UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Matemática Elementar I

Professor: Alexandre de Bustamante Simas - Sala 233
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 6 - Conjuntos finitos, infinitos, enumeráveis e não-enumeráveis
Data da entrega: 15/10/2010

1. a) Se X e Y são finitos e $X \cap Y = \emptyset$, mostre que $X \cup Y$ é finito, e que

$$\#(X \cup Y) = \#X + \#Y.$$

b) Use a letra a) para mostrar que se $Y \subset X$, e X é finito, então Y é finito, e $\#Y \leq \#X$.

2. Se X e Y são finitos, mostre que $X \times Y$ é finito e que $\#(X \times Y) = \#X \cdot \#Y$.

Dica: Comece mostrando que se $n = \#X$ e $m = \#Y$, existe uma bijeção $f : X \times Y \to \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$. Em seguida obtenha uma bijeção $g : \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_{nm}$, cheque, por exemplo, se $g(i,j) = (i-1)m + j$ é bijeção. Finalmente, tome $h = g \circ f$, e justifique que h é bijeção.

3. Mostre que existe $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$ injetora, se, e somente se, $n \leq m$.

4. Mostre que existe $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$ sobrejetora, se, e somente se, $n \geq m$.

5. Mostre que se A é um conjunto finito e b não pertence a A, então $A \cup \{b\}$ é finito.

6. Seja $f : X \to Y$, prove:

a) Se X é infinito e f é injetora, então Y é infinito;

b) Se Y é infinito e f é sobrejetora, então X é infinito.

Dica: Use a contra-positiva.

7. Sejam X um conjunto finito e Y um conjunto infinito. Prove que existe uma função injetora $f : X \to Y$ e uma função sobrejetora $g : Y \to X$.

Dica: Para mostrar que existe função sobrejetora g, mostre que existe uma função $h : \mathbb{N} \to X$ sobrejetora, e depois que existe uma função $p : Y \to \mathbb{N}$ sobrejetora (sabemos que existe $q : \mathbb{N} \to Y$ injetora, construa p a partir de q). Tome $g = h \circ p$.

8. Tome $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (sobrejetora, justifique porque essa função g existe) e $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, com regra $h(m,n) = n$. Mostre que $f = h \circ g$ é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sobrejetora, tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g^{-1}(\{n\})$ é infinito.

9. Mostre que o conjunto $\mathcal{P}$ de todos os polinômios com coeficientes inteiros é enumerável.

Dica: Considere $P_{m,n} = \{p \in \mathcal{P}; p(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i; \text{com } |a_1| + \cdots + |a_n| \leq m\}$. Mostre que cada $P_{m,n}$ é finito, e que $\mathcal{P} = \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} P_{m,n}$, e justifique porque $\mathcal{P}$ é enumerável.

10. Prove que o conjunto $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ (o conjunto das partes de $\mathbb{N}$) é não-enumerável.

Dica: Mostre que $f : \mathbb{P}(\mathbb{N}) \to S$, onde S é o conjunto de todas as sequências infinitas, como $s = (0,1,1,0,0,0,1,1,\ldots)$, formada pelos símbolos 0 e 1, com regra $f(X) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, onde $a_i = 1$ se $i \in X$ e $a_i = 0$ se $i \notin X$, é bijeção. Como S não é enumerável, conclua que $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ não pode ser enumerável.

11. Seja A um conjunto não-enumerável. Mostre que se $B \neq \emptyset$, então $A \times B$ é não-enumerável.

Dica: Construa uma função injetora $f : A \to A \times B$.

12. Seja Y enumerável e $f : X \to Y$ tal que $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ é enumerável. Prove que X é enumerável.