UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Matemática Elementar I

Professor: Alexandre de Bustamante Simas - Sala 233
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 3 - Funções

1. Determine todas as funções de $X = \{a, b, c\}$ em $Y = \{1, 2\}$.

2. Sejam f, g, h funções de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ tais que $h(1) = 3$, $g(x) = 3$ e $f(2) = 5$. Calcule $f \circ g(3)$, $g \circ h(1)$ e $f \circ g \circ h(1)$.

3. Sejam $f : X \to Y$ e $g : W \to Z$ duas funções. Sabemos que se $Y = W$ (isto é, se o contra-domínio de f é igual ao domínio de g), podemos definir $g \circ f : X \to Z$ com regra

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Qual a menor condição que devemos impor entre f e g para garantirmos que podemos definir a composta $g \circ f$?

4. Dadas três funções $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ e $h : Z \to W$, mostre que:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

5. Dada uma função $f : X \to Y$ com regra $f(x)$. Podemos definir uma nova função $\tilde{f}$ com mesma regra e mesmo domínio que f, de tal forma que $\tilde{f}$ seja sobrejetora?

6. Sejam $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, onde $f(x) = ax+b$, $g(x) = cx+d$ e $h(x) = x^2+1$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Determine as funções: $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ f$, $f \circ h$, g^2, f^3, h^2 e $g \circ h \circ f$.

Imagens diretas e imagens inversas

7. Seja $f : X \to Y$ uma função. Se $A \subset B \subset X$ e $V \subset W \subset Y$. Mostre que $f(A) \subset f(B)$ e $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$.

8. Seja $f : X \to Y$ uma função. Se $A, B \subset X$, mostre que:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \subset f(B)$. Mostre com um exemplo que, em geral, não vale a igualdade;

c) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$. Mostre com um exemplo que, em geral, não vale a igualdade;

d) $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$.

9. Generalize o exercício 8 para famílias de conjuntos: Seja I um conjunto de índices e $\forall i \in I$, $A_i \subset X$. Seja $f : X \to Y$ uma função, então:

a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$, b) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

10. Sejam $f : X \to Y$ uma função, e $V, W \subset Y$. Mostre que:

a) $f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$, b) $f^{-1}(U \cap W) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(W)$, c) $f^{-1}(V \setminus W) = f^{-1}(V) \setminus f^{-1}(W)$, em particular, conclua que $f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c$.

11. Generalize o exercício 10 para famílias de conjuntos: Seja I um conjunto de índices e $\forall i \in I$, $A_i \subset X$. Seja $f : X \to Y$ uma função, então:

a) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$, b) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$.

12. Sejam $f : X \to Y$ uma função, $A \subset X$ e $V \subset Y$. Mostre que $A \subset f^{-1}(f(A))$ e que $f(f^{-1}(V)) = V \cap f(X)$ (logo, $f(f^{-1}(V)) \subset V$).

13. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, $A \subset X$ e $V \subset Y$. Mostre que:

a) $(g \circ f)(A) = g(f(A))$, b) $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$.

14. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, com $f(x) = x^2$. Calcule:

a) $f(\{0, -1, -2\})$, b) $f(\{0, 1, 2\})$, c) $f(\{0, 1, -1, 2, -2\})$, d) $f(\mathbb{Z})$,

e) $f^{-1}(\{0\})$, f) $f^{-1}(\{1\})$, g) $f^{-1}(\{4\})$, h) $f^{-1}(\{1, 4, -2\})$, i) $f^{-1}(\{2, -4\})$.

Funções injetoras, sobrejetoras e inversas

15. Para quais valores de a, b e c inteiros, a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é bijetora?

16. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções. Mostre que:

a) Se f e g são injetoras, então $g \circ f$ é injetora.

b) Se $g \circ f$ é injetora, então f é injetora.

c) Se $g \circ f$ é injetora e f é sobrejetora, então g é injetora.

d) Se f e g são sobrejetoras, então $g \circ f$ é sobrejetora.

e) Se $g \circ f$ é sobrejetora, então g é sobrejetora.

f) Se $g \circ f$ é sobrejetora e g é injetora, então f é sobrejetora.

g) Se f e g são bijetoras, então $g \circ f$ é bijetora.

h) Construa um exemplo em que $g \circ f$ é injetora, mas g não é injetora.

i) Se f é bijetora, então f^{-1} é bijetora.

17. Seja $f : X \to Y$ uma função. Prove que f é sobrejetora se, e somente se:

a) para todo conjunto Z, e todo par de funções $g : Y \to Z$ e $h : Y \to Z$, $g \circ f = h \circ f$ implica $g = h$.

b) para todo conjunto Z, e todo par de funções $g : Z \to X$ e $h : Z \to X$, $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$.

18. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que:

a) f é sobrejetora se, e somente se, para todo $B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

b) f é injetora se, e somente se, para todo $A \subset X$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

c) f é injetora se, e somente se, para todo par de conjuntos $A, B \subset X$, vale $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

d) f é injetora se, e somente se, para todo par de conjuntos $A, B \subset X$, vale $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Conjuntos de funções

Dados X e Y, seja $\mathcal{F}(X, Y) = \{f; f : X \to Y \text{ é função}\}$ o conjunto de todas as funções entre X e Y.

Também denota-se $\mathcal{F}(X,Y) = Y^X$.

19. Mostre que $b : Y^{\{1,2\}} \to Y^2$, onde $Y^2 = Y \times Y$, dada por $b(f) = (f(1), f(2))$ é uma bijeção (isto é, b é uma função bijetora).

20. Mostre que $b : Y^{\{1,2,3\}} \to Y^3$, onde $Y^3 = Y \times Y \times Y$, dada por $b(f) = (f(1), f(2), f(3))$ é uma bijeção.

21. Mostre que $b : Y^{\{1,2,\ldots,n\}} \to Y^n$, dada por $b(f) = (f(1), \ldots, f(n))$ é uma bijeção.

Os exercícios 19, 20 e 21 justificam a notação Y^X.