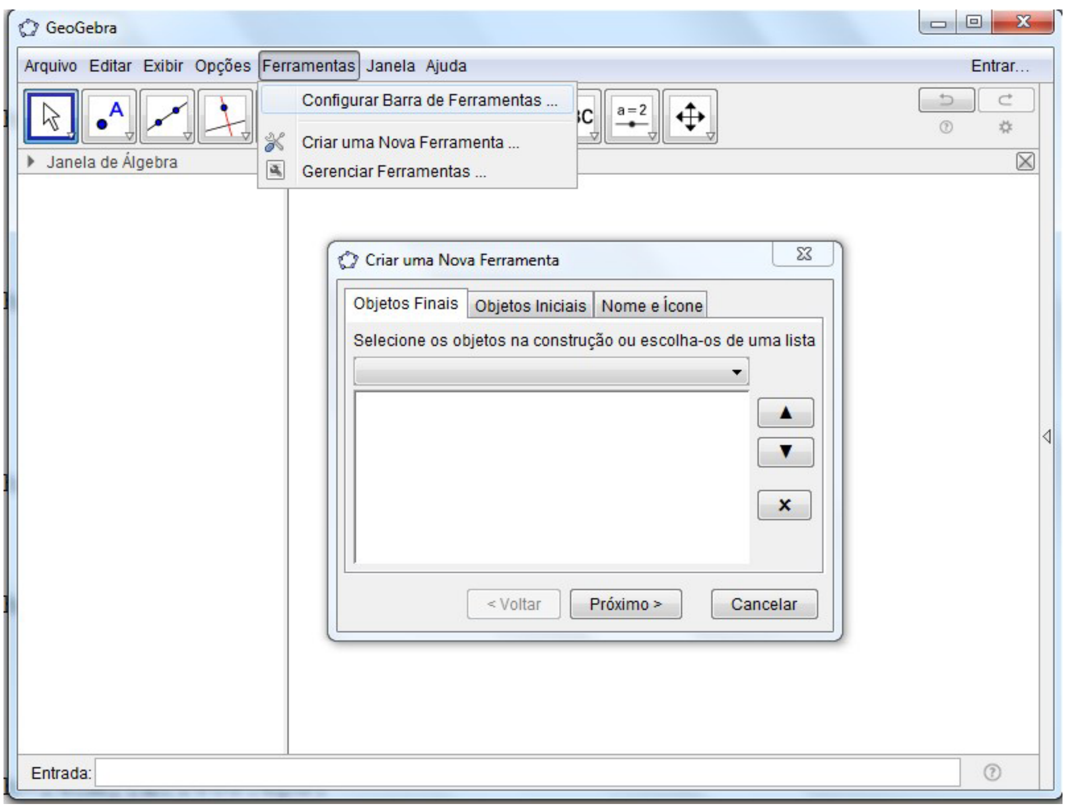
a) Dados dois pontos A e B, e um inteiro positivo m, construir o gráfico de uma espiral c que inicia em A, passa por B e dá m voltas completas em torno de A. As equações paramétricas da espiral são

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x(A) + \frac{d \cdot t \cos(t+\alpha)}{2\pi} \\ y & = & y(A) + \frac{d \cdot t \,\mathrm{sen}(t+\alpha)}{2\pi} \end{array} \right. ,$$

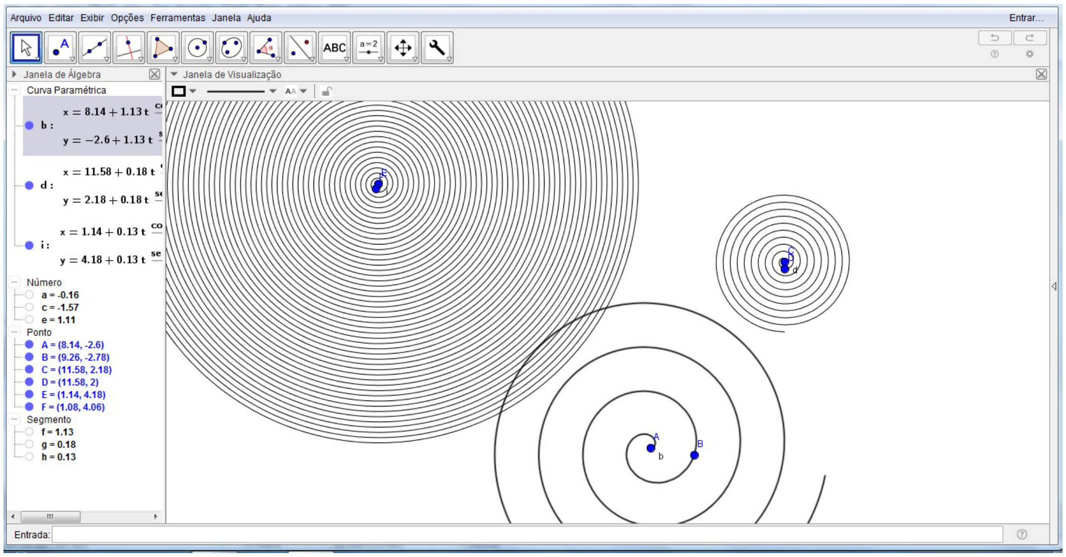
onde $d = \text{distância}(A, B)$, $\alpha = \text{arctg}\left(\frac{y(B)-y(A)}{x(B)-x(A)}\right)$ e $0 \leq t \leq 2m\pi$.



b) Criar uma ferramenta de nome *"Espiral"* que tenha A, B e m como objetos iniciais e e α, d e a curva c como objetos finais.



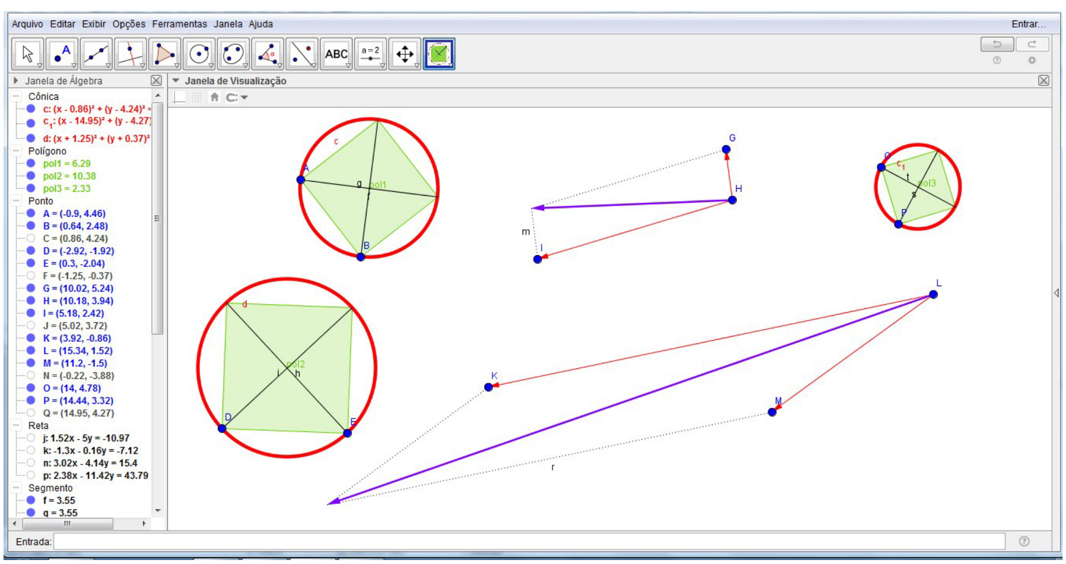
c) Testar a ferramenta assim criada.



11 Atividade 11

a) Dados dois pontos A e B, desenhar um quadrado que tenha um dos lados como sendo o segmento $\overline{AB}$, desenhar as diagonais do quadrado e o círculo circunscrito a ele. Alterar as cores do quadrado e do círculo e modificar posições dos pontos.

b) Dados três pontos C, D e E, desenhar os vetores (segmentos orientados) $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{DE}$ e sua soma $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE}$. Modificar estilos e cores dos segmentos e as posições dos pontos.



c) Criar duas ferramentas relacionadas com as figuras criadas nos itens anteriores. Uma ferramenta deve se chamar “CircQuad” e a outra ”SVet”. Testar as ferramentas criadas.

d) Colocar nome e salvar com nome ATIVIDADE11.GGB.

12 Atividade 12

Dada uma curva parametrizada por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, o valor absoluto da *curvatura* em um ponto $P = (f(t), g(t))$ dessa curva é dada por

$$\kappa(t) = \frac{|f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)|}{(f'(t)^2 + g'(t)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

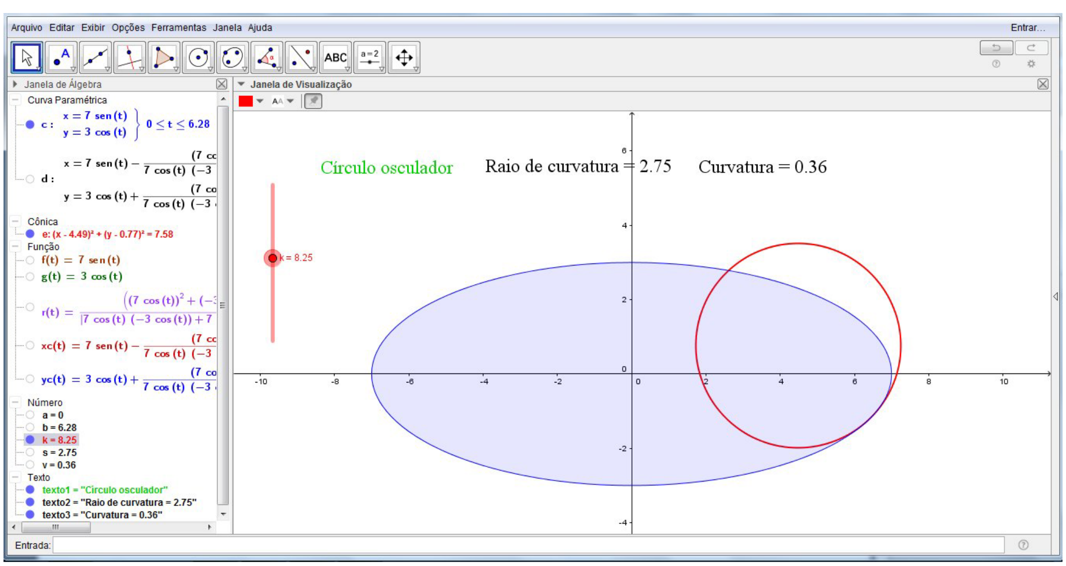
o *raio de curvatura* em P é igual a $R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ e o *centro de curvatura* é o ponto $Q = (xc(t), yc(t))$ onde

$$xc(t) = f(t) - \frac{(f'(t)^2 + g'(t)^2)g'(t)}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)},$$

$$yc(t) = g(t) + \frac{(f'(t)^2 + g'(t)^2)f'(t)}{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}.$$

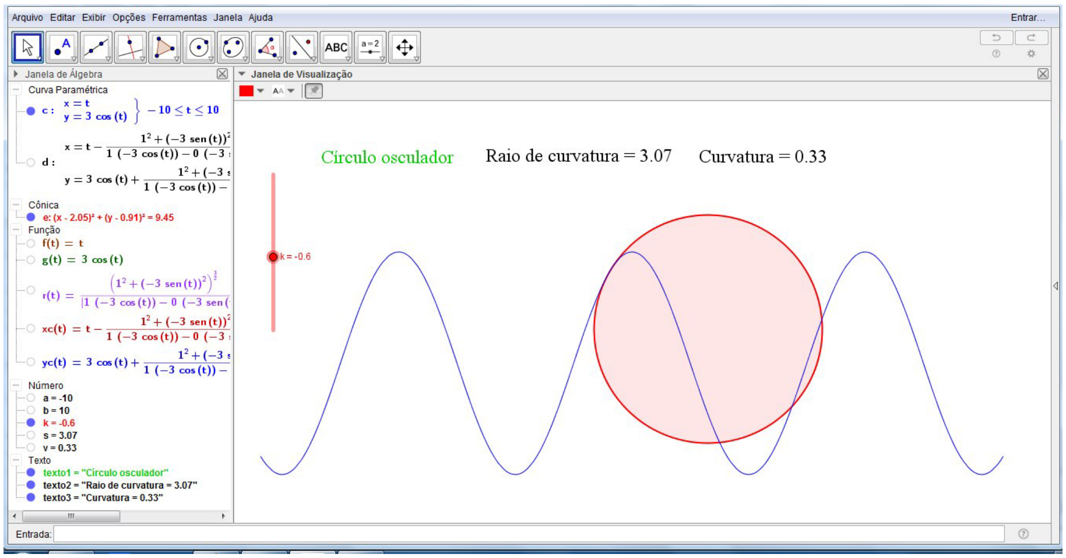
A circunferência de centro Q e raio $R(t)$ é denominada *círculo osculador* da curva dada no ponto P. É a melhor aproximação da curva entre as circunferências que são tangentes nesse ponto.

a) Com a elipse $x = 7 \operatorname{sen} t$, $y = 3 \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, mostre o valor do módulo da curvatura, o raio de curvatura e o círculo osculador no ponto em que $t = j$, onde j definido por um controle deslizante.



b) Modifique o valor de j e o observe o que acontece com o círculo osculador. Depois, anime j.

c) Repita as mesmas operações com a curva $x = t$, $y = 3\cos t$, $-10 \leq t \leq 10$.



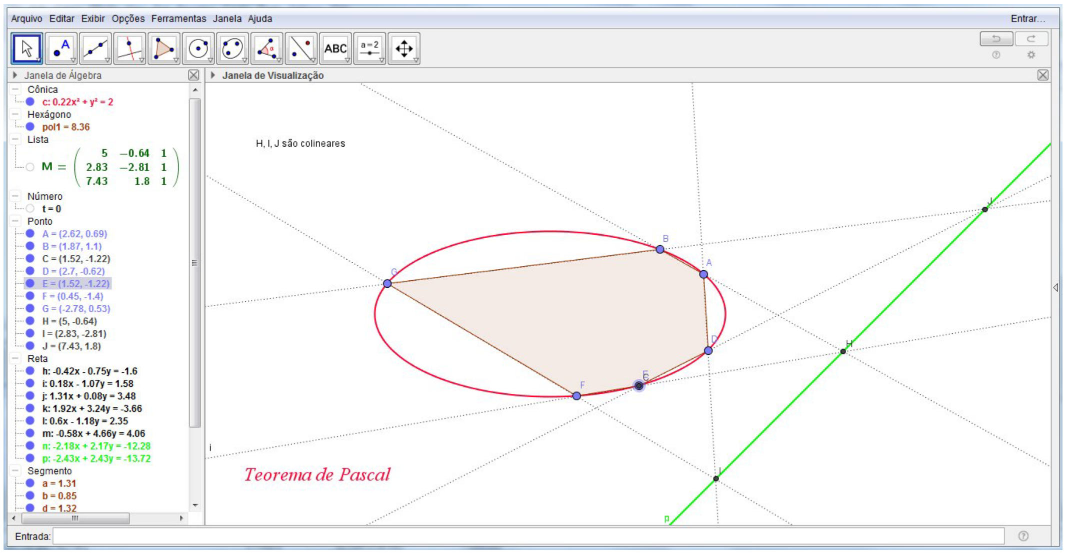
Comandos utilizados: `Curva[f(t), g(t), t, a, b]`
`Derivada[f, x]`
`Derivada[f, x, 2]`

13 Atividade 13

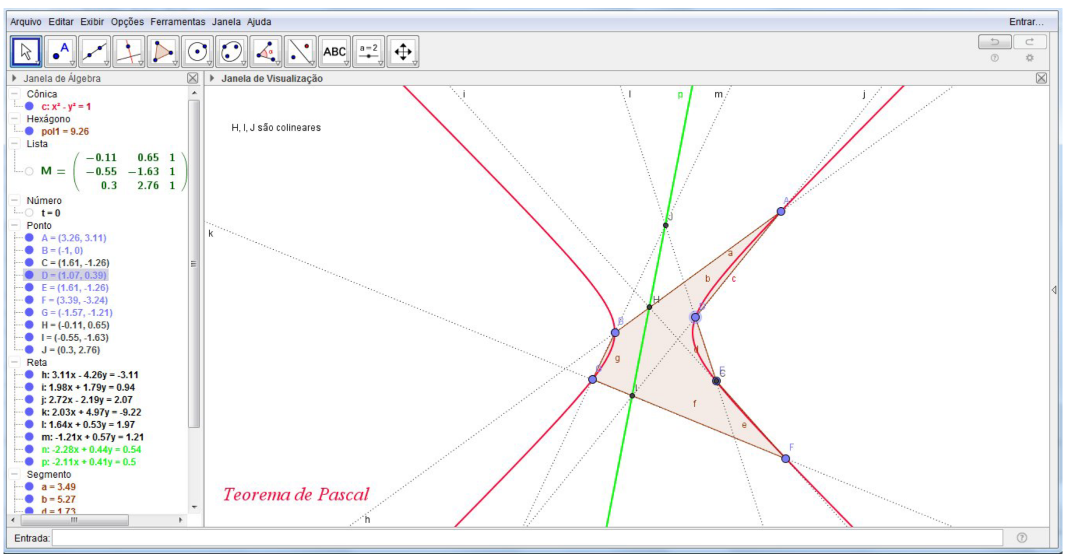
O Teorema de Pascal (1623–1662) afirma que são colineares os pontos obtidos através da interseção dos prolongamentos dos lados opostos de um hexágono com vértices em uma cônica. Se os vértices forem denominados $ABCDEF$, então os pares de lados opostos são (AB, DE), (BC, EF) e (CD, FA).

a) Na elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ escolha seis pontos e defina um hexágono inscrito $ABCDEF$. Sendo H, I, J as interseções das retas que contém lados opostos do hexágono, verifique que esses três pontos são colineares. Uma maneira de verificar a colinearidade dos pontos é verificar se é nulo o determinante da matriz formada pelas suas coordenadas, com uma coluna de elementos iguais a 1.

b) Mova os pontos que são vértices do hexágono e observe se a colinearidade dos pontos I, J, H se mantém. Modifique as propriedades da cônica e da reta que contém os pontos.



c) Repita as mesmas operações com a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.



Comandos utilizados: `M = {{ a, b, 1 },  {c, d, 1 }, {e, f, 1}}`
`Determinante[M]`
`Se[condição, expressão1, expressão2]`
`Texto1 = Se[condição, ‘‘texto 1’’]`

14 Atividade 14

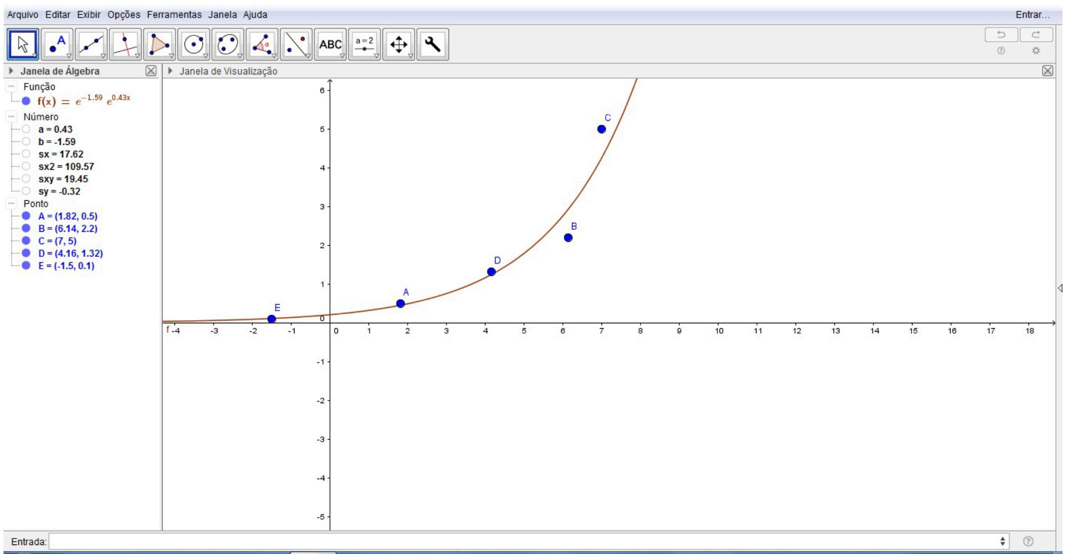
a) Dados $n = 5$ pontos do plano A, B, C, D e E, calcule os seguintes somatórios:

- $sx = x(A) + x(B) + x(C) + x(D) + x(E)$

- $sx2 = x(A)^2 + x(B)^2 + x(C)^2 + x(D)^2 + x(E)^2$
- $sy = \ln y(A) + \ln y(B) + \ln y(C) + \ln y(D) + \ln y(E)$
- $sxy = x(A)\ln y(A) + x(B)\ln y(B) + x(C)\ln y(C) + x(D)\ln y(D) + x(E)\ln y(E)$

e os valores $a = \dfrac{n \cdot sxy - sx \cdot sy}{n \cdot sx2 - sx^2}$ e $b = \dfrac{sy - a \cdot sx}{n}$.

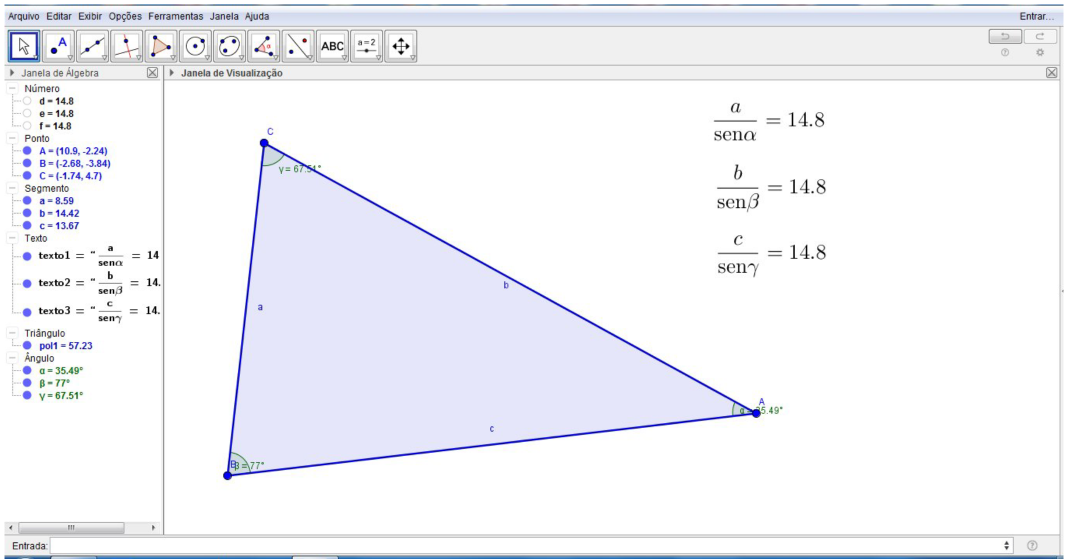
b) Construa o gráfico de $f(x) = e^{ax+b}$. Esse gráfico é a exponencial que mais se aproxima dos 5 pontos dados, segundo o *método dos mínimos quadrados.*



c) Crie uma ferramenta *"Exponencial"* que tenha os pontos A, B, C, D, E como objetos iniciais e os quatro somatórios, os valores a, b e o gráfico da função como objetos finais. Teste a ferramenta assim criada.

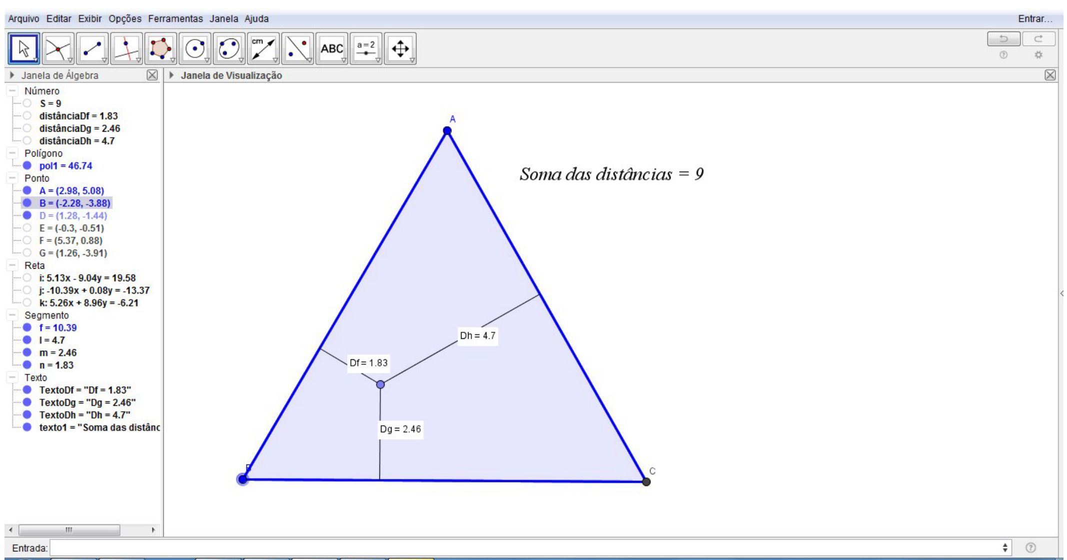
15 Atividade 15

Dados três pontos A, B, C, construa o triângulo ABC e determine as medidas dos seus ângulos internos $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$, $\gamma = \widehat{C}$ e dos seus respectivos lados opostos a, b, c. Mostre os valores de $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$, $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}$, $\dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$ e verifique a relação entre essas razões. Modifique as posições dos pontos e verifique que essa relação se mantém. Esse fato é conhecido como a *Lei dos Senos.*



16 Atividade 16

Construir um triângulo equilátero e selecionar um ponto qualquer no seu interior. Mover o ponto e verificar que a soma das distâncias do ponto a cada um dos lados é uma constante.

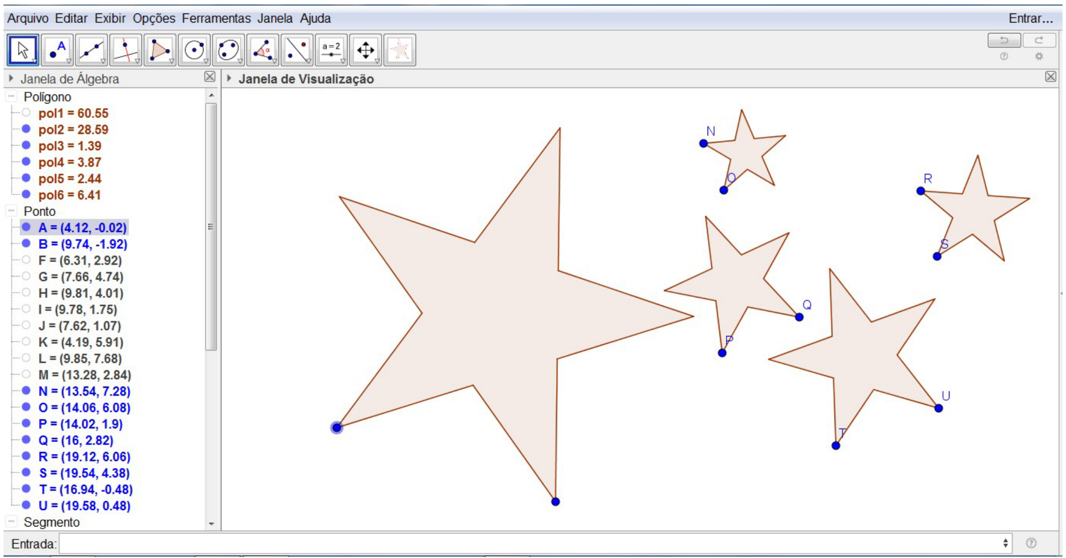


17 Atividade 17

a) Dados dois pontos A e B, construa uma *"estrela de cinco pontas"* que tenha os pontos dados como pontas consecutivas. Use as diagonais de um pentágono regular. Modifique as posições dos pontos dados e verifique o que acontece com a “estrela”.

b) Construa uma ferramenta *“Estrela”* em que ao se clicar em dois pontos, deve ser construída uma estrela com pontas consecutivas nos pontos escolhidos.

c) Colocar nome e salvar como ATIVIDADE17.GGB.



18 Atividade 18

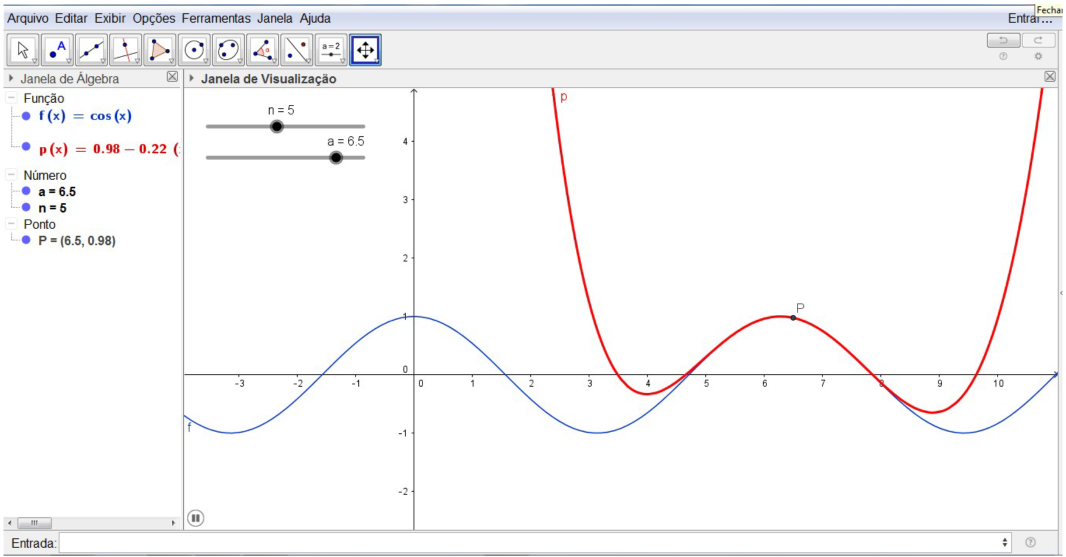
O polinômio de Taylor de grau n da função $f(x)$, em torno do ponto $x = a$ é calculado através do comando `PolinômioDeTaylor[f(x), a, n]`.

a) Defina duas constantes (seletores) a e n, sendo que n deve ser inteiro variando de 1 a 10.

b) Dada uma função $f(x)$ (por exemplo, $f(x) = \cos x$), desenhe seu gráfico na cor azul e destaque um ponto $P = (a, f(a))$.

c) Construa o gráfico (vermelho, com traçado mais grosso do que o gráfico de $f(x)$) do polinômio de Taylor de grau n de $f(x)$ em torno de $x = a$.

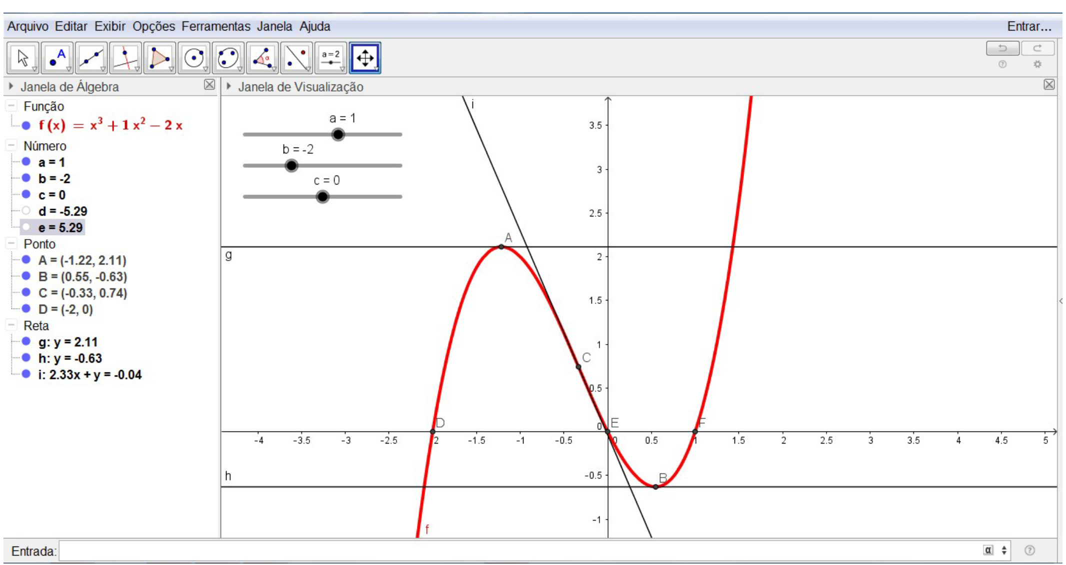
d) Aproxime o gráfico (*zoom*) para visualizar o fato de que o polinômio de Taylor é muito próximo do gráfico da função dada nas vizinhanças do ponto P. Modifique os valores de n e de a.



19 Atividade 19

a) Dadas constantes a, b e c (seletores), construa o gráfico da função polinomial $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ na cor vermelha e usando um estilo do traço com grossura maior do que 1.

b) Determine seus valores de máximos ou mínimos, raízes, pontos de inflexão e suas retas tangentes nesses pontos. Use os comandos `Raiz[f(x)]`, `Extremo[f(x)]`, `PontoDeInflexão[f(x)]`, `f'(x)` e `f''(x)`.



20 Atividade 20

O comando `Sequência[f(k), k, a, b]` define a lista de valores $\{f(a), f(a+1), \ldots, f(b)\}$ e o comando `Soma[`*`lista`*`]` calcula a soma de todos os elementos da *lista* dada.

a) Defina uma constante n que pode assumir valores inteiros de 1 a 50.

b) Construa o gráfico da função $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}$.

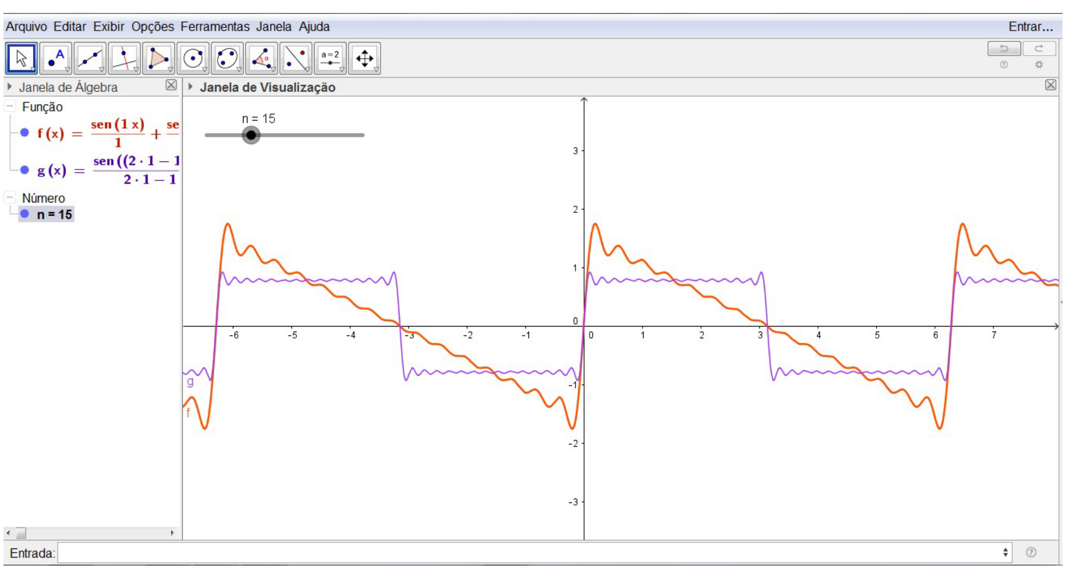
c) Usando outra cor, construa também o gráfico da função $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}((2k-1)x)}{2k-1}$.

d) Coloque um título:

“Gráfico das somas parciais de SÉRIES DE FOURIER com n = ” $+n$.

e) Modifique o valor de n para ver o que acontece.

f) Colocar nome e salvar como ATIVIDADE20.GGB.



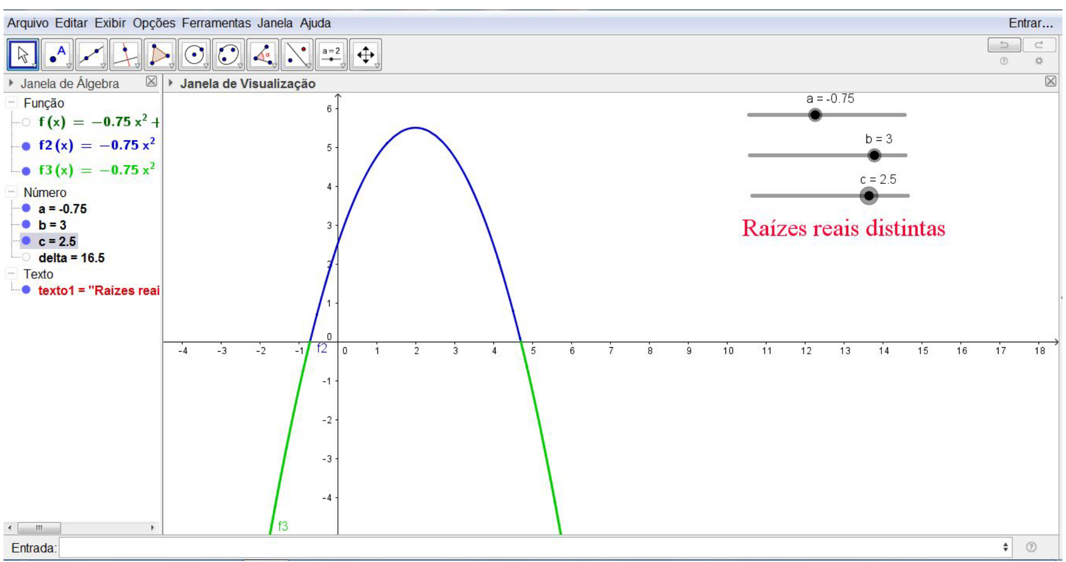
21 Atividade 21

a) Dadas constantes a, b e c (seletores), construa o gráfico da função polinomial $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ usando duas cores diferentes: cor azul se $f(x) \geq 0$ e cor verde se $f(x) < 0$, usando um estilo do traço com grossura maior do que 1.

b) Mostre uma mensagem que deve variar de acordo com o $\Delta = b^2 - 4ac$: *"Raízes reais distintas"*, *"Raízes complexas"* ou *"Raízes reais iguais"*.

Comandos utilizados:

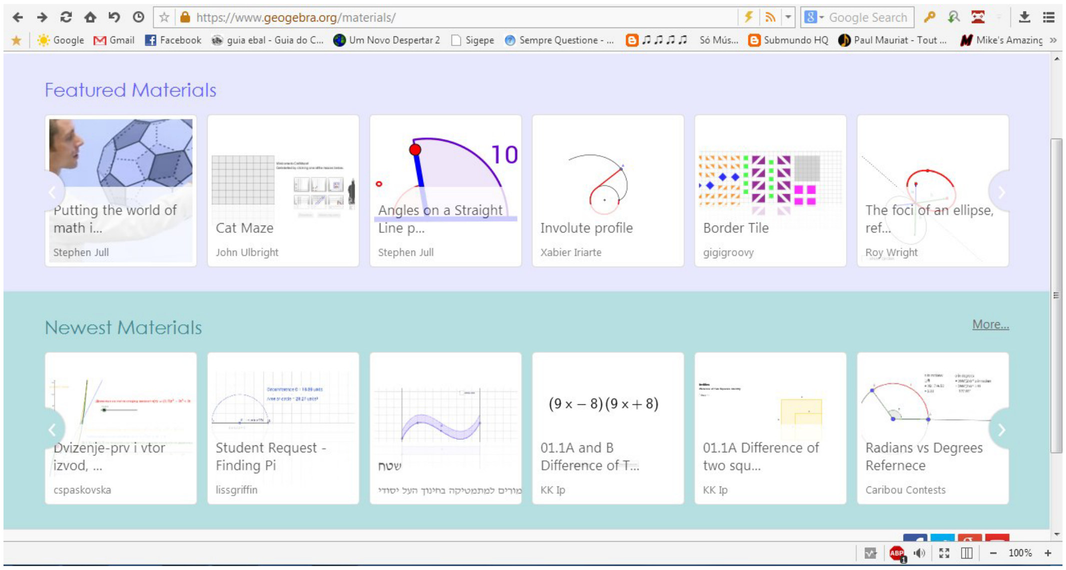
```
f2(x) = Se[f(x) >= 0, f(x)]
f3(x) = Se[f(x) < 0, f(x)]
Se[delta > 0, ``Raízes reais distintas'',
        Se[delta < 0, ``Raízes complexas'',
        ``Raízes reais iguais'']]
```



22 Referências

22.1 https://www.geogebra.org

Site oficial do GeoGebra, com aplicações e tutoriais em diversos idiomas.



22.2 http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA

Incrível *site* em francês de Daniel Mentrard. Contém mais de 8000 (oito mil!) aplicações de GeoGebra para Matemática e Física. Vale a pena visitá-lo várias vezes.