UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Matemática Elementar I

Professor: Alexandre de Bustamante Simas - Sala 233
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 5 - Naturais

Princípio da boa ordenação

1. Mostre que $\mathbb{N}$ possui a propriedade arquimediana, ou seja, mostre que dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $1 \leq a < b$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $na > b$.

Um conjunto $A \neq \emptyset$ é dito *limitado superiormente* se existir um número $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\forall x \in A, x \leq n.$$

Diremos, neste caso, que n é uma cota superior para A.

Um número $a \in \mathbb{N}$ é dito o *maior elemento* de A se $a \in A$, e a é uma cota superior para A.

2. Mostre que se $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, é limitado superiormente, então A possui um maior elemento.

3. Sejam $a, m \in \mathbb{N}$, com $a \geq 2$. Então, mostre que existe um número natural n tal que $a^n > m$. Dica: Use o exercício anterior.

Lembremos que um número natural $p \neq 1$ chama-se *primo* quando não pode ser expresso como o produto $p = mn$, com $m, n \in \mathbb{N}$, a menos que $m = 1$ e $n = p$, ou $m = p$ e $n = 1$, isto é, p é primo se seus fatores m e n não forem ambos menores do que p.

4. Prove que todo número natural é: 1, primo, ou produto de números primos. Dica: Considere X, o conjunto dos números que são primos, produto de primos, ou 1, e mostre que se $m \in X$ e $n \in X$, então $mn \in X$. Tome agora $Y = \mathbb{N} \setminus X$. Queremos mostrar que $Y = \emptyset$, então, suponha, por absurdo, que Y é diferente de vazio, e use o princípio da boa ordenação.

Princípio da indução

5. Prove as seguintes fórmulas por indução:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 4 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2$.

6. Prove, por indução, as seguintes desigualdades:

a) $\forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}, n! > 2^n$.

b) $\forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}, n^2 > 2n + 1$.

c) $\forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}, \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \leq n$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

7. Prove, por indução, que:

a) O produto de três números naturais consecutivos é múltiplo de 6.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ é múltiplo de 7.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ é múltiplo de 11.

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n^5 - n$ é múltiplo de 30.

e) Para todo n, natural ímpar, $n^3 - n$ é múltiplo de 24.

8. Encontre o erro na seguinte "demonstração" por indução: Mostraremos por indução que todas as estrelas do universo têm o mesmo tamanho. Vamos fazer isso mostrando que para todo $n \geq 1$, se $S \subset \mathbb{N}$ é um conjunto com n estrelas, então todas as estrelas em S têm o mesmo tamanho. Se S só possui um elemento, então a afirmação é evidentemente verdadeira. Suponha agora que a afirmação é verdadeira para todos os conjuntos com n elementos. Seja agora um conjunto qualquer com $n+1$ elementos: $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \subset \mathbb{N}$. Ora, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ é um conjunto com n elementos, então $a_1, \ldots, a_n$ têm o mesmo tamanho. Mas, $\{a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ também é um conjunto de n elementos, então $a_2, \ldots, a_{n+1}$ têm o mesmo tamanho. E portanto, $a_1, \ldots, a_{n+1}$ têm o mesmo tamanho. Logo, o resultado é válido para conjuntos com $n+1$ elementos, e por indução, todas as estrelas têm o mesmo tamanho.

9. Critique a argumentação: Vamos mostrar que todo número natural é pequeno. Evidentemente, 1 é um número pequeno. Além disso, se n é pequeno, $n+1$ também o será, pois o número não deixa de ser pequeno e passa a ser grande somando-lhe apenas uma unidade. Logo, por indução, todo número natural é pequeno.