UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Matemática Elementar I

Professor: Alexandre de Bustamante Simas - Sala 233
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 1 - Noções de Lógica

Conectivos

1. Construa a tabela verdade para os conectivos:

a) Negação: Dada uma sentença p, a sua negação $\neg p$ é uma nova sentença com o valor lógico oposto ao de p;

b) Conjunção: Dadas duas sentenças p e q, a sua conjunção $p \wedge q$ é uma sentença que só é verdade se p e q o forem;

c) Disjunção: Dadas duas sentenças p e q, a sua disjunção $p \vee q$ é uma sentença que só é falsa se p e q o forem;

d) Condicional: Dadas duas sentenças p e q, a condicional $p \rightarrow q$ só é falsa se p for verdade e q for falsa;

e) Bicondicional: Dadas duas sentenças p e q, a bicondicional $p \leftrightarrow q$ só é verdade se p e q tiverem os mesmos valores lógicos.

2. Prove que valem as propriedades:

a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$, b) $p \vee q \equiv q \vee p$, c) $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$,

d) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \equiv q)$, e) $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

3. Mostre que:

a) $p \wedge p \equiv p$, b) $p \wedge F \equiv F$, c) $p \wedge V \equiv p$, d) $p \wedge \neg p \equiv F$, e) $p \vee p \equiv p$,

f) $p \vee F \equiv p$, g) $p \vee V \equiv V$, h) $p \vee \neg p \equiv V$.

4. Mostre que <u>não</u> vale a equivalência:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r),$$

isto é, o conectivo condicional não é associativo.

5. Construa a tabela verdade para o conectivo disjuntivo (também conhecido como disjunção exclusiva), denotado por $\sqcup$, tal que $p \sqcup q$ é verdade se e somente se apenas uma das duas sentenças p ou q é verdade. Além disso, mostre que valem as propriedades:

a) $p \sqcup q \equiv q \sqcup p$, b) $(p \sqcup q) \sqcup r \equiv p \sqcup (q \sqcup r)$, c) $\neg(p \sqcup q) \equiv (p \leftrightarrow q)$.

Cálculo sentencial

6. (Conjunção): Mostre que

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r).$$

7. (Disjunção): Mostre que

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r).$$

8. (Distributividade): Mostre que

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$

e que

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

9. (Leis de De Morgan): Mostre que

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q,$$

e que

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q.$$

10. Mostre que

$$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q),$$

o que mostra que a conjunção pode ser obtida da combinação da disjunção com a negação.

11. (Condicional): Mostre que a) $p \to q \equiv (\neg p) \vee q$, b) $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$.

12. Mostre que vale a contra-positiva:

$$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p.$$

13. Simplifique as sentenças abaixo usando as propriedades do cálculo sentencial obtidas acima:

a) $\neg(p \vee q) \vee (p \wedge q)$, b) $(\neg p \vee q) \wedge p$, c) $\neg(((p \vee q) \wedge \neg q) \vee (q \wedge r))$,

d) $\neg((\neg p \to \neg q) \vee ((q \wedge p) \leftrightarrow \neg p))$, e) $(p \vee q) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$.

14. Mostre que são tautologias:

a) $V \vee p$, b) $p \vee \neg p$, c) $p \to p$, d) $p \leftrightarrow p$.

15. (Modus Ponens): Mostre que a sentença abaixo é uma tautologia:

$$[(p \to q) \wedge p] \to q.$$

16. Mostre que são tautologias: a) $p \to p \vee q$, b) $p \wedge q \to p$, c) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$,

d) $\neg q \wedge (p \to q) \to \neg p$.

17. Quais das sentenças abaixo são tautologias?

a) $(p \wedge q \to r) \to (p \to (q \to r))$,

b) $(p \to (q \to r)) \to (p \wedge q \to r)$,

c) $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$,

d) $(p \to q) \to (p \vee r \to q \vee r)$,

e) $(p \to q) \to (p \wedge r \to q \wedge r)$.

18. Mostre que a sentença abaixo é uma tautologia:

$$[p \to (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to r].$$

19. A sentença abaixo é uma tautologia?

$$[(p \wedge q) \to r] \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to r)].$$

20. Mostre que a sentença abaixo é uma tautologia:

$$[(p \to q) \wedge (p' \to q')] \to (p \vee p' \to q \vee q').$$

Quantificadores

21. Mostre que

a) $[\forall x \in X, p(x)] \vee [\forall x \in X, q(x)] \Rightarrow \forall x \in X, (p(x) \vee q(x))$,

b) $\forall x \in X, p(x) \Rightarrow \exists x \in X, p(x)$,

c) $\exists x \in X, (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow [(\exists x \in X, p(x)) \wedge (\exists x \in X, q(x))]$,

d) $\exists x \in X, \forall y \in Y, p(x, y) \Rightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X, p(x, y)$,

e) $\forall x \in X, p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow (\forall x \in X, p(x)) \wedge (\forall x \in X, q(x))$,

f) $\neg(\exists x \in X, p(x)) \equiv \forall x \in X, \neg p(x)$,

g) $\neg(\forall x \in X, p(x)) \equiv \exists x \in X, \neg p(x)$,

h) $\exists x \in X, p(x) \vee q(x) \Leftrightarrow (\exists x \in X, p(x)) \vee (\exists x \in X, q(x))$,

i) $\neg(\forall x \in X, \exists y \in Y, p(x, y)) \equiv \exists x \in X, \forall y \in Y, \neg p(x, y)$,

22. Dê um exemplo para mostrar que <u>não</u> vale:

$$(\exists x \in X, p(x)) \wedge (\exists x \in X, q(x)) \Rightarrow \exists x \in X, p(x) \wedge q(x).$$

23. Negue a sentença

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty), \exists \delta \in (0, \infty), p(\delta) \to q(\varepsilon).$$

24. Mostre que são tautologias:

a) (Tautologia da demonstração por absurdo):

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \to F).$$

b) (Tautologia da demonstração por absurdo com quantificadores):

i) $\forall x \in X, p(x) \Rightarrow q(x) \Leftrightarrow \exists x \in X, p \wedge \neg q \to F$.

ii) $\exists x \in X, p(x) \Rightarrow q(x) \Leftrightarrow \forall x \in X, p \wedge \neg q \to F$.

iii) $\forall x \in X, \exists y \in Y, p(x) \Rightarrow q(x) \Leftrightarrow \exists x \in X, \forall y \in Y, p \wedge \neg q \rightarrow F$.

25. Considere a sentença:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Se quisermos demonstrar que a afirmação acima é verdadeira por absurdo, qual a sentença que teremos que mostrar? Dica: use a questão 24.

Alguns exemplos

26. Classifique como verdadeiro ou falso:

a) $2 > 3 \wedge 3 > 2$, b) $|x| \geq 0 \vee 2^2 = -4$, c) $|x| = -1 \rightarrow 1 = 0$, d) $1 = 0 \leftrightarrow 2 > 3$,

e) $\forall x \in \mathbb{R} x^2 > 0 \rightarrow |x| > 0$, f) $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 = 2$, g) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -2 \vee x^2 + 1 = 4$.

27. Se quisermos mostrar que $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ por contra-posição, qual a sentença que teremos que provar?

28. Considere a sentença:

$$x^3 + y^3 = z^3 \Rightarrow x \notin \mathbb{N} \vee y \notin \mathbb{N} \vee z \notin \mathbb{N}.$$

a) Se quisermos provar por contra-posição, qual sentença teremos que provar?

b) Se quisermos provar por contradição, qual sentença teremos que provar?.