

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Matemática Elementar I

Professor: Alexandre de Bustamante Simas - Sala 233

E-mail: alexandre@mat.ufpb.br / Home page: <http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/>

Lista 7 - Aritmética (Entrega dia 05/11/2010)

1. Sejam $n, a \in \mathbb{N}$. Calcule as somas:

$$a) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i; \quad b) \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} a^i; \quad c) \sum_{i=0}^n i(i-1) \binom{n}{i} a^i; \quad d) \sum_{i=0}^n i^2 \binom{n}{i} a^i.$$

2. Sejam $a, c \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$ac|bc \Leftrightarrow a|b.$$

3. Mostre que, para todo n ,

$$a) 9|10^n - 1; \quad b) 3|10^n - 7^n; \quad c) 8|3^{2n} - 1.$$

4. Mostre que se n é ímpar, $n^2 - 1$ é divisível por 8.

5. Mostre que se um número a não é divisível por 3, então a^2 deixa resto 1 na divisão por 3.

6. (Critério de divisibilidade por uma potência de 2). Seja um número natural a , representado por $a = a_n a_{n-1} \dots a_0$ (note que está é a representação e não um produto). Prove o fato de que $2^k | 10^k$ e use este fato para mostrar que 2^k divide a , se e somente se, o número $a_{k-1} \dots a_1 a_0$ (mais uma vez, esta é a representação do número e não um produto) é divisível por 2^k . Em particular, a é divisível por 2 se, e somente se, a_0 é 0, 2, 4, 6 ou 8; também, a é divisível por 4 se, e somente se o número $a_1 a_0$ é divisível por 4.

7. a) Mostre que um quadrado perfeito ímpar é da forma $4n + 1$;

b) Mostre que nenhum elemento da sequência 11, 111, 1111, 11111, ... é um quadrado perfeito. (Dica: use a letra a) e o exercício 6).

8. Mostre que o algarismo das unidades de um quadrado perfeito só pode ser 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.