UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Matemática Elementar I

Professor: Alexandre de Bustamante Simas - Sala 233
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 4 - Relações

Relação

1. Seja $A = \{0, 1, 2, 3\}$, e sejam as relações:

$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$ e $\mathcal{S} = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$.

a) Mostre que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são relações binárias em A.

b) Encontre: $\mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{S}^{-1}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$, $\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}$, $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1}$ e $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$.

2. Sejam $\mathcal{R}$ uma relação de A em B, $\mathcal{S}$ uma relação de B em C, e $\mathcal{T}$ uma relação de C em D. Então:

a) $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$; b) $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$; c) $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.

Relembre que dada uma relação $\mathcal{R}$ de A em B. Então o domínio de $\mathcal{R}$, denotado por $D(\mathcal{R})$, é o conjunto

$$D(\mathcal{R}) = \{x \in A; \exists y \in B, x\mathcal{R}y\}.$$

A imagem de $\mathcal{R}$, denotada por $Im(\mathcal{R})$, é o conjunto

$$Im(\mathcal{R}) = \{y \in B; \exists x \in A, x\mathcal{R}y\}.$$

3. Mostre que $D(\mathcal{R}) \subset A$ e que $Im(\mathcal{R}) \subset B$. Use isso para concluir que $\mathcal{R} \subset D(\mathcal{R}) \times Im(\mathcal{R})$.

4. Sejam $\mathcal{R}$ uma relação de A em B e $\mathcal{S}$ uma relação de B em C. Mostre que:

a) $D(\mathcal{R}) = Im(\mathcal{R}^{-1})$; b) $Im(\mathcal{R}) = D(\mathcal{R}^{-1})$; c) $D(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subset D(\mathcal{R})$; d) $Im(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subset Im(\mathcal{S})$.

Seja $f : X \to Y$ uma função. Defina o gráfico da função f como o conjunto:

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in X\}.$$

5. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que:

a) $G(f) \subset X \times Y$ e conclua que $G(f)$ é uma relação de X em Y;

b) Seja a relação $\mathcal{R} = G(f)$. Mostre que o domínio de f é dado por $D(\mathcal{R})$ e que a imagem de f é dada por $Im(\mathcal{R})$;

c) Dada uma relação $\mathcal{S}$ de X em Y, mostre que $\mathcal{S}$ é o gráfico de uma função se e somente se $D(\mathcal{S}) = X$ e para todo $x \in D(\mathcal{S}) = X$ existe um único y em Y tal que $(x, y) \in \mathcal{S}$;

d) Mostre que f é invertível se e somente se $\mathcal{R}^{-1}$ define o gráfico de uma função, onde $\mathcal{R} = G(f)$.

Relações de equivalências

6. Mostre que dado um conjunto $A \neq \emptyset$, a seguinte relação, define uma relação de equivalência:

$$\forall x, y \in A, x \sim y \Leftrightarrow x = y.$$

7. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, defina:

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}.$$

Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$. Mostre que nesse caso $A/\sim$ pode ser identificado com o intervalo $[0,1)$, e que $\overline{0} = \overline{1}$.

8. Dados $x, y \in \mathbb{N}$, defina:

$$x \sim y \Leftrightarrow x + y = 10.$$

Então, mostre que $\sim$ não é classe de equivalência em $\mathbb{N}$.

9. Seja $\sim$ a relação em $\mathbb{Z}$ dada por:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, x - y = 5n.$$

Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência. Encontre as classes de equivalência módulo $\sim$ e encontre $A/\sim$.

10. Seja $\mathcal{R}$ uma relação em A. Dê um exemplo para mostrar que o seguinte argumento é falso: se $x\mathcal{R}y$, então, por simetria, $y\mathcal{R}x$, e por transitividade, $x\mathcal{R}x$. Assim, não precisamos da condição de reflexividade de $\mathcal{R}$ para definir relação de equivalência. (Sugestão: Note que a reflexividade implica que $D(\mathcal{R}) = A$).

11. Seja $\mathcal{R}$ uma relação em A e $D = \{(x, x); x \in A\}$. Mostre que:

a) $\mathcal{R}$ é reflexiva se, e somente se, $D \subset \mathcal{R}$;

b) $\mathcal{R}$ é simétrica se, e somente se, $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$;

c) $\mathcal{R}$ é transitiva se, e somente se, $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$.

12. Seja $\mathcal{R}$ uma relação reflexiva em A. Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em A se, e somente se, $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$.

13. Seja $\{\mathcal{R}_i\}_{i \in I}$ uma família de relações de equivalências em A. Mostre que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_i$ é uma relação de equivalência em A.

14. Dê exemplos de relações de equivalência $\sim$ em um conjunto A tais que:

a) $A/\sim = \{A\}$;

b) $\forall x \in A, \overline{x} = \{x\}$;

c) A seja um conjunto infinito, mas $A/\sim$ contenha exatamente 5 elementos;

d) A seja um conjunto infinito e $A/\sim$ também seja.

Dica: Use partições adequadas, juntamente com o teorema sobre partições e relações de equivalências.

15. Considere a relação de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, dada por:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência. Descreva a classe de equivalência $\overline{(a, b)}$ e o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}/\sim$.

Relação de ordem parcial

16. Considere a relação em $\mathbb{R}$ dada por

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \preceq b \Leftrightarrow a \leq b.$$

Mostre que $\preceq$ é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{R}$.

17. Considere a relação em $\mathbb{N}$:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x \preceq y \Leftrightarrow x \quad \text{é múltiplo de} \quad y.$$

Mostre que $\preceq$ é uma relação de ordem parcial, mas que não é de ordem total. Isto é, existem elementos $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a \npreceq b$ e $b \npreceq a$.

18. Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Considere a relação no conjunto das partes de A, $\mathbb{P}(A)$, dada por

$$\forall X, Y \in \mathbb{P}(A), \quad X \preceq Y \Leftrightarrow X \subset Y.$$

Mostre que $\preceq$ é uma relação de ordem parcial.

19. Seja $\mathcal{R}$ uma relação em A, e $D = \{(x, x); x \in A\}$. Mostre que $\mathcal{R}$ é anti-simétrica se, e somente se, $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subset D$.

20. Seja

$$A = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\} = (0, 1),$$

com a relação de ordem parcial natural de $\mathbb{R}$ (isto é, a relação dada no exercício 16). Mostre que A é um conjunto totalmente ordenado que não contém nem menor elemento, nem maior elemento. Mostre ainda que A é limitado inferiormente e limitado superiormente.

21. Seja

$$A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f \quad \text{é uma função}\}.$$

Para $f, g \in A$, defina:

$$f \preceq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x).$$

Mostre que $\preceq$ é uma relação de ordem parcial em A, mas que não é uma relação de ordem total.

22. Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dados $(a, b), (c, d) \in A$, defina:

$$(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow a < c \;\text{ ou }\; a = c \text{ e } b \leq d.$$

Mostre que $\preceq$ é uma relação de ordem parcial em A.