

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Lista de Exercícios - Cálculo Diferencial e Integral I**

Professor: Alexandre de Bustamante Simas - Sala 233

E-mail: alexandre@mat.ufpb.br / Home page: <http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/>

Lista 4 - Limites (Continuação)

1. Calcule os limites laterais:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ ,    b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$ ,    c)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$ ,    d)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$ ,  
e)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ , onde  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1, \\ 2x, & \text{se } x > 1, \end{cases}$   
f)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ , onde  $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < 1, \\ 2x^2, & \text{se } x > 1. \end{cases}$

2. Os limites abaixo existem?

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ ,    b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-1|}{x-1}$ ,  
c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ , onde  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1, \\ 2x-1, & \text{se } x > 1, \end{cases}$   
d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2}$ , onde  $g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1, \\ \frac{x^2}{2}, & \text{se } x > 1, \end{cases}$

3. Seja  $f$  a função com regra  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x > 1, \\ \frac{x-1}{\sqrt{2}(\sqrt{x+1}-2)}, & \text{se } x < 1. \end{cases}$  O limite  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  existe? A

função é contínua em 1?

4. Calcule os limites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x)$ , onde  $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$   
b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , onde  $f$  satisfaz, para todo  $x \neq 1$ ,

$$-x^2 + 3x \leq f(x) \leq \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

- c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , onde  $f$  satisfaz, para todo  $x$ ,

$$|f(x) - 3| \leq 2|x - 1|.$$

- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$ , onde  $g$  satisfaz, para todo  $x$ ,  $|g(x)| \leq x^4$ .

5. Calcule os limites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{x}$ ,    b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ ,    c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(x)}{x}$ ,    d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen}(x)}$ ,    e)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{sen}(x)}{x - \pi}$ ,  
f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\text{sen}(x)}$ ,    g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(x)}{\text{sen}(4x)}$ ,    h)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ ,    i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$ ,    j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \text{sen}(x)}{x^2 - \text{sen}(x)}$ ,  
l)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{tg}(x)}{x + \text{tg}(x)}$ ,    m)  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\text{sen}(x^2 - p^2)}{x - p}$ ,    n)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos(x^2 - 2x + 3)$ .

6. Calcule:

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$ ,    b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3}$ ,    c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$ ,    d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x+3}$ ,    e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+3}$ ,  
f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$ ,    g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2}$ ,    h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 50x + 1000}$ ,    i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^4 - 4x^3 + 1}$ ,  
j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{5 + \frac{2}{x}}$ ,    l)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 + 3}}$ ,    m)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x + 2}$ ,    n)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ ,  
o)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 - 1}$ ,    p)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x}}$ ,    q)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 + 1}$ ,    r)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x+3}$ .

7. Calcule:

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2$ ,    b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 - 5x + 2$ ,    c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^2 + x + 1}$ ,    d)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$ ,    e)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$ ,  
f)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4}$ ,    g)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4}$ ,    h)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ ,    i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{2x^2 + 1}$ ,  
j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 - 3x^3 + 50$ ,    l)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{x + 1}$ ,    m)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 6x + 1}{1000x^2 + x + 30}$ ,    n)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + x}{3 + x^2}$ ,  
o)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - 1}$ ,    p)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x+3}}{2x + 1}$ ,    q)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \sqrt{x^2 + 3}$ .

8. Os limites abaixo existem?

- a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{3-x}$ ,    b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ,    c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$ ,    d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-x}{x^2}$ ,    e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2 - x}$ ,    f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x^3 - x^2}$ ,  
g)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x^2+x}$ .

9. Mostre que a função  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , onde,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ , sempre admite uma raiz real.

10. Mostre que a equação  $x^3 - \frac{1}{1+x^4} = 0$  admite pelo menos uma raiz real.

11. Calcule  $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt[3]{2+3x^3}$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt[3]{2+3x^3}$ . Conclua que a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x - \sqrt[3]{2+3x^3}$  possui pelo menos uma raiz em  $\mathbb{R}$ .