

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Lista de Exercícios - Matemática Elementar I**

Professor: Alexandre de Bustamante Simas - Sala 233

E-mail: alexandre@mat.ufpb.br / Home page: <http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/>

Lista 9 - Números primos, Pequeno Teorema de Fermat e Congruências

Data da entrega: 03/12/2010

1. Sejam  $a$  e  $b$  naturais com  $(a, b) = 1$ . Mostre que se  $ab$  é um quadrado perfeito, então  $a$  e  $b$  são quadrados perfeitos.
2. Mostre que a soma de todos os números naturais menores ou iguais a  $n$  divide o produto de todos os números naturais menores ou iguais a  $n$  se, e somente se,  $n + 1$  é composto.
3. Mostre que  $42|a^7 - a$  para todo número natural  $a$ . Dica: Use o pequeno teorema de Fermat.
4. Ache o resto da divisão de  $12^{p-1}$  por  $p$ , quando  $p$  é primo.
5. Sejam  $a, p$  naturais, com  $p$  primo. Mostre que se  $a^2 \equiv 1(p)$ , então  $a \equiv 1(p)$  ou  $a \equiv p - 1(p)$ .
6. Ache o resto da divisão de:
  - a)  $7^{10}$  por 51,
  - b) de  $5^{121}$  por 127,
  - c) de  $2^{100}$  por 11,
  - d) de  $13^{16} - 2^{25}5^{15}$  por 3.
7. Ache o resto da divisão de  $(116 + 17^{17})^{21}$  por 8.
8. Ache o resto da divisão de  $1! + 2! + \dots + (10^{10})!$  por 40.
9. Mostre que para todo  $n$  natural,  $19^{8n} - 1$  é divisível por 17.
10. Determine o resto da divisão de  $1^7 + 2^7 + \dots + 100^7$  por 7.
11. Determine o resto da divisão de  $1^6 + 2^6 + \dots + 100^6$  por 7.