UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Cálculo Diferencial e Integral I

Professor: Alexandre de Bustamante Simas - Sala 233
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 6 - Derivadas (Continuação)

1. Calcule as derivadas de $f(x)$:

a) $f(x) = 5^x + \log_3 x$, b) $f(x) = 2^{x^2}$, c) $f(x) = 3^{2x+1} + \log_2(x^2+1)$, d) $f(x) = (2x+1)^x$,

e) $x^{\text{sen}(3x)}$, f) $f(x) = (3+\cos(x))^x$, g) $x^\pi + \pi^x$.

2. A função $y = f(x)$ é dada implicitamente pela equação $xy + 3 = 2x$. Mostre que $x\dfrac{dy}{dx} = 2 - y$. Calcule $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}$.

3. Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e de y, onde $y = f(x)$ é uma função diferenciável dada implicitamente pela equação:

a) $x^2 - y^2 = 4$, b) $y^3 + x^2y = x + 4$, c) $xy^2 + 2y = 3$, d) $y^5 + y = x$, e) $x^2 + 4y^2 = 3$,

f) $xy + y^3 = x$, g) $xe^y + xy = 3$, h) $y + \ln(x^2+y^2) = 4$, i) $5y + \cos(y) = xy$, i) $2y + \text{sen}(y) = x$.

4. Determine a derivada:

a) $f(x) = x\text{arctg}(x)$, b) $f(x) = \text{arcsen}(x^3)$, c) $f(x) = \text{arctg}(x^3)$, d) $f(x) = e^{3x}\text{arcsen}(2x)$,

e) $f(x) = \dfrac{e^{-x}\text{arctg}(e^x)}{\text{tg}(x)}$.

5. *Função arco-co-seno.* A função $f(x) = \cos(x), 0 \leq x \leq \pi$, é inversível, e sua inversa é a função $f^{-1}(x) = \arccos(x), -1 < x < 1$. Calcule $\arccos'(x)$.

6. *Função arco-secante.* A função $f(x) = \sec(x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ é inversível, e sua inversa é a função $f^{-1} = \text{arcsec}(x), x \geq 1$. Calcule $\text{arcsec}'(x)$.

7. Calcule a derivada:

a) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, b) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}(x)}{1-\text{sen}(x)}}$, c) $f(x) = (2+\text{sen}(x))^x$,

d) $f(x) = \frac{1}{2}(\text{tg}(x))^2 + \ln(\cos(x))$, e) $f(x) = \log_x(a)$.

8. Determine a reta tangente à elipse $x^2 + 2y^2 = 9$ e que intercepta o eixo y no ponto de ordenada $\frac{9}{4}$.

9. Determine as retas tangente e normal à função $f(x) = \log_a(x)$, onde $a > 1$ e $x > 1$.

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que, quaisquer que sejam x e t:

$$|f(x) - f(t)| \leq |x-t|^2.$$

Calcule $f'(t)$.

11. Suponha f definida em $\mathbb{R}$, derivável em 0 e $f(0) = 0$. Prove que existe g definida em $\mathbb{R}$, contínua em 0, tal que $f(x) = xg(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

12. Sejam f e g definidas em $\mathbb{R}$, com g contínua em 0, e tais que, para todo x, $f(x) = xg(x)$. Mostre que f é derivável em 0.

13. Sejam f e g deriváveis em p e tais que $f(p) = g(p) = 0$. Supondo que $g'(p) \neq 0$, mostre que

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)}.$$

14. Sejam f e g deriváveis até a segunda ordem em p, e tais que $f(p) = g(p) = f'(p) = g'(p) = 0$. Mostre que se $g''(p) \neq 0$, então:

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f''(p)}{g''(p)}.$$

15. Calcule os seguintes limites (dica: use os exercícios 14 e 15):

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2 + \operatorname{sen}(x)}$, b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{2x-\pi} - 1}{2\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(6x) - 2}$, c) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x\sqrt[3]{x+1}}{\operatorname{sen}(\pi x^2)}$, d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \sqrt[3]{x^2 + \operatorname{sen}(3x)}}{\ln(x^2 + x + 1)}$,

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2} + x - 1}{e^{4x} + x^5 - 1}$, f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\pi x))}{2 - \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}}$, g) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{100} + x - 2}{x^{99} - x}$, h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^{10} - 9x^2 + 8x}$,

i) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^5 + 3x + 4}{x^{20} + 3x + 2}$.