

# UM BREVE PASSEIO AO INFINITO REAL DE CANTOR

MARIA GORETE CARREIRA ANDRADE \*

## Resumo

O objetivo desse trabalho é apresentar, de maneira introdutória, uma exposição sobre o conceito de infinito real (ou em ato) de Cantor. Cantor mostrou que conjuntos infinitos não têm todos o mesmo tamanho (potência, cardinalidade), fazendo a diferenciação entre conjuntos enumeráveis e conjuntos não enumeráveis. Cantor provou que o conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  é enumerável (com cardinalidade igual à do conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$ , denotada por  $\aleph_0$ ) e o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é não enumerável (com cardinalidade, denotada por  $\mathfrak{c}$ , maior que a de  $\mathbb{N}$ ). Na demonstração de que  $\mathbb{R}$  é não enumerável foi utilizado o célebre argumento da diagonal de Cantor ou método diagonal. Cantor desenvolveu o seu conceito de Infinito Absoluto, que identificava a Deus. Os conceitos matemáticos inovadores propostos por Cantor enfrentaram uma resistência significativa por parte da comunidade matemática da época. Os matemáticos modernos, por seu lado, aceitam plenamente o trabalho desenvolvido por Cantor na sua Teoria dos Conjuntos, reconhecendo-a como uma mudança de paradigma da maior importância. Cantor, além de provar de uma forma simples e genial que existiam pelo menos duas cardinalidades de infinitos, formulou a hipótese do continuum que diz que não existem conjuntos de potência intermediária entre  $\aleph_0$  e  $\mathfrak{c}$ . Nos últimos anos de vida, Cantor tentou provar, sem o conseguir, essa hipótese e morreu demente, num hospício, em 1918. Somente em 1963, Paul Cohen mostrou que a Hipótese do Continuum era independente de todos os axiomas da Teoria dos Conjuntos. Poderia ser tomada tanto verdadeira como falsa. Cantor foi um gênio, renegado pelas suas descobertas, por Kronecker e Poincaré, dentre outros, mas também admirado por grandes matemáticos, como David Hilbert autor da célebre frase: “Ninguém nos expulsará do paraíso que Georg Cantor abriu para nós”. Neste trabalho apresentamos uma breve exposição sobre o infinito real de Cantor, o conceito de números cardinais infinitos e alguma coisa sobre aritmética cardinal.

## 1 Introdução

O conceito de infinito sempre provocou incontáveis discussões entre os matemáticos ao longo da história.

Zenão (495-435 a.C.), filósofo grego - apenas utilizando a idéia de infinito, conseguiu produzir paradoxos famosos, como o de Aquiles não ser capaz de alcançar a tartaruga.

Aristóteles (384-322 a.C.) recusava o infinito em ato (ou infinito real), isto é, considerado como entidade. Ele negava toda a existência física ao infinito, mas lhe reconhecia certa existência matemática. Por exemplo, cada natural é seguido de um outro, nenhum ponto é o último de uma reta. Os matemáticos tentaram se contentar com esse infinito em potência, evitando tanto quanto possível o infinito em ato.

Galileu Galilei (1564 - 1642) - em seu texto *Diálogos sobre as duas novas ciências* - primeira metade do século XVII, observou o seguinte fato:

A relação que associa  $n^2$  ao número natural  $n$  estabelece uma correspondência um-a-um (ou bijetora) entre os

---

\*IBILCE - UNESP - S. J. Rio Preto , SP, Brasil, gorete@ibilce.unesp.br

números naturais 1, 2, 3, ... e os quadrados 1, 4, 9, ... que parecem existir em menor quantidade.

1		1
2		4
3		9
$\vdots$		$\vdots$
n		$n^2$
$\vdots$		$\vdots$

Mas, como para cada número da coluna da esquerda corresponde um e um só número da coluna da direita e vice-versa, não temos dificuldades em aceitar que as duas têm a mesma quantidade de elementos.

Entretanto, todos os números da direita também podem ser encontrados à esquerda, ou seja, como observou Galileu, no conjunto infinito dos naturais a parte era igual ao todo. Ocorre que para quantidades finitas o axioma de que a parte é sempre menor que o todo era uma verdade indiscutível há séculos.

O mesmo problema ocorre no caso dos segmentos dos números reais entre 0 e 1 e dos números reais entre 0 e 2.

Bernardo Bolzano (1781-1848) examinou esses dois intervalos de números  $[0,1]$  e  $[0,2]$ , percebendo a correspondência bijetora:

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$$

$$f(x) = 2x, x \in [0, 1]$$

Generalizando,  $[0, 1]$  tem a mesma quantidade de números de  $[0, a]$  para todo número real  $a$ .

A razão profunda da desconfiança relativa ao infinito em ato é o paradoxo da reflexividade: “Se um conjunto é infinito, pode-se coloca-lo em correspondência bijetora com uma de suas partes próprias” (isto é, parte diferente do todo).

A crença geral de que **O todo é maior que a parte** deixa de valer aqui.

Bolzano propôs em sua obra “Os paradoxos do infinito”, publicada após sua morte em 1851, que se veja essas correspondências bijetoras entre o todo e uma de suas partes, como a marca característica das totalidades infinitas. Mais tarde, o matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916) estabeleceu que um conjunto é infinito se ele puder ser colocado em correspondência um-a-um com alguma de suas partes próprias e hoje adota-se frequentemente esse conceito em teoria dos conjuntos.

Posteriormente, com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, a solução do paradoxo da reflexividade, foi formulada claramente do seguinte modo: a relação “está contido em”, entre conjuntos, não deve ser confundida com a relação “possui um tamanho menor que”.

Para Bolzano, a álgebra da bijeções foi longa e tortuosa e ele não foi capaz de conduzir o desenvolvimento matemático a que ele próprio dera início.

O trabalho principal foi realizado pelo matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), descobridor de numerosas propriedades a respeito do tamanho de conjuntos infinitos, que lhe pareceram tocar o limite do paradoxo da reflexividade. Ele encontrou distinções entre o tamanho dos conjuntos infinitos!

Neste trabalho apresentamos uma breve exposição sobre o infinito real de Cantor, o conceito de números cardinais infinitos e alguma coisa sobre aritmética cardinal.

## 2 Contando o infinito

Primeiramente vamos formalizar a idéia de “tamanho” de conjuntos.

**Definição 2.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos quaisquer. Se existe uma função bijetora  $f : A \rightarrow B$ , dizemos que o conjunto  $A$  é equipotente ao conjunto  $B$  e denotamos por  $A \approx B$ . Dizemos também que eles tem igual potência ou mesmo número de elementos (ou mesma cardinalidade).*

A relação de equipotência é uma relação de equivalência.

1. Como para todo conjunto  $A$ , a aplicação  $id_A : A \rightarrow A$  dada por  $id_A(x) = x$  para todo  $x \in A$ , é bijetora então todo conjunto é equipotente a si mesmo. Logo vale a propriedade reflexiva para essa relação entre conjuntos.
2. Se  $A$  é equipotente a  $B$ , isto é, se existe  $f : A \rightarrow B$  bijetora, então, como  $f^{-1} : B \rightarrow A$  é também bijetora,  $B$  também é equipotente a  $A$ . Portanto vale a propriedade simétrica.
3. Se  $A$  é equipotente a  $B$  e se  $B$  é equipotente a  $C$ , então existe  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  bijetoras. Daí  $g \circ f : A \rightarrow C$  também é bijetora e portanto  $A$  é equipotente a  $C$ . Portanto vale a propriedade transitiva.

A cada conjunto  $A$  está associado um objeto  $|A|$  chamado número cardinal de  $A$ , ou cardinalidade de  $A$ , tal que  $|A| = |B|$  se, e somente se,  $A$  é equipotente a  $B$ .

Outras notações para a cardinalidade de  $A$ :

$$\begin{aligned} \bar{A}, \\ c(A), \\ card(A), \\ \#A. \end{aligned}$$

**Definição 2.2.** *Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $\#A \leq \#B$  se existe uma aplicação  $f : A \rightarrow B$  injetora ( $A$  é equipotente a um subconjunto de  $B$ ). Se  $\#A \leq \#B$  e  $\#A \neq \#B$  dizemos que  $\#A < \#B$ .*

Definimos os cardinais finitos (números cardinais de conjuntos finitos) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \#\emptyset &= 0 \\ \#\{0\} &= 1 \\ \#\{0, 1\} &= 2 \\ &\vdots \\ \#\{0, 1, \dots, n-1\} &= n \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que, se  $\#A = n$  então  $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$ .

Quantos elementos tem um conjunto infinito?

Cantor chegou à noção de infinito - infinito real, e não a infinidade potencial de limites por séculos utilizada pelos matemáticos - sem considerar diretamente os números, mas sim os conjuntos.

Cantor começou procurando atribuir “tamanhos”, que ele chamou de potências, aos diversos tipos de conjuntos de infinitos elementos. A esses tamanhos deu o nome de “números transfinitos”. A princípio denotou o menor

número transfinito, que é a cardinalidade do conjunto dos números naturais, por  $\omega$

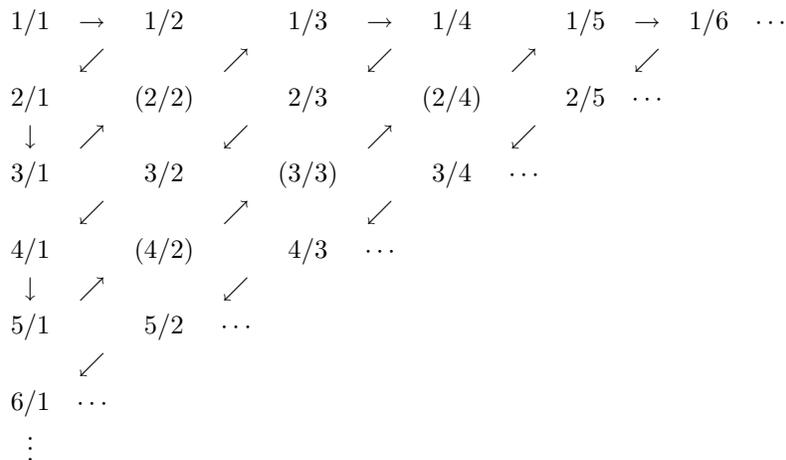
Todo conjunto infinito possui um subconjunto equipotente a  $\mathbb{N}$ . Logo a cardinalidade de qualquer conjunto infinito é maior ou igual à cardinalidade dos naturais.

Quando os elementos de um conjunto podem ser colocados em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais, diz-se que ele é contável ou **enumerável** e sua potência (ou cardinalidade) também é  $\omega$ .

O primeiro conjunto a ser comparado com os dos números naturais foi o dos racionais.

Cantor dispôs aqueles números em sucessivas linhas horizontais, em cada linha denominadores em ordem crescente, a partir de 1. Os numeradores, em cada coluna crescem de cima para baixo, também a partir de 1. É fácil ver que todos os números racionais positivos estão contidos no quadro, inclusive as repetições com  $1/2$ ,  $2/4$ ,  $3/6$ , etc ( para os negativos vale o mesmo raciocínio).

Seguindo o esquema de flechas na figura, vê-se que podemos associar um único número natural a cada número racional, inclusive desconsiderando as repetições que aparecem entre parênteses. Portanto a potência dos racionais é a mesma dos naturais, ou seja,  $\omega$ .



Em 1874, Cantor percebeu entretanto, que o conjunto dos números reais não pode ser posto em bijeção com o dos naturais: ele é de tamanho estritamente maior. Por um método simples e elegante, denominado raciocínio diagonal, Cantor provou que os números reais não são enumeráveis e chamou a potência daquele conjunto de  $c$  (de contínuo).

O método consiste em supor que exista uma bijeção  $f$  entre o conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$  e o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ . Trabalha-se, então, sobre a diagonal da tabela definida pela bijeção - o  $i$ -ésimo dígito do número real  $f(i)$  - e se deduz uma contradição.

Para ver isso, notemos primeiramente que  $\mathbb{R}$  é equipotente a  $]0, 1[$ . De fato, a aplicação

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow ]0, 1[$$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{1 + |x|} + 1 \right)$$

é uma bijeção entre  $\mathbb{R}$  e  $]0, 1[$ .

Usando o método diagonal de Cantor, mostremos que  $\mathbb{R}$  não é enumerável.

De fato, vamos supor que  $\mathbb{R}$  seja enumerável. Como  $\mathbb{R} \approx ]0, 1[$ , então o intervalo  $]0, 1[$  também é enumerável. Temos então  $]0, 1[ = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ . Escolha para cada  $a_k$  uma representação decimal infinita dada por  $a_k = 0, x_{k1}x_{k2} \dots x_{kn} \dots$

Assim

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0, x_{11}x_{12} \dots x_{1n} \dots \\
a_2 &= 0, x_{21}x_{22} \dots x_{2n} \dots \\
&\vdots \\
a_n &= 0, x_{n1}x_{n2} \dots x_{nn} \dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Seja  $b = 0, b_1b_2 \dots$  o elemento do intervalo  $]0, 1[$  definido da seguinte forma:

$$b_j = \begin{cases} 1, & \text{se } x_{jj} \neq 1 \\ 0, & \text{se } x_{jj} = 1 \end{cases}.$$

Da definição de  $b$  segue que  $b_j \neq x_{jj}, \forall j = 0, 1, 2, \dots$ , e assim  $b \neq a_k$  para todo  $k$ . Portanto  $b \notin ]0, 1[$ , o que é um absurdo e assim  $\mathbb{R}$  não pode ser enumerável.

Cantor mostrou também que os conjuntos infinitos podem apresentar uma infinidade de tamanhos. Para isso usou o seguinte resultado:

**Proposição 2.1.** *Sejam  $S$  um conjunto e  $P(S) = \{A; A \subseteq S\}$  o conjunto das partes de  $S$ . Então  $S$  não é equipotente a  $P(S)$ .*

*Demonstração.* Vamos supor  $S \approx P(S)$ . Logo existe  $f : S \rightarrow P(S)$  bijeção. Seja  $A = \{x \in S; x \notin f(x)\}$ . Denotemos  $f(x) = B_x \subseteq S$ . Assim,  $A = \{x \in S; x \notin B_x\}$ . Portanto  $A \in P(S)$ . Como  $f$  é bijetora, existe  $p \in S$  tal que  $f(p) = A$ .

Se  $p \in A$  então  $p \notin f(p) = B_p = A$  (absurdo!).

Se  $p \notin A$  então  $p \in f(p) = B_p = A$  (absurdo!).

Logo não existe  $f : S \rightarrow P(S)$  bijetora. □

**Teorema 2.1.** (Cantor)  $\#A < \#P(A)$ . Logo dado qualquer número cardinal, sempre existe um número cardinal maior que o número cardinal dado.

*Demonstração.* A aplicação  $f : A \rightarrow P(A)$  definida por  $f(x) = \{x\}$  é injetora. Portanto,  $\#A \leq \#P(A)$ . Mas vimos que  $A$  não é equipotente a  $P(A)$ . Assim  $\#A \neq \#P(A)$ . Logo  $\#A < \#P(A)$ . □

Cantor provou também que a cardinalidade  $c$  de  $\mathbb{R}$  é igual a cardinalidade de  $P(\mathbb{N})$ , o conjunto das partes de  $\mathbb{N}$ . Apresentamos aqui uma prova desse resultado.

**Teorema 2.2.**  $\#\mathbb{R} = \#P(\mathbb{N})$

*Demonstração.* Seja  $C(A) = \{f : A \rightarrow \{0, 1\} \mid f \text{ é função}\}$ . Temos  $C(A) \approx P(A)$ .

De fato, basta definir

$$F : P(A) \rightarrow C(A) \text{ por } F(S) = f \mid f : A \rightarrow \{0, 1\} \text{ onde, para cada } a \in A, f(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in S \\ 0, & \text{se } a \notin S \end{cases}.$$

$F$  é uma função bijetora e o resultado segue. Para  $A = \mathbb{N}$  temos  $C(\mathbb{N}) \approx P(\mathbb{N})$

Agora, temos  $\#P(\mathbb{N}) = \#P(\mathbb{Q})$ , pois  $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ .

Seja  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{Q})$  definida por  $\psi(a) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$  (subconjunto formado por todos os números racionais menores que  $a$ ).  $\psi$  é injetora.

De fato, sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$ . Logo existe  $p \in \mathbb{Q} \mid a < p < b$ . Assim  $p \notin \psi(a)$  e  $p \in \psi(b)$ . Daí  $\psi(a) \neq \psi(b)$ . Temos então demonstrado que  $c \leq \#P(\mathbb{N})$ .

Mas  $P(\mathbb{Q}) \approx P(\mathbb{N}) \approx C(\mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \mid f \text{ é função}\}$

Sabemos que qualquer elemento  $x$  do intervalo  $]0, 1[$  pode ser escrito na forma  $0, x_1x_2x_3 \dots$  (representação decimal de  $x$ ).

Usando esse fato definimos  $F : C(\mathbb{N}) \rightarrow ]0, 1[$  por  $F(f) = 0, f(1)f(2)f(3) \dots$ . Assim  $F(f)$  é uma representação decimal constituída de zeros e uns.  $F$  é injetora.

De fato, se  $f, g \in C(\mathbb{N})$  com  $f \neq g$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f(n) \neq g(n)$ . Logo  $(0, f(1)f(2)f(3) \dots f(n) \dots) \neq (0, g(1)g(2)g(3) \dots g(n) \dots)$ . Portanto  $F(f) \neq F(g)$ . Assim  $\#C(\mathbb{N}) \leq \#]0, 1[$ . Mas  $\#C(\mathbb{N}) = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$  e  $\#]0, 1[ = \#\mathbb{R} = c$ . Portanto  $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq c$  e temos então  $c = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .  $\square$

Cantor se fazia então várias perguntas:

Se haviam vários números transfinitos, será que era possível ordena-los?

Haveria um infinito maior que todos os outros?

Havia algum número transfinito entre  $\omega$  e  $c$ ?

Cantor não estava satisfeito com a notação para números transfinitos e resolveu denota-los usando a primeira letra do alfabeto hebraico:

$\aleph$

*alef*

Assim,  $\omega = \#\mathbb{N}$  foi denotado por  $\aleph_0$  e  $c = \#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$  por  $2^{\aleph_0}$ .

Mas por que  $\aleph$ ?

Cantor conhecia a tradição judaica, o alfabeto hebraico e a “cabala” (misticismo judaico, tradição recebida dos judeus). As palavras seguintes começam com a letra  $\aleph$ , em hebraico.

*Ein Sof* - infinitude de Deus

*Ehad* - um

*Eloim* - Deus

$\aleph$  - representa a natureza infinita e unicidade de Deus - um novo começo para a Matemática: o começo do infinito real.

Como haviam muitos infinitos, cada vez maiores:

$$\aleph_0 = \#\mathbb{N} < \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = c < \#\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \dots,$$

Cantor levantou a hipótese de haver uma sequência de alefs:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_n, \dots,$$

apesar de não saber a colocação exata de cada um.

Esses resultados constituíram um primeiro avanço na compreensão do infinito real, e mostraram que as descobertas eram dignas de interesse. Eles permitiram construir uma hierarquia de totalidades infinitas.

Os primeiros resultados de Cantor não deixaram de encontrar críticas e reprovações. O matemático italiano Leopold Kronecker chegou a negar a publicação de um manuscrito de Cantor no *Journal de Crelle*, uma das mais

prestigiosas revistas de matemática da época, na qual Cantor nunca mais aceitou publicar seus trabalhos.

O artigo em questão continha um resultado surpreendente. Cantor, sempre preocupado em classificar os infinitos, descobriu com assombro que objetos de dimensões diferentes tinham a mesma ordem de infinito. Em termos de tamanho (no sentido dos conjuntos infinitos), uma reta e um plano (ou mesmo um espaço de dimensão  $n$ ) são idênticos. A respeito disso, ele escreveu, em 1877, para Dedekind

“Estou vendo, mas não acredito”

Vejamos uma prova desse fato::

- Plano:  $\mathbb{R}^2 \approx ]0, 1[ \times ]0, 1[ \approx ]0, 1[ \approx \mathbb{R}$ .

Agora defina  $\psi : ]0, 1[ \times ]0, 1[ \rightarrow ]0, 1[$  por

$$\psi(0, x_1 x_2 \dots, 0, y_1, y_2 \dots) = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \dots$$

Podemos mostrar que  $\psi$  é uma aplicação bijetora.

Segue que

$$\mathbb{R} \approx ]0, 1[ \stackrel{\psi}{\approx} ]0, 1[ \times ]0, 1[ \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Generalizando, por indução sobre  $n$ , mostra-se que

$$\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n.$$

Pela propriedade transitiva

$$\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^2 \approx \dots \approx \mathbb{R}^n, \forall n \geq 1.$$

### 3 Um pouco de Aritmética Cardinal

Cantor, que era um teórico consciencioso, desenvolveu uma aritmética do infinito, isto é, uma extensão, para os números que lhe servem como medida do infinito, das regras de cálculo que se aplicam aos números naturais, usados para medir o que é finito.

Nesta secção apresentamos uma breve exposição dessa aritmética cardinal.

#### I - Adição:

Sejam  $u$  e  $v$  dois números cardinais e  $A$  e  $B$  dois conjuntos tais que  $A \cap B = \emptyset$  e  $u = \#A$  e  $v = \#B$ . Definimos  $u + v = \#(A \cup B)$ .

Se  $A \cap B \neq \emptyset$  podemos considerar  $A' = A \times \{1\}$  e  $B' = B \times \{2\}$  e temos  $u = \#A = \#A'$  e  $v = \#B = \#B'$ . Além disso  $A' \cap B' = \emptyset$ . Definimos então  $u + v = \#(A' \cup B')$ .

Observamos que:

(i) A operação adição está bem definida, isto é,  $u + v$  não depende da escolha dos representantes disjuntos  $A$  e  $B$ .

(ii)  $u + v = v + u$  (comutativa).

(iii)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (associativa).

**Exemplo 3.1.** •  $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ .

De fato, temos  $\aleph_0 = \#\mathbb{N} = \#(\mathbb{N} \times \{1\}) = \#(\mathbb{N} \times \{2\})$ . Assim

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \#((\mathbb{N} \times \{1\}) \cup (\mathbb{N} \times \{2\})) = \aleph_0,$$

pois  $(\mathbb{N} \times \{1\}) \cup (\mathbb{N} \times \{2\})$  é enumerável, visto que é união de conjuntos enumeráveis.

• Por indução sobre  $n$  pode-se mostrar que

$$n \cdot \aleph_0 = \underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \dots + \aleph_0}_{n \text{ vezes}} = \aleph_0$$

## II - Multiplicação

Sejam  $u$  e  $v$  dois números cardinais e  $A, B$  conjuntos tais que  $u = \#A$  e  $v = \#B$ . Definimos:  $u \cdot v = \#(A \times B)$ .

Observamos que:

(i) A operação multiplicação está bem definida, isto é,  $u \cdot v$  não depende da escolha dos representantes disjuntos  $A$  e  $B$ .

(ii)  $u \cdot v = v \cdot u$  (comutativa).

(iii)  $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$  (associativa).

(iii)  $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$  (distributiva com relação à adição).

**Exemplo 3.2.** •  $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

De fato, seja  $A = \mathbb{N}$ . Temos que  $\aleph_0 = \#A$ . Daí  $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \#(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ . Mas  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$  é enumerável. Portanto  $\#(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \aleph_0$

• Podemos provar por indução sobre  $n$  que para  $n \geq 1$ ,

$$\aleph_0^n := \underbrace{\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \dots \cdot \aleph_0}_{n \text{ vezes}} = \aleph_0.$$

• Como  $\#\mathbb{R} = \#\mathbb{R}^2 = \dots = \#\mathbb{R}^n$  segue que, para  $n \geq 1$ ,  $c^n = c$ .

•  $\aleph_0 \cdot c = c$

De fato, temos  $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$ ,  $c = \#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ , pois  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ . Assim  $\aleph_0 \cdot c = \#(\mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}))$

Definimos  $F : \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$  por  $F(n, S) = \{n\} \times S$ .

Claramente  $F$  está bem definida. Além disso,  $F$  é injetora pois se  $F(n, S) = F(m, T)$  temos  $\{n\} \times S = \{m\} \times T$ . Daí  $\{n\} = \{m\}$  e  $S = T$ , o que nos dá  $(n, S) = (m, T)$ .

Logo  $\#(\mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})) \leq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ . Isto é,

$$\aleph_0 \cdot c \leq c$$

Por outro lado, considerando a aplicação  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{R}$  definida por  $h(x) = (0, x)$ , temos  $h$  claramente injetora. Assim  $\#\mathbb{R} \leq \#(\mathbb{N} \times \mathbb{R})$ . Isto é,

$$c \leq \aleph_0 \cdot c$$

Segue então o resultado.

## III - Potenciação

Sejam  $u$  e  $v$  dois números cardinais e  $A$  e  $B$  tais que conjuntos  $u = \#A$  e  $v = \#B$ . Seja  $A^B = \{f : B \rightarrow A \mid f \text{ é função}\}$ . Definimos:  $u^v = \#(A^B) = \#A^{\#B}$

Observamos que:

(i) A operação potenciação está bem definida, isto é,  $u^v$  não depende da escolha dos representantes disjuntos  $A$  e  $B$ .

(ii)  $(u.v)^w = u^w.v^w$ .

(iii)  $u^{v+w} = u^v.u^w$ .

(iii)  $u^{v.w} = u^{v^w}$ .

**Exemplo 3.3.** • *Seja  $A$  um conjunto. Então  $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$ .*

*De fato, vemos que  $\mathcal{P}(A) \approx \mathcal{C}(A)$ . Mas  $\mathcal{C}(A) = \{0, 1\}^A$ . Logo  $\#\mathcal{P}(A) = \#\mathcal{C}(A) = \#\{0, 1\}^A = 2^{\#A}$*

•  $c = 2^{\aleph_0}$  pois  $\#\mathbb{R} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

É importante observar que existe outro tipo de infinito introduzido por Cantor, que deve ser distinguido dos números cardinais, que é o infinito dos números ordinais, que não trataremos aqui. Os cardinais representam o tamanho dos conjuntos, vistos de maneira bruta, sem levar em conta a possível existência de uma ordenação entre seus elementos. O outro tipo de números infinitos de Cantor, os ordinais, serve para assinalar o tamanho dos conjuntos em termos de sua posição em uma sequência, ou seja, quando seus elementos são ordenados, a partir de uma boa ordem (uma ordem tal que todo subconjunto possui um elemento mínimo).

## 4 A Hipótese do Continuum

Cantor descobriu um problema de tamanha dificuldade, que ainda hoje não conseguimos dominar completamente: a “Hipótese do Continuum” (Contínuo).

O cardinal do conjunto dos números reais,  $c = 2^{\aleph_0}$ , chamado de contínuo, é estritamente maior que o cardinal dos números naturais,  $\aleph_0$ . A hipótese do contínuo diz que entre esses dois tamanhos de conjuntos infinitos não há nenhum outro. Ou seja:

“Não existe número cardinal  $u$  tal que  $\aleph_0 < u < c$ .”

Como Cantor designou por  $\aleph_1$  o menor cardinal depois de  $\aleph_0$ , a hipótese do contínuo é simplesmente:

$$c = 2^{\aleph_0}$$

Generalizando, designando por  $\aleph_{n+1}$  o menor cardinal depois de  $\aleph_n$ , temos:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \dots < \aleph_n < \dots$$

A hipótese generalizada do contínuo é a afirmação que

Não existe número cardinal  $u$  tal que  $\aleph_r < u < \aleph_{r+1}$ .

Ou que:

$$2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$$

Cantor morreu (com transtornos mentais) em uma clínica de repouso, em 1918, sem conseguir provar, nem descartar, a Hipótese do Continuum.

Em 1938, o matemático austríaco Kurt Godel (1906-1978) mostrou que em qualquer sistema haverá proposições que não podem ser provadas (Teorema da Incompletude de Godel). Mostrou também que a Hipótese do Continuum é consistente com os axiomas da Teoria dos Conjuntos (não produzia contradições). Godel, também desenvolveu transtornos mentais. Não conseguiu mostrar que a negação da Hipótese do Continuum também era consistente com a Teoria dos Conjuntos.

Em 1963, Paul Cohen (1934-2007), deu o segundo passo. Mostrou que a Hipótese do Continuum era independente de todos os axiomas da Teoria dos Conjuntos. Poderia ser tomada tanto verdadeira como falsa. Verdadeira ou não a Hipótese do Continuum não poderia ser provada nem refutada no sistema atual. Ganhou a medalha Fields por esse trabalho em 1966.

Esses dois resultados afirmam que quem aceita a teoria usual dos conjuntos pode, sem risco de introduzir contradições, adotar tanto a hipótese do contínuo, como sua negação.

*“Deus criou os números naturais. O resto é obra dos homens.”*  
*Leopold Kronecker (1823-1891)*

*“ A teoria dos conjuntos de Cantor é uma moléstia, uma doença perversa, da qual algum dia, os matemáticos estarão curados.”*  
*Henri Poincaré(1854-1912)*

*”Ninguém nos expulsará do paraíso que Georg Cantor abriu para nós”*  
*David Hilbert (1862-1943)*

## Referências

- [1] Aczel, A. D.; O Mistério do Alef: A Matemática, a Cabala e a Procura do Infinito, Editora Globo, 2003.
- [2] Delahaye, J. P.; *O infinito é um paradoxo na matemática?* , Scientific American Brasil, Especial Especial “As diferentes faces do infinito”, número 15, pp. 15-23.
- [3] Izar, S., Tadini, W.M.; Teoria Axiomática dos Conjuntos, Ed. UNESP, 1994.
- [4] Lipshutz, S., Topologia Geral, Coleção Schaum, Ed. Macgraw-Hill, 1973.
- [5] Lipshutz, S., Teoria dos Conjuntos, Coleção Schaum, Ed. Macgraw-Hill, 1972.