UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Matemática Elementar I

Professor: Alexandre de Bustamante Simas - Sala 233
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 2 - Conjuntos

União e Interseção

Dada uma família de índices I, e conjuntos A_i, onde $i \in I$, definimos:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x; \exists i \in I, x \in A_i\},$$

e

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x; \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

1. Seja $I = \{a, b\}$, defina $A_a = A$ e $A_b = B$, então mostre que

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x; x \in A \vee x \in B\} = A \cup B,$$

e

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x; x \in A \wedge x \in B\} = A \cap B.$$

2. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que:

a) $A \subset A$, b) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$, c) Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$,

d) $A \cup \emptyset = A$, e) $A \cup A = A$, f) $A \subset A \cup B$, g) $B \subset A \cup B$, h) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

i) $A \cap \emptyset = \emptyset$, j) $A \cap A = A$, l) $A \cap B \subset A$, m) $A \cap B = B \cap A$, n) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3. Dados conjuntos A, A', B e B', com $A \subset B$ e $A' \subset B'$. Mostre que $A \cup A' \subset B \cup B'$.

4. Mostre que $A \cup B = A$ se, e somente se, $B \subset A$.

5. Dados A, B e C conjuntos quaisquer, mostre que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

e

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Diferença e Complementar

6. Mostre que:

a) $A \setminus \emptyset = A$, b) $A \setminus A = \emptyset$, c) Se $A \cap B = \emptyset$, então $A \setminus B = A$ e $B \setminus A = B$.

Se estamos considerando um conjunto "universo" X, ou seja, estamos considerando conjuntos contidos em um conjunto X, então denotamos:

$$X \setminus A = A^c.$$

7. Sejam $A, B \subset X$, mostre que:

a) $A \cup A^c = X$, b) $A \cap A^c = \emptyset$, c) $[A^c]^c = A$, d) Se $B^c \subset A^c$, então $A \subset B$,

e) $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$, f) $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$, g) $A \setminus B = B^c \setminus A^c$, h) $A \setminus B = A \cap B^c$,

i) Se $A \subset B$, então $B^c \subset A^c$.

8. Sejam $A, B \subset X$, mostre que:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

e

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

9. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Mostre que:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,

d) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Produtos Cartesianos

Um par ordenado (a, b) de elementos de A é um elemento de $\mathbb{P}(\mathbb{P}(A))$ da forma:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

10. Mostre que $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

11. Mostre que:

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times D) \cap (C \times B)$,

d) $(A \times B) \setminus (C \times D) = [(A \setminus C) \times B] \cup [A \times (B \setminus D)]$.

12. Sejam A, B, C e D conjuntos com $A, B \neq \emptyset$. Mostre que $A \subset B$ e $C \subset D$ se, e somente se, $A \times C \subset B \times D$.

Famílias de Conjuntos

13. Seja I um conjunto de índices e uma família A_i, $i \in I$. Mostre que:

a) $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I}(A \cap A_i)$,

b) $A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I}(A \cup A_i)$,

c) $A \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I}(A \setminus A_i)$, conclua que $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$,,

d) $A \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I}(A \setminus A_i)$, conclua que $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$..

Conjunto das Partes

Relembre que $\mathbb{P}(X) = \{A; A \subset X\}$ é o conjunto das partes de X.

14. Sejam X e Y conjuntos. Demonstre as afirmações verdadeiras e dê contra-exemplos para as falsas.

a) Se $X \subset Y$, então $\mathbb{P}(X) \subset \mathbb{P}(Y)$,

b) Se $X \subset Y$, então $\mathbb{P}(Y \setminus X) = \mathbb{P}(Y) \setminus \mathbb{P}(X)$.

Topologia

Relembre que uma família de subconjuntos de X, T, é uma topologia se:

i) $\emptyset, X \in T$, ii) Para todo conjunto de índices I, conjuntos $A_i \in T$, $i \in I$, temos que $\bigcup_{i\in I} A_i \in T$,

iii) $\forall n \in \mathbb{N}, A_i \in T$, então $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in T$.

15. Mostre que $T = \{\emptyset, X\}$ é uma topologia em X.

16. Seja $X = \{1,2,3,4\}$. Mostre que são topologias em X:

a) $T = \{\emptyset, \{1,2,3,4\}\}$, b) $T = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$, c) $T = \mathbb{P}(X)$ (escreva explicitamente quem é $\mathbb{P}(X)$ neste caso).

17. Motre que $T = \mathbb{P}(X)$ é uma topologia em X.

18. Mostre que $T = \{A \subset X; A = \emptyset \vee A^c \text{ é finito}\}$ é uma topologia em X.

19. Seja $Y \subset X$. Se T_X é uma topologia em X, mostre que $T_Y = \{A \cap Y; A \in T_X\}$ é uma topologia em Y. Esta é a chamada topologia relativa em Y induzida por T_X.

Álgebra e σ-álgebra

Relembre que uma família de subconjuntos de X, $\mathbb{A}$, é uma álgebra se:

i) $\emptyset \in \mathbb{A}$, ii) Se $A \in \mathbb{A}$, então $A^c \in \mathbb{A}$, iii) Se $A, B \in \mathbb{A}$, então $A \cup B \in \mathbb{A}$.

20. Mostre que se $\mathbb{A}$ é uma álgebra de X, então:

a) $X \in \mathbb{A}$, b) Se $A, B \in \mathbb{A}$, então $A \cap B \in \mathbb{A}$, c) $A, B \in \mathbb{A}$, então $A \setminus B \in \mathbb{A}$.

21. Mostre que $\{\emptyset, X\}$ e $\mathbb{P}(X)$ são álgebras de X.

22. Seja $X = \{1,2,3,4\}$.

a) Cheque se as quantidades do exercício 16 são álgebras de X.

b) $\mathbb{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ é álgebra de X?

23. Seja $A \subset X$. Mostre que $\mathbb{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ é álgebra de X.

24. Seja $Y \subset X$ e seja $\mathbb{A}_X$ uma álgebra de X. $\mathbb{A}_Y = \{A \cap Y; A \in \mathbb{A}_X\}$ é álgebra de Y?

Relembre que uma família de subconjuntos de X, $\mathcal{A}$, é uma σ-álgebra se:

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$, ii) Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^c \in \mathcal{A}$, iii) Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

25. Mostre que se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de X, então:

a) $X \in \mathcal{A}$, b) Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, então $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

26. Cheque se as famílias nos exercícios 16, 21, 22 e 23 são σ-álgebras de X.

27. Seja $Y \subset X$ e seja $\mathcal{A}_X$ uma σ-álgebra de X. $\mathcal{A}_Y = \{A \cap Y; A \in \mathcal{A}_X\}$ é uma σ-álgebra de Y?

28. Seja $X = \mathbb{Z}$. A família $\mathcal{F} = \{A \subset X; A \text{ é finito} \vee A^c\text{é finito}\}$ é álgebra de X? $\mathcal{F}$ é σ-álgebra de X?

29. Mostre que toda σ-álgebra de X é uma álgebra de X. Vale a recíproca?

Alguns exemplos simples

30. Verdadeiro ou falso?

a) $\{a, a, b, c\} = \{a, b, c\}$, b) $\{a\} = \{a, \{a\}\}$, c) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$, d) $\{a\} \subset \{a, \{a\}\}$,

e) $\{\{a\}\} \subset \{a, \{a\}\}$, f) $\{a, b\} \subset \{a, \{a, b\}\}$, g) $\{a, b\} \in \{a, \{a, b\}\}$, h) $b \in \{a, \{a, b\}\}$,

i) $\emptyset \in \{\emptyset\}$, j) $\emptyset = \{\emptyset\}$, l) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$, m) $\{\emptyset\} \subset \{\{\emptyset\}\}$, n) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, o) $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.